This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

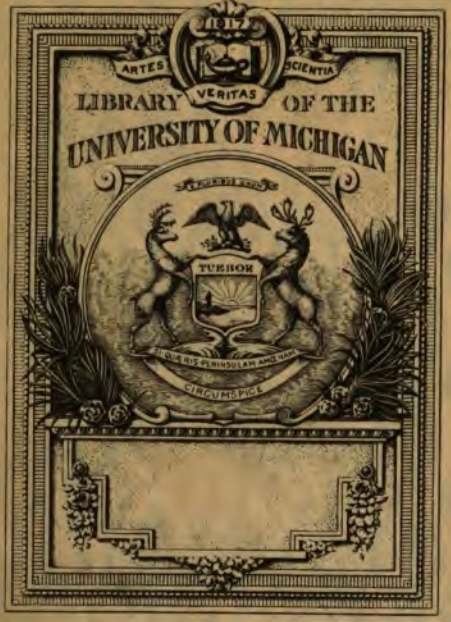
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

A 546593


ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
302
P28

Bármelly öszetett, vagy egyszerü
nyiséget is, néha bizonyos benne fog-
lalt mennyiségre nézve ~~tet~~ szoltunk
tekintetbe venni; s ezen esetben ezen
öszetett mennyiség azon bizonyos
benne foglalt mennyiség függvé-
nyének nevezetik. p.o. abx ben
x függvénye az ab. Tobbadán az
illy függvény mennyiségének értéke
változó, miért változó m. is neve-
tetnek

Peczelt Vizéfitészetsana.
Do Gyakorlati mértana.
Mayer fensőbb mathesise. 2köt
Pasquich mathesise 3köt
Unterberger Logarith táblái.
Stampfer logarith. táblái
Salamon háromszögtana.
Littrow kisebb mathesise.
Gerstner után Wargha utéfitész.
Burg, Vinkler, Schnell, Zobel
Bresztyenszky elemi math. 2köt.
Nagy Károly Arithmetikája.
Do Do A kis geometra.
Brith folgári mathematicája.
Littrow Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Hogrewe Libellatiója.
Garthe barometrica táblái
Sturm Mathesis iuvenilis.
Jekete „Törtek"
Schönvizner „Önfertőzés".

Unterricht
in der
Mathematischen Analysis
und
Maschinen-Lehre

Erster Band
enthaltend
die Buchstaben-Rechenkunst
und die sogenannte
Analysis endlicher Grössen
wie sie in seinen Papieren
Herr Joseph Mitterpacher von Mitternburg
hinterlassen hat

herausgegeben
von
Johann Pasquich
der Philos. Doct. und ordentl. öffentlicher Prof. der höheren Mathematik an der Ungarischen Universität zu Pest

Leipzig
in der Weidmannschen Buchhandlung 1790

Dem

Wohlgebohrnen Herrn

Ludwig Mitterpacher

von Mitternburg,

Ord. Professor der Naturgeschichte und Technologie
bey der Ungarischen Universität.

Hist. of Sci.
Ramsbury
3-4-30
20588.

5-18-38. 1463.

Wohlgebohrner Herr.

Mit dem ausnehmendſten Vergnügen überreiche ich Ihnen das Werk, welches die hinterlaſſenen Papiere Ihres ſeligen Bruders veranlaßt haben. Möchte es doch von ſeinen tiefen Einſichten unvergänglich zeugen! Möchte es ein Denkmahl meiner Dankbarkeit gegen Ihn, als meinen Lehrer

 ſeyn!

seyn! Möchte doch die Art, wie ich seine Gedanken ausgeführt habe, Ihren Beyfall erhalten! Dies sind meine Wünsche, mit denen ich die Ehre habe zu verharren

Ew. Wohlgebohren

Ergebenster
Johann Pasquich.

Vorrede.

Ich betrachte diese Schrift, nebst der Differential- und Integralrechnung, welche zur nächsten Ostermesse herauskommen soll, als eine Sammlung von Vorkenntnissen aus dem Gebiethe der reinen Mathematik, deren ich mich bey der Ausführung eines vollständigen Unterrichts in der Maschinen-Lehre bedienen werde: die Frage aber, ob nicht diese Sammlung überflüßig ist, da so viele mathematische Bücher vorhanden sind, zu welchen ich meine Leser beym Unterrichte in der Maschinen-Lehre verweisen könnte, überlasse ich Kennern zu entscheiden, und begnüge mich, hier nur einiges zu bemerken, das die Entstehung der gegenwärtigen Schrift betrifft.

Wenn es wahr ist, daß die Hauptpflicht eines Lehrers der höheren Mathematik darinn bestehet, daß er die Grundsätze derselben mit derjenigen Schärfe vortrage, wodurch seine Zuhörer (die keine Töpfe sind, weil für solche keine Mathematik ist) ihre Wißbegierde stillen, und in den Stand gesetzt werden mögen, das, was ihnen zur vollkommenen Ausbildung noch fehlet, aus den Schriften berühmter Mathematiker ohne fremde Leitung zu ersetzen; so hatte Herr **Joseph Mitterpacher**, als ordentlicher Professor der höheren Mathematik bey der Ungarischen Universität, seine Pflicht aufs vollkommenste erfüllt, und ich schätze es für mein vorzüglichstes Glück, ihn zu meinem Lehrer gehabt zu haben.

Aus Ungarn gebürtig, starb Er vor drey Jahren im fünf und vierzigsten seines Alters; unter den hinterlassenen Papieren, die mir bald nach seinem Tode übergeben wurden, fand ich, was ich vermuthete, nämlich vortreffliche Auszüge aus den Schriften der berühmtesten Mathematiker, als eines **Eulers, d'Alemberts, Bernoullis, Kästners,**

Kar-

Karstens, nebst Erläuterungen, welche meinem seligen Lehrer dienten, um seine Zuhörer mit dem mathematischen Geiste dieser grossen Männer bekannt zu machen. Außerdem waren Entwürfe zu verschiedenen Aufsätzen da, die mir wichtiger zu seyn schienen, als daß ich zum Zeugniß der Geschicklichkeit ihres Verfassers, und zum Vortheil angehender Algebraisten keinen Gebrauch davon machen dürfte: ich suchte daher die nützlichsten Gegenstände auf, bearbeitete dieselben nach den gefundenen Entwürfen, und brachte hierauf alle in Verbindung unter einander, wie sie in der gegenwärtigen Schrift stehen, wobey ich nichts zu thun hatte, als seinen Gedanken getreu zu bleiben, dieselben bisweilen zu entwickeln, und Zwischenideen einzuschalten, so, wie er es selbst gethan haben würde, wenn er sich je entschlossen hätte, ein Lehrgebäude aufzuführen. In den wenigen Anmerkungen, welche hinzu gekommen sind, bemühte ich mich, entweder einiges nach meiner Einsicht zu erläutern, oder die Quellen, woraus der Verfasser geschöpft hat, und

die Schriften anzuzeigen, worinn gewisse Gegenstände ausführlicher abgehandelt werden: geschieht es, daß man Werke vermißt, welche ich hätte anführen sollen; so bitte ich, es mir nicht übel zu nehmen, indem ich keine Lust hatte, meine Leser zu Schriften zu verweisen, welche ich weder gelesen, noch, aus Mangel derselben, lesen konnte.

Indessen bekenne ich, zween Fehler begangen zu haben, einen am Ende des neunten Abschnittes, wo ich des Hrn. Eulers Algebra vorzüglich zu empfehlen vergaß, und den andern am Ende des achten Abschnittes, wobey ich mich an die Vorzüge nicht erinnerte, welche des Hrn. Hindenburgs Darstellung der unbestimmten Potenz eines Infinitinomii hat. Bekanntlich ist die Hindenburgische Darstellung so allgemein, daß man aus seiner Formul jedes Glied jeder Potenz eines Infinitinomii unmittelbar erhält, ohne genöthigt zu seyn, die vorhergehenden Glieder zu suchen: freylich setzt die Erfindung derselben Formul des Hrn. Hindenburgs Combinationsmethode voraus, es sind aber die

Gründe

Gründe davon so einfach, und der Nutzen, welchen dieselbe in Lehrbüchern gewähren würde, so einleuchtend, daß sie schon lang verdient hätte, in dergleichen Werke aufgenommen zu werden; welches ich gewiß thun würde, wenn ich eine eigne Algebra schreiben wollte.

Wien, im September des Jahrs 1790.

Pasquich.

Nachricht

Nachricht

wegen der Verbesserung der Druck- und Schreibfehler.

Billig sollte man hier eine genaue Anzeige von Druck- und Schreibfehlern suchen; weil mir aber die Zeit nicht hinreichte, diese, wenn sie irgendwo stecken, aufzusuchen, und jene leicht in die Augen fallen; so verdiene ich Nachsicht, zumal da ich verspreche, beyde in meiner Differential- und Integralrechnung anzuführen: folgende Verbesserung kann ich aber nicht zurückhalten.

Auf der 159. Seite, von der 8ten Zeile an, statt „wie viel ihrer die Zahl hat, welche die Stelle des „Gliedes, von dessen Coefficienten die Rede ist, an„zeiget, ob es nämlich, das zweyte, dritte u. s. f. „Glied ist:“ lese man — wie viel ihrer die Anzahl der vorhergehenden Glieder hat.

Unter-

Unterricht
in der
Mathematiſchen Analyſis.

Der I. Abſchnitt.
Von entgegengeſetzten Zahlen und den damit vorzunehmenden Rechnungen.

1. §. Lehrſatz.

Zwo Zahlen können von der Beſchaffenheit ſeyn, daß ihre gleich großen Theile, in Anſehung deſſen, was man durch beyde Zahlen zu beſtimmen ſucht, einander aufheben.

Beweis. Weil hier nur von der Möglichkeit die Rede iſt; ſo werden einige Beyſpiele zum Beweiſe hinreichen.

1) Ein Spieler hat in der erſten Stunde 300 Gulden gewonnen, und hierauf 300 verloren. Will man ſeinen geſammten Gewinn oder Verluſt wiſſen; ſo muß dieſes

durch die gegebenen Zahlen geſchehen, und man ſieht, daß dieſe Zahlen in Rückſicht auf den geſammten Gewinn und Verluſt einander aufheben, daher zuſammen ſoviel als Null geben, ſoviel, als wenn kein Gulden gewonnen und keiner verloren worden wäre.

Hätte der Spieler in der erſten Stunde 500 Gulden gewonnen, und hierauf 200 verloren; ſo würden die Zahlen 500 und 200 zuſammen einen Gewinn von 300 Gulden geben; weil 200 gewonnene und 200 verlorene Gulden einander aufheben.

Hätte aber der Spieler 800 Gulden gewonnen und hierauf 1200 verloren; ſo hieße dieſes ſo viel, als wenn er 400 Gulden verloren und nichts gewonnen hätte: 800 gewonnene und 800 verlorene Gulden heben nämlich einander auf, daher machen die Zahlen 800 und 1200 zuſammen einen Verluſt von 400 Gulden aus.

2) Man nehme ferner an, daß die höchſte Fläche des Queckſilbers in einem reaumüriſchen Thermometer 2 Grade unter der 0 vor ſechs Stunden geſtanden iſt, binnen dieſer Zeit aber habe ſich der Stand des Queckſilbers geändert, dieſes ſey erſtlich um 3 Grade gefallen, und hierauf um 3 Grade geſtiegen. Will man nun den Stand des Queckſilbers im Thermometer und die Entfernung ſeiner höchſten Oberfläche von der 0 wiſſen; ſo iſt einleuchtend, daß man dieſes durch die gegebenen Zahlen 3, 3 zu beſtimmen hat: es iſt aber auch klar, daß dieſe Zahlen bey ſolcher Unterſuchung einander aufheben, und zuſammen ſo viel als Null

gelten,

gelten, folglich anzeigen, daß die höchste Fläche des Queckſilbers nun 2 Grade unter der Null ſtehet, wie ſie vor ſechs Stunden geſtanden iſt, indem die 3 Grade, um die ſich dieſelbe Fläche weiter von der 0 entfernt hatte, während daß das Queckſilber gefallen war, durch die 3 Grade, auf welche eben die Fläche hierauf ſtieg, aufgehoben worden ſind.

Wäre hingegen das Queckſilber erſtlich um 5 Grade gefallen und hierauf um 4 geſtiegen; ſo würden dieſe 4 Grade und 4 von den 5 Graden einander aufheben, daher gäben die Zahlen 5, 4 ſo viel, als wenn das Queckſilber nur um 1 Grad gefallen, um keinen aber geſtiegen wäre: man würde demnach ſagen, ſeine höchſte Fläche, die vor ſechs Stunden 2 Grade unter der 0 ſtund, ſtehe nun 3 Grade unter der 0.

Wäre endlich das Queckſilber erſtlich um 2 Grade gefallen und hierauf um 7 Grade geſtiegen; ſo würden jene 2 Grade und 2 von den 7 Graden einander aufheben, folglich die gegebenen 2 und 7 Grade zuſammen ſoviel gelten, als wenn das Queckſilber nur um 5 Grade geſtiegen, und um keinen Grad gefallen wäre: weil ferner die höchſte Fläche des Queckſilbers 2 Grade unter der 0 vor ſechs Stunden geſtanden ſeyn ſoll; ſo ſind dieſe Grade durch 2 von den 5 Graden aufgehoben worden, und es iſt demnach gleichviel, als wenn dieſelbe Fläche an der 0 geſtanden und dann um 3 Grade geſtiegen wäre.

2. §. Erklärungen.

Die Einheiten der Zahlen (1. §.) bedeuten zwar Gröſſen von einerley Art, welche aber unter entgegengeſetzten oder ſolchen Bedingungen betrachtet werden, daß jede von ihnen, welche man will, durch die Behauptung der andern verneint wird: ſolche Gröſſen und Zahlen heißen entgegengeſetzte, und man kann, um ſie von einander zu unterſcheiden, die eine bejaht, die andere aber verneint nennen.

Anmerkung.

1) Das Gewinnen z. B. und Verlieren ſind entgegengeſetzte Bedingungen: wenn ich ſage, ein Spieler habe in einer Stunde 100 Gulden gewonnen, und ein anderer behauptet, er habe in derſelben Stunde 100 Gulden verloren; ſo verneine ich ſtillſchweigend durch meine Behauptung das, was der andere behauptet, und er verneinet ſtillſchweigend durch ſeine Behauptung das, was ich behaupte. Die Zahlen 500 gewonnene und 200 verlorene Gulden (1. §. n. 1.) ſind demnach entgegengeſetzte Zahlen; ihre Einheiten bedeuten entgegengeſetzte Gröſſen, nämlich Gröſſen von einerley Art (Gulden), welche unter entgegengeſetzten Bedingungen (Gewinn und Verluſt) betrachtet werden. Will man das Gewinnen als eine bejahte, und das Verlieren als eine verneinte Bedingung anſehen; ſo ſind auch die gewonnenen Gulden als bejahte, und die verlorenen als verneinte Gröſſen anzuſehen, und nun ſieht man die angeführte Zahl 500 als eine Menge bejahter, 200 aber als eine Menge verneinter

verneinter Einheiten an, daher nennt man auch 500 eine bejahte und 200 eine verneinte Zahl.

2) Doch ist dieses ganz willkührlich, denn man könnte mit gleichem Rechte das Verlieren für eine bejahte und das Gewinnen für eine verneinte Bedingung halten, und dann die verlorenen Gulden als bejahte, und die gewonnenen als verneinte Grössen ansehen, wobey die angeführte Zahl 500 als eine Menge verneinter Einheiten eine verneinte, und 200 als eine Menge bejahter Einheiten eine bejahte Zahl genannt werden könnte. Es ist nämlich in sich sowohl das Verlieren als das Gewinnen eine bejahte Bedingung, die sich auf eine wirkliche Begebenheit bezieht, und wenn man die eine für verneint hält; so geschieht dieses nur in Beziehung auf die ihr entgegengesetzte Bedingung; wie hier der Verlust als ein verneinter Gewinn, und der Gewinn als ein verneinter Verlust angesehen werden kann.

3) Eben so sind das Fallen und Steigen (1 §. n. 2.), die Zunahme und Abnahme, das Vorwärtsgehen, und Rückwärtsgehen u. d. gl. mehr entgegengesetzte Bedingungen: ist das Queckſilber in einem Thermometer um 3 Grade gefallen und hierauf um 5 Grade gestiegen; hat ferner ein Capital um 3000 Gulden zugenommen, und hierauf um 2000 abgenommen; ist endlich eine Armee um 8 Meilen vorwärts und hierauf um 12 Meilen rückwärts gerückt; so sind die Zahlen 3 und 5, ferner 3000 und 2000, endlich 8 und 12 entgegengesetzte Zahlen, als deren Einheiten Grössen von einerley Art (Grade, Gulden, Meilen),

die aber unter entgegengesetzten Bedingungen betrachtet werden, bedeuten. Hält man das Steigen, die Zunahme, und das Vorwärtsgehen für bejahte Bedingungen; so kann man das Fallen, die Abnahme, und das Rückwärtsgehen als verneinte Bedingungen ansehen, nämlich als verneintes Steigen, verneinte Zunahme, und verneintes Vorwärtsgehen, wie (n. 2.).

3. §. Willkührlicher Satz.

Bey einer Rechnung mit entgegengesetzten Zahlen (2. §.) muß man die bejahten von den verneinten Zahlen zu unterscheiden suchen: es ist schon eingeführt, daß man einer bejahten Zahl entweder das Zeichen (+) oder keines, der verneinten Zahl aber allemal das Zeichen (—) voransetzt.

1. Zusatz.

Weil es willkührlich ist, welche von zwoen entgegengesetzten Zahlen bejaht, und welche verneint seyn soll (2. §. Anmerk. n. 2.); so muß man dieses gleich im Anfange der Rechnung bestimmen, und dabey bis zum Ende derselben bleiben, um alle Verwirrung in der Folge zu vermeiden.

Wenn ich z. B. mit Gewinnsten und Verlusten bey einer Rechnung zu thun habe, und gleich im Anfange bemerke, daß ich durch jede Einheit einen Gulden verstehe, und den Gewinn als eine bejahte, den Verlust aber als eine verneinte Bedingung ansehe; so wird jeder leicht einsehen, was bey mir die nachstehenden Zahlen sagen wollen:

+3000

+ 3000 oder 3000 und — 100
+ 4000 oder 4000 und — 200

Er wird ſich nämlich bey den Zahlen 3000 und 4000 ſoviele gewonnene, bey 100 und 200 hingegen eben ſoviele verlorene Gulden denken.

2. Zuſatz.

Die Zeichen (+ —) bey entgegengeſetzten Zahlen drücken demnach das Bejahte und Verneinte aus, das man ſich bey ihnen denkt: ſie gehen alſo die Gröſſe der Zahlen gar nicht an, indem ſie ſich vielmehr nur auf die Bedingungen beziehen, worunter die durch ihre Einheiten verſtandenen Gröſſen betrachtet werden (2. §.).

Wenn ich z. B. (+ —) in der Bedeutung (1. Zuſ.) nehme; ſo ſind in + 3000 eben ſo gut 3000 Gulden, wie in — 3000, und durch (+ —) wird man nur ermahnt, bey + 3000 auf den Gewinn, bey — 3000 aber auf den Verluſt zu denken.

Man kann auch in der Bedeutung (2. §. Anm. n. 3.) die daſelbſt angeführten Zahlen nun ſo ſchreiben

+ 5 oder 5 und — 3
+ 3000 oder 3000 und — 2000
+ 8 oder 8 und — 12

Hier bedeuten aber 5 und 3 gleiche Grade, 3000 und 2000 einerley Gulden, 8 und 12 einerley Meilen, nur durch die vorangeſetzten Zeichen (+ —) wird man ermahnet, bey 5 auf das Steigen und bey 3 auf das Fallen des

Queckſilbers im Thermometer, ferner bey 3000 auf die Zunahme und bey 2000 auf die Abnahme eines Capitals, endlich bey 8 auf das Vorwärtsgehen, und bey 12 auf das Rückwärtsgehen einer Armee zu denken.

3. Zuſatz.

Weil alle bejahte Zahlen in einer Rechnung Mengen von einerley bejahten, und alle verneinte, Mengen von einerley verneinten Einheiten oder ihren Theilen ſeyn ſollen; ſo iſt die Summe jener eine bejahte, und die Summe dieſer eine verneinte Zahl, welche auf eben die Art gefunden wird, wie man genannte Zahlen von einerley Gattung in der gemeinen Rechenkunſt zu addiren pflegt.

Beyſpiele.

+ 3000		— 300
+ 5000		— 200
+ 8000	die Summe	— 500

In der Bedeutung (1. Zuſ.) würde dieſes heißen: 3000 gewonnene Gulden machen mit 5000 gewonnenen einen Gewinn von 8000 Gulden aus: und 300 verlorene Gulden machen mit 200 verlorenen einen Verluſt von 500 Gulden aus.

4. Zuſatz.

Aber zwo entgegengeſetzte Zahlen kann man eigentlich nicht in eine Summe bringen: man kann z. B. in (3. Zuſ.) nicht ſagen, daß die Summe der Zahlen + 3000 und — 300 die Zahl 3300 iſt; denn ſie müßte entweder die Menge gewon-

gewonnener oder verlorener Gulden anzeigen, da doch keins von beyden geschehen kann. Weil nämlich die Einheiten bejahter und verneinter Zahlen Grössen bedeuten sollen, welche unter verschiedenen einander entgegengesetzten Bedingungen betrachtet werden (2. §.); so muß man diese Zahlen, als genannte Zahlen von verschiedener Gattung in der gemeinen Rechenkunst, ansehen.

5. Zusatz.

Doch ist verstattet, das, was zwo entgegengesetzte Zahlen in Ansehung dessen, was durch sie bestimmt werden soll, gelten, ihre Summe zu nennen; in dieser Bedeutung findet man ihre Summe, wenn man dieselbe = 0 setzt, im Fall die bejahte Zahl in sich so groß als die ihr entgegengesetzte verneinte ist: sind aber diese Zahlen ungleich; so muß man für ihre Summe die Differenz der in sich kleineren Zahl von der grösseren mit dem Zeichen der grösseren nehmen (1. 2. §.).

Beyspiele.

	+ 300	+ 500	+ 800
	— 300	— 200	— 1200
Die Summe	= 0	= + 300	= — 400

Das heißt in der Bedeutung (1. Zus.), 300 gewonnene und 300 verlorene Gulden machen zusammen weder einen Gewinn, noch einen Verlust aus: 500 gewonnene und 200 verlorene Gulden gelten zusammen soviel als ein Gewinn von 300 Gulden: 800 gewonnene und 1200 ver-

lorene Gulden machen zusammen einen Verlust von 400 Gulden aus.

6. Zusatz.

Daß eben die Zeichen (+ —), welche nun bejahte und verneinte Zahlen anzeigen müssen, sonst auch die Addition und Subtraction bedeuten, dieses kann bey einer Rechnung mit entgegengesetzten Zahlen keine Verwirrung verursachen: während der Rechnung kann man nämlich dieselben Zeichen sicher als Additions- und Subtractions-Zeichen betrachten, am Ende der Rechnung aber muß man ihnen die Bedeutung bejahter und verneinter Zahlen geben; jenes kann aus der Ursache geschehen, weil die darauf gegründete arithmetische Arbeit einerley Zahlen giebt, welche sonst nach (3. Zus.) entstehen müssen; dieses muß aber deswegen geschehen, weil man eigentlich die Mengen bejahter oder verneinter Einheiten sucht, welche gegebene bejahte und verneinte Zahlen zusammen geben müssen.

Ich kann z. B. in (5. Zus.) die Zahl — 200, welche eigentlich zweyhundert verlorene Gulden bedeuten soll, als eine ungenannte Zahl ansehen, welche von der andern ungenannten 500 abgezogen werden muß, und so finde ich 500 — 200 = 300: diese Zahl nehme ich nun in ihrer wahren Bedeutung, und verstehe dadurch nicht mehr eine Zahl, welche zu einer andern addirt werden soll, sondern eine bejahte Zahl, welche in (5. Zusatz) einen Gewinn anzeigt.

Eben

Eben so kann ich in (5. Zus.) die Zahl — 1200, die eigentlich zwölfhundert verlorene Gulden andeutete, als eine von + 800 abzuziehende Zahl ansehen, und das, was beyde Zahlen zusammen geben, dadurch suchen, daß ich 1200 von 800 auf diese Art abziehe: 800 — 1200 = 800 — (800 + 400) = 800 — 800 — 400 = — 400: bey der gefundenen Zahl — 400 gebe ich nun dem Zeichen (—) seine ursprüngliche Bedeutung, indem ich dadurch nicht mehr eine vorzunehmende Abziehung, sondern in Rücksicht auf die Voraussetzung des 5ten Zus. einen Verlust verstehe, so, daß die Zahl — 400 diesen Verlust bedeuten soll.

4. §. Lehrsatz.

Bey der Rechnung mit entgegengesetzten Zahlen kann man die Einheit überall für bejaht annehmen.

Beweis. Bey jeder Rechnung wird die Einheit als das gemeinschaftliche Maaß aller bey ihr vorkommenden Zahlen betrachtet: weil also bey entgegengesetzten Zahlen die Einheiten der bejahten Zahlen, von den Einheiten der verneinten unterschieden seyn sollen (2. §.); so kann zwar eine und eben dieselbe Einheit nicht das gemeinschaftliche Maaß aller bejahten und verneinten Zahlen seyn, es ist vielmehr nöthig, daß man die bejahten Zahlen durch die bejahte, und die verneinten durch die verneinte Einheit messe, doch, wenn die Einheit überall für bejaht angenommen würde, könnte man sagen, daß die Einheit oder ein Theil von ihr in jeder bejahten Zahl steckt, in einer verneinten

Zahl.

Zahl aber nicht die Einheit sondern das ihr Entgegengesetzte oder ein Theil davon enthalten ist, so wie, wenn man die Einheit überall für verneint annähme, man sagen könnte, daß entweder die ganze Einheit, oder ein Theil davon in jeder verneinten Zahl steckt, in einer bejahten Zahl aber nicht die Einheit, sondern das ihr Entgegengesetzte oder ein Theil davon enthalten ist. Gleichgültig ist es demnach, ob man die Einheit überall für bejaht oder für verneint annehmen will; es wird also gestattet seyn, sie für bejaht anzunehmen, ohne dadurch eine Verwirrung bey der Ausmessung der bejahten und verneinten Zahlen einzuführen.

Zusatz.

Jede bejahte Zahl kann man in der Folge als eine Menge von Einheiten oder von Theilen der Einheit betrachten, und eine verneinte Zahl als eine Menge des Entgegengesetzten der Einheit ansehen.

5. §. Lehrsatz.

Eine bejahte oder verneinte Zahl von einer andern abziehen gielt soviel, als die ihr Entgegengesetzte zu der andern nach (3. § 5. Zus.) addiren.

Beweis. 1) Die Zahl, wovon der Abzug geschehen soll, sie mag bejaht oder verneint seyn, heiße A, und die abzuziehende Zahl, wenn sie bejaht ist, sey + a, hingegen — a, wofern sie verneint ist.

2) Weil die Zahlen + a und — a zusammen soviel als Null geben (3. §. 5. Zus.); so müssen die drey Zahlen

A; + a; — a zusammen allemahl soviel betragen, als die Zahl A allein beträgt.

3) Wenn man nun + a von A abziehen will; so stellt man sich + a als einen Theil von A vor, und man will den andern Theil wissen, welcher mit + a die Zahl A ausmachet: dieser Theil ist also das, was herauskömmt, wenn man — a zu A nach (3. §. 5. Zus.) addirt, wegen (n. 2.).

4) Will man aber — a von A abziehen; so betrachtet man — a gleichfalls als einen Theil von A, und man will den andern Theil wissen, der mit — a die Zahl A ausmachet: also ist dieser andere Theil das, was man erhalten würde, wenn man + a zu A nach (3. §. 5. Zus.) addirte, wegen (n. 2.).

Beyspiele.

$+8-(+5)=8-5=3.\quad +8-(-5)=8+5=13.$

$-12-(+6)=-12-6=-18.$

$-12-(-6)=-12+6=-6.$

6. §. Lehrsatz.

Wenn zwo Zahlen gleiche Zeichen (+ oder —) haben, folglich beyde bejaht oder beyde verneint sind; so muß das Product aus ihnen eine bejahte Zahl mit dem Zeichen (+) seyn: ist aber eine von ihnen bejaht, mit dem Zeichen (+), und die andere verneint, mit (—); so muß das Product allemahl eine verneinte Zahl, mit dem Zeichen (—) seyn.

Beweis.

Beweis. Es kann seyn

	der Multiplicandus	und Multiplicator
1)	+ a	+ b
2)	— a	— b
3)	+ a	— b
4)	— a	+ b

Nun heißt eine Zahl mit einer andern multipliciren soviel, als sie so oft nehmen, wie oft Eins in der andern Zahl steckt: bey 1) steckt aber gewiß Eins oder ein Theil davon in + b (4. §. Zus.); also muß man auch den Multiplicandus + a eben so oft nehmen, welches unstreitig ein bejahtes Product geben muß (3. §. 3. Zus). Bey 2) steckt nicht die Einheit sondern das ihr Entgegengesetzte in — b (4. §. Zus.): also muß man auch nicht — a sondern das Entgegengesetzte + a bmahl nehmen, welches, wie zuvor, ein bejahtes Product giebt. Bey 3) steckt ebenfalls nicht die Einheit sondern das ihr Entgegengesetzte in — b: also muß man auch nicht + a sondern das Entgegengesetzte — a bmahl nehmen, und dieses wird gewiß eine verneinte Zahl zum Product geben (3. §. 3. Zus.). Bey 4) endlich steckt die Einheit oder ein Theil von ihr gewiß in + b: also muß auch — a bmahl genommen werden, welches aus gleicher Ursache ein verneintes Product giebt.

Beyspiele.

$(+8).(+5) = +40$; $(-8).(-5) = +40$;

$(+8).(-5) = -40$; $(-8).(+5) = -40$;

$(8-5).(-4) = -32+20 = -12$.

7. §.

7. §. Lehrſatz.

Man mag eine bejahte Zahl durch eine bejahte, oder eine verneinte durch eine verneinte dividiren; ſo iſt doch der Quotient allemahl bejaht: wenn man aber entweder eine bejahte Zahl durch eine verneinte, oder eine verneinte durch eine bejahte dividirt; ſo wird der Quotient allemahl verneint ſeyn.

Beweis. Der Quotient ſoll durch ſeine Einheiten oder Theile der Einheit anzeigen, wie oft der Diviſor im Dividendus ſteckt: da alſo ſowohl der bejahte Diviſor im bejahten Dividendus als der verneinte Diviſor im verneinten Dividendus entweder ganz oder zum Theil ſteckt (4. §. Zuſ.); ſo muß auch entweder die ganze Einheit oder ein Theil von ihr im Quotienten ſtecken, welches nur alsdann geſchehen kann, wenn der Quotient eine bejahte Zahl iſt (4. §. Zuſ.).

Hingegen kann weder ein bejahter Diviſor in einem verneinten Dividendus, noch ein verneinter Diviſor in einem bejahten Dividendus ſtecken (4. §. Zuſ.): alſo kann in dieſem Fall die Einheit weder ganz noch zum Theil im Quotienten ſtecken, und dieſes wird nur alsdann geſchehen, wenn der Quotient verneint iſt. (4. §. Zuſ.).

Beyſpiele.

$+8:+2=+4$; $-8:-2=+4$; $+8:-2=-4$;
$-8:+2=-4$;

$+2:+3=+\frac{+2}{+3}=+\frac{2}{3}$; $-2:-3=\frac{-2}{-3}=+\frac{2}{3}$;

$+2:-3=\frac{+2}{-3}=-\frac{2}{3}$; $-2:+3=\frac{-2}{+3}=-\frac{2}{3}$.

Anmer-

Anmerkung des Herausgebers.

So hat die Beweise der Sätze (5. 6. 7. 8. §.) auch Herr Hofrath Käſtner ausgeführt (a), die ich manchen andern gleich allgemeinen aus der Urſache vorziehe, weil ſie unmittelbar aus den Begriffen der Dinge, wovon hier die Rede iſt, hergeholt, und ſo mehr belehrend als andere ſind. Es iſt in der That viel daran gelegen, daß der angehende Analyſt bey der Lehre von zuſammengeſetzten Zahlen überall auf die erſten Begriffe, welche man ſich von ihnen gemacht hat, zurückgeführt, und es ihm deutlich gezeigt werde, wie die dahin gehörigen Sätze und arithmetiſchen Arbeiten damit zuſammenhängen: Für einen ſolchen wird alſo das, was ich hier beybringen will, gar nicht überflüßig ſeyn; es iſt eine nähere Erläuterung deſſen, was ſchon Hr. Hofrath Käſtner (a. a. O.) angemerkt hat: außerdem verdient des Hr. Hofrath Karſten lehrreiche Abhandlung fleißig geleſen zu werden, worinn er die Begriffe von bejahten und verneinten Gröſſen, wie ſie bey verſchiedenen Mathematikern vorkommen, auseinander geſetzt hat. (b).

(a) Anfangsgründe der Arithm. I. Cap. 101 — 111. §.

(b) Mathematiſche Abhandlungen. III. Abhandlung.

I.) Man kann eine bejahte Gröſſe und Zahl für gröſſer als Nichts, und eine verneinte für kleiner als Nichts halten, dieſes aber nur in Beziehung auf die ihr entgegengeſetzte bejahte Gröſſe und Zahl, ſo, daß der Ausdruck, eine verneinte Gröſſe und Zahl iſt weniger als Nichts, eben

eben soviel und nichts mehr sagen will, als, eine verneinte Grösse und Zahl bedeutet weniger als Nichts von der ihr entgegengesetzten Grösse und Zahl.

1) In sich ist nämlich eine verneinte Grösse und Zahl, so gut als eine bejahte, was mehr als nichts (3. §. 2. Zus.), und eine Grösse oder Zahl, welche in sich weniger als nichts seyn soll, ist gewiß ein Unding.

2) Will man aus gegebenen Zahlen + 40 und — 30, wo (+ —) den Gewinn und Verlust ausdrücken sollen, bestimmen, wie viel Gulden ein Spieler gewonnen hat; so wird dieses die bejahte Zahl + 10 anzeigen, welche die Zahlen + 40 und — 30 zusammen geben (3. §. 5. Zus.): da + 10 zehn gewonnene Gulden sind; so ist hier die bejahte Zahl + 10 etwas mehr als Nichts vom Gewinn, den man bestimmen wollte.

3) Hätte man + 40 und — 40 gehabt, oder hätte der Spieler gleich viel verloren als gewonnen; so würden die Zahlen + 40 und — 40 zusammen die 0 geben (3. §. 5. Zus.), das heißt: dieselben Zahlen geben nichts vom Gewinn, den man durch sie bestimmen wollte.

4) Hätte man nun + 40 und — 50; so gäben diese Zahlen zusammen — 10 (3. §. 5. Zus.): es ist — 10 in sich eine Menge wirklicher Grössen, nämlich zehn verlorene Gulden, folglich in sich mehr als nichts, vermöge der angenommenen Bedeutung der Zeichen (+ —) in (n. 2.); doch aber, weil man durch diese Zahlen den Gewinn wissen wollte, kann man sagen, es sey — 10 weniger als nichts vom

Gewinn, den man ſuchte, indem alsdann erſt die Rechnung nichts vom Gewinn geben würde, wenn ſie auſſer — 10 auch + 10, welches ein wirklicher Gewinn iſt, gäbe, wie + 40 und — 40 in (n. 3.).

5) Es erhellet hieraus, wie man ſich des Ausdruckes weniger als nichts in allen übrigen Fällen zu bedienen hat. Das, was man durch die Rechnung herauszubringen ſucht, wird gemeiniglich für bejaht angenommen (3. §. 1. Zuſ.): wenn alſo die Rechnung was immer für eine bejahte Zahl + a giebt; ſo giebt dieſe Zahl was mehr als nichts von dem, was man ſucht, wie + 10 was mehr als nichts vom Gewinn in (n. 2.) gegeben hatte: giebt hingegen die Rechnung eine verneinte Zahl — b; ſo giebt dieſe weniger als nichts, nämlich von dem, was man durch die Rechnung ſucht, wie — 10 weniger als nichts vom Gewinn in (n. 4.) war.

6) Und nur in dieſer Bedeutung kann man jede verneinte Zahl — b kleiner als jede bejahte + c nennen; auch unter mehreren verneinten Zahlen — 1, — 2, — 3, — 4, — 5 und ſ. f. wird man diejenigen für kleiner halten, welche als Zahlen, ohne Rückſicht auf das vorangeſetzte Zeichen (—) gröſſer ſind; ſo wird — 5 eine kleinere Zahl als — 4, dieſe kleiner als — 3 u. ſ. f. ſeyn. Je gröſſer nämlich eine Zahl b, in ſich betrachtet, iſt, deſto weniger als nichts wird — b von dem Entgegengeſetzten bedeuten, weil ein deſto gröſſeres Entgegengeſetztes + b erfordert wird, wenn es mit — b nichts geben ſoll.

7) Durch

7) Durch diese Betrachtungen lassen sich demnach die Bezeichnungen, wie $-b \lessdot 0$; $-b \lessdot +c$ rechtfertigen, die nämlich nur in der Bedeutung (n. 5. 6.), und sonst in keiner andern geduldet werden können.

II.) Ein Beyspiel, daß man durch ganz gemeine Rechnungen veranlaßt werden kann, sich solche Vorstellungen von bejahten und verneinten Zahlen zu machen, wobey man jene für grösser, und diese für kleiner als nichts hält, und daß nur in der Bedeutung (I.) dieses genommen werden kann, wird hier nicht unrecht stehen.

1) Es ist ein bekannter Grundsatz der Rechenkunst, daß, wenn man von zwoen ungleichen Zahlen eine und eben dieselbe dritte Zahl abzieht, die grössere Zahl einen grösseren und die kleinere einen kleineren Rest giebt.

2) Wenn daher a, b, c was immer für Zahlen sind; so ist doch allemahl $a \lessdot a+b$: also auch $a-(a+b) \lessdot a+b-(a+b)$, oder $a-a-b \lessdot a+b-a-b$, oder $-b \lessdot 0$.

Es ist ferner auch $a \lessdot a+b+c$, folglich auch $a-(a+b) \lessdot a+b+c-(a+b)$, oder $-b \lessdot +c$.

3) Das heißt: jede verneinte Zahl $-b$ ist kleiner als Null, und kleiner als jede bejahte Zahl $+c$.

4) Will man alles genau nehmen; so muß man bekennen, daß die Schlüsse (n. 2.) nichts anders beweisen, als daß man oft einen arithmetischen Grundsatz da anwendet, wo er gar nicht anwendbar ist, oder von ihm mehr verlanget

als er wirklich geben kann: der Grundſatz (n. 1.) ſetzt nämlich die Möglichkeit der Abziehung und der dadurch zu erhaltenden Reſte voraus, da doch dieſes in (n. 2.) unmöglich war, indem es unmöglich iſt, eine gröſſere Zahl a+b von einer kleineren a abzuziehen, ſo wie es unmöglich iſt, daß a+b ein Theil von a ſey, und überdem a noch einen Theil enthalte, den man eigentlich durch die Abziehung der Zahl a+b von a herausbringen will: es will auch die gemeine Rechenkunſt, wohin der Grundſatz (n. 1.) gehöret, von bejahten und verneinten Zahlen nichts wiſſen, und ſo bedeutet, ſtatt (n. 3.), die Zahl —b in (n. 2.) nichts anders, als eine Zahl b, welche abgezogen werden müßte, wenn eine da wäre, wovon der Abzug geſchehen könnte.

5) Wenn man indeſſen —b und +c in (n. 2.) als eine verneinte und bejahte Zahl betrachtet, folglich den Zeichen (+—), die eigentlich in (n. 2.) die Addition und Subtraction anzeigten, die Bedeutung (3. §.) giebt; ſo wird man dadurch die Schlüſſe (n. 2. 3.), und die daſelbſt gemachte Anwendung des Grundſatzes (n. 1.) rechtfertigen, ob man gleich geſtehen muß, daß er da, wo man ihn für einen Grundſatz annimmt, von ſolchen Dingen gar nichts wiſſen will.

Denn wenn —b eine verneinte Zahl iſt; ſo geben —b und a+b zuſammen a nach (3. §. 5. Zuſ.), daher kann man a+b und —b als Theile von a, und folglich —b als einen wahren Reſt anſehen, der übrig bleiben muß, wenn

wenn man a+b von a abzieht, und so folgt (n. 2. 3.) richtig aus (n. 1.).

6) Daß ferner —b<o und —b<+c in (n. 2.) nur in der Bedeutung (I.) gelten kann, dieses kann man leicht einsehen.

Man hat nämlich in (n. 2.) die Zahl a+b als einen Theil von a abgezogen, um den andern Theil von a herauszubringen, und dieser Theil soll —b seyn: da man also auf diese Art mehr von a abgezogen hat, als a beträgt, und alsdann erst nichts von a übriggeblieben wäre, wenn man davon a abgezogen hätte; so kann man —b, was übrig blieb (n. 5.), für weniger als nichts, nämlich weniger als nichts von a halten.

III.) Aus allen dem, was in (I. II.) beygebracht worden ist, erhellet, wie, so zu sagen, unmathematisch man reden muß, um die Vorstellungen (I.) zu rechtfertigen, zu welchen gewisse Rechnungen, wie (II. n. 2.), zu führen scheinen: es ist daher auch rathsam, diese unmathematische Sprache überall, wo es sich thun läßt, zu vermeiden, oder recht zu gebrauchen, wo sie nicht vermieden werden kann. Nimmt man den Ausdruck weniger als nichts, sagt Herr Hofr. Kästner (a. a. O. 95. §.), nicht in diesem Verstande (nämlich in der obigen Bedeutung I.), so ist er falsch, und hat wirklich Mathematikverständige zu irrigen Vorstellungen von den verneinenden Grössen verführet.

Der II. Abſchnitt.

Gründe der Buchſtaben-Rechenkunſt.

8. §. Willkührlicher Satz.

Alle Zahlen kann man mit einzelnen Buchſtaben bezeichnen, wobey verſchiedene Buchſtaben verſchiedene, und einerley Buchſtaben auch einerley Zahlen in einer Rechnung andeuten ſollen: was die damit vorzunehmenden arithmetiſchen Arbeiten betrifft; ſo kann man dieſelben in der allgemeinen Rechenkunſt durch die ſchon eingeführten Zeichen der Addition (+), Subtraction (−), Multiplication (× oder .), und Diviſion (:) anzeigen: ſoll eine auf dieſe Art bezeichnete Summe oder Differenz mehrerer Zahlen mit einer andern Zahl, Summe oder Differenz multiplicirt werden; ſo wird man bey der Bezeichnung einer ſolchen Multiplication alle Verwirrung vermeiden, wenn man dieſelben Summen und Differenzen in Parentheſen einſchließt.

Beyſpiel.

$$\left((a+d)\frac{a}{e}-(a-c)(m+n)\right)(p+q)$$

Dieſes heißt: die Summe der Zahlen a und d ſoll mit dem Quotienten $\frac{a}{e}$ multiplicirt werden; von dieſem Producte muß man hierauf das Product aus der Differenz der

Zahl

Zahl c von a in die Summe der Zahlen m und n abziehen, und den Rest mit der Summe der Zahlen p und q multipliciren.

9. §. Willkührlicher Satz.

Man kann das Product aus mehreren Zahlen auch dadurch anzeigen, wenn man die Buchstaben, welche sie ausdrücken sollen, neben einander schreibet, ohne dazwischen das Multiplications-Zeichen ($\times$ oder .) zu setzen: wenn aber alle Factoren eines Products gleich sind; so kann man das Product noch kürzer anzeigen, wenn man den gemeinschaftlichen Factor nur einmahl schreibet, und rechter Hand darüber eine Zahl setzt, welche durch ihre Einheiten anzeigen soll, aus wievielen gleichen Factoren das Product bestehet.

Beyspiele.

Statt $a.b.c.d = a \times b \times c \times d$ schreibe man abcd; statt a.a setze man a^2; statt a.a.a setze man a^3; eben so sey $a.a.a.a = a^4$; $a.a.b.b.b = a^2 b^3$ u. s. f.

Zusatz.

Geschieht es also, daß man eine Zahl a in zween, drey, vier u. s. f. gleiche Factoren zu zerfällen hat; so wird dieses durch $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. angezeigt werden, daß allemal $a^{\frac{1}{2}}$ einer von den zweenen gleichen Factoren ist, in welche a zerlegt werden soll, und $a^{\frac{1}{3}}$ einer von den drey gleichen Factoren ist, in welche a zerfället wird, u. s. f.

10. §. Erklärungen.

Ein Product, welches aus lauter gleichen Factoren beſtehet (9. §.), heißt eine Potenz oder Dignität eines jeden Factors, und nun hängt die Benennung der Potenz von der Anzahl der gleichen Factoren ab, welche Zahl der Exponent der Potenz heißt: man nennt nämlich das Product $a.a = a^2$ aus zween gleichen Factoren a die zweyte Potenz oder das Quadrat von a, und der Exponent davon iſt 2; ferner heißt das Product $a.a.a = a^3$ aus drey gleichen Factoren a die dritte Potenz oder der Cubus von a, und der zugehörige Exponent iſt 3; Eben ſo iſt $a.a.a.a = a^4$ die vierte, $a.a.a.a.a = a^5$ die fünfte u. ſ. f. Potenz von a, und es iſt 4 der Exponent der vierten, 5 aber der Exponent der fünften Potenz. Weil man aber jede Zahl mit einem einzigen Buchſtaben m oder n, oder r, oder einem andern bezeichnen kann; ſo wird auch ein Product $aaa\cdots a$, welches aus einer unbeſtimmten Anzahl m von gleichen Factoren a beſtehen ſoll, auch durch a^m ausgedrückt, und eine unbeſtimmte *m*te Potenz von a genannt werden können.

Anmerkung.

Jede *m*te Potenz einer Summe oder Differenz mehrerer Zahlen, wie $a+b$ oder $a-b$, wird angezeigt, wenn man dieſe in einer Parentheſe einſchließt, und rechter Hand darüber den Exponent m derſelben Potenz ſchreibet, wie $(a+b)^m$ und $(a-b)^m$: z. B. $(a+b)^3$ iſt die dritte Potenz von $a+b$.

1. Zu-

1. Zusatz.

Weil $a^2 = a.a = 1.a.a$; $a^3 = aaa = 1.a.a.a$; $a^4 = aaaa = 1.a.a.a.a$, u. s. f. ist; und überhaupt $a^m = a\,a\,a \ldots a = 1.a.a.a \ldots .a$ seyn muß, wo a *m*mahl vorkömmt; so bedeutet der Exponent m jeder *m*ten Potenz von a nichts anders, als daß die Einheit so oft mit der Zahl a multiplicirt ist, wie oft Eins im Exponenten m steckt, oder daß die Zahl a sovielmahl, weniger einmahl, mit sich selbst multiplicirt ist, wie vielmahl Eins im Exponenten m derselben Potenz von a steckt.

2. Zusatz.

Will man demnach eine gewisse Potenz einer gegebenen Zahl finden; so multiplicire man dieselbe Zahl mit sich selbst so oft, weniger einmal, wie oft Eins in dem Exponenten der verlangten Potenz enthalten ist: man findet nämlich jede *m*te Potenz von a, wenn man a mit a $(m-1)$mahl multiplicirt.

Es ist z. B. die zweyte, dritte und vierte Potenz von 5, wie folgt, groß: $5^2 = 5.5 = 25$; $5^3 = 5.5.5 = 25.5 = 125$; $5^4 = 5.5.5.5 = 125.5 = 625$.

Man mag also die Einheit auf was immer für eine Potenz erheben; so ist doch jede Potenz davon die Einheit selbst: nämlich $1.1.1 \ldots 1 = 1$.

3. Zusatz.

Die Einheit *m*mahl mit a multipliciren, und sie *m*mahl mit a dividiren sind entgegengesetzte Bedingungen

(2. §.): also ist auch $\frac{1}{aaa\ldots a}$ das Entgegengesetzte von $1.aaa\ldots a$, wenn bey jeder für sich genommenen Bezeichnung a *m*mahl vorkömmt: so wie daher $1 \times aaa\ldots a$ durch a^m angezeigt wird, eben so kann man $\frac{1}{aaa\ldots a} = \frac{1}{a^m}$ durch a^{-m} mit Recht anzeigen (4. §.). Bey einer Bezeichnung wie a^{-m} müßte nämlich der Exponent $-m$ durch seine Einheiten anzeigen, wie oft Eins mit a multiplicirt ist (9. 10. §.); da also in $-m$ nicht die Einheit selbst, sondern das ihr Entgegengesetzte *m*mahl steckt (4. §. Zus.); so wird auch $-m$ bey a^{-m}, den bisher gemachten Voraussetzungen gemäß, anzeigen müssen, daß Eins durch a nicht *m*mahl multiplicirt, sondern dividirt ist.

4. Zusatz.

Zwischen $+1$ und -1 liegt 0: so wie daher bey a^1 oder a die Einheit einmahl mit a multiplicirt, und bey a^{-1} dieselbe einmahl mit a dividirt ist (1. 3. Zus.), eben so ist bey a^0 die Einheit mit a weder multiplicirt noch dividirt, sondern ungeändert gelassen, das heißt: wenn man sich bey a^0 durch 0 einen Exponent, und durch a^0 eine Potenz von a denken will; so muß man allemahl $a^0 = 1$ setzen.

5. Zusatz.

Weil $ba^{-m} = b.a^{-m}$ (9. §.) $= b.\frac{1}{a^m}$ (3. Zus.) $= \frac{b}{a^m}$ ist; so sind die Bezeichnungen wie ba^{-m} und $\frac{b}{a^m}$ gleichgültig.

Eben

Eben so ist $b a^{m} = \frac{b}{a^{-m}}$: denn es ist $\frac{b}{a^{-m}} = b.\frac{1}{a^{-m}}$ $= b:\frac{a^{-m}}{1} = b:\frac{1}{a^{m}}$ (3. Zus.) $= b.a^{m} = ba^{m}$.

6. Zusatz.

Es ist $a^{m} = aaa\cdots a$, und $a^{n} = aaa\cdots a$, so, daß a bey a^{m} *m*mahl und bey a^{n} *n*mahl vorkömmt: also kömmt a bey a^{m} und a^{n} zusammen $(m+n)$mahl (1. Zus.), folglich ist $a^{m}.a^{n} = aaa\cdots aaaa\cdots a = a^{m+n}$ (9. §.).

Daher ist $a^{m}.a = a^{m+1}$, folglich giebt das Product aus jeder Zahl a in jede *m*te Potenz von ihr eine um einen Grad höhere Potenz von a.

7. Zusatz.

Es ist allemahl $a^{m}:a^{n} = \frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$. Wenn nämlich $m > n$ um e ist: so muß $m = n+e$, und $e = m-n$ nach der gemeinen Rechenkunst seyn: also ist $\frac{a^{m}}{a^{n}} = \frac{a^{n+e}}{a^{n}}$ $= \frac{a^{n}.a^{e}}{a^{n}}$ (6. Zus.) $= a^{e} = a^{m-n}$.

Ist hingegen $n > m$ um r; so ist aus gleicher Ursache $n = m+r$ und $r = n-m$: also ist $\frac{a^{m}}{a^{n}} = \frac{a^{m}}{a^{m+r}} = \frac{a^{m}}{a^{m}.a^{r}}$ (6. Zus.) $= \frac{1}{a^{r}} = a^{-r}$ (3. Zus.) $= a^{-(n-m)} = a^{m-n}$ (5. §.).

Ist endlich $m = n$ so hat man $\frac{a^{m}}{a^{n}} = \frac{a^{n}}{a^{n}} = 1 = a^{0}$ (4. Zus.) $= a^{m-n}$.

8. Zus

8. Zuſatz.

Daher iſt $a^n . a^{-m} = a^n . \frac{1}{a^m}$ (3. Zuſ.) $= \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (7. Zuſ.): und $a^{-n} . a^{-m} = \frac{1}{a^n} . \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^n . a^m} = \frac{1}{a^{n+m}}$ (6. Zuſ.) $= a^{-(n+m)}$ (3. Zuſ.) $= a^{-n-m}$ (5. §.).

9. Zuſatz.

Das Product aus zwoen Potenzen einer Zahl a iſt ebenfalls eine Potenz von a, welche die Summe der Exponenten jener Potenzen zu ihrem Exponent hat, es mögen jene Exponenten beyde bejaht, oder verneint, oder es mag einer von ihnen bejaht, und der andere verneint ſeyn.

10. Zuſatz.

Es iſt ferner $a^n : a^{-m} = a^n : \frac{1}{a^m}$ (3. Zuſ.) $= a^n . a^m = a^{n+m}$ (6. Zuſ.) $= a^{n-(-m)}$ (5. §.): und $a^{-n} : a^m = \frac{1}{a^n} : a^m$ (3. Zuſ.) $= \frac{1}{a^n . a^m} = \frac{1}{a^{n+m}}$ (6. Zuſ.) $= a^{-(n+m)}$ (3. Zuſ.) $= a^{-n-m}$ (5. §.); und $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m} : \frac{1}{a^n}$ (3. Zuſ.) $= a^{-m} . a^n = a^{-m+n}$ (8. Zuſ.) $= a^{-m-(-n)}$ (5. §.).

11. Zuſatz.

Wenn man eine Potenz von einer Zahl a durch eine andere Potenz von a zu dividiren hat; ſo wird der Quotient ebenfalls eine Potenz von a ſeyn, deren Exponent entſtehet, wenn

wenn man den Exponent des Diviſors vom Exponent des Dividendus abziehet, es mögen dieſe Exponenten gleich oder ungleich, beyde bejaht oder verneint, oder es mag einer von ihnen bejaht, und der andere verneint ſeyn. (7. 10. Zuſ.)

12. Zuſatz.

Wenn man einen Bruch $\frac{a}{b}$ auf eine Potenz m erheben will; ſo muß man ein Product aus m gleichen Factoren wie $\frac{a}{b}$ nehmen, (2. Zuſ.): alſo iſt eine ſolche Potenz $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}$, wo nun $\frac{a}{b}$ *m*mahl vorkömmt; daher iſt $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a.a.a \ldots a}{b.b.b \ldots b} = \frac{a^m}{b^m}$ (9. 10. §.).

Das heißt: die *m*te Potenz eines Bruches $\frac{a}{b}$ wird gefunden, wenn man die *m*te Potenz des Zählers durch die *m*te Potenz des Nenners dividirt.

Z. B. Die dritte Potenz von $\frac{2}{5}$ iſt $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2.2.2}{5.5.5} = \frac{8}{125}$.

13. Zuſatz.

Jede Potenz eines ächten Bruches iſt ein ächter Bruch und zwar von einem deſto kleineren Werthe, je höher die Potenz iſt: hingegen iſt jede Potenz eines unächten Bruches auch ein unächter Bruch, und zwar von einem deſto gröſſeren Werthe, je höher die Potenz iſt.

14. Zuſatz.

Die *n*te Potenz von a^m iſt $a^m.a^m.a^m.\cdots.a^m$, wo a^m *n*mahl vorhanden ſeyn muß (2. Zuſ.): alſo iſt dieſelbe Potenz $(a^m)^n = a^{m+m+m\cdots+m}$ (6. Zuſ.) $= a^{m.n}$, weil $m+m+m+\cdots+m$ ſoviel als m *n*mahl genommen heißt, oder es iſt $(a^m)^n = a^{mn}$ (9. §.).

15. Zuſatz.

Und nun iſt $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n$ (3. Zuſ.) $= \frac{1^n}{a^{mn}}$ (12. 14. Zuſ.) $= \frac{1}{a^{mn}}$ (2. Zuſ.) $= a^{-mn}$ (3. Zuſ.). Hieraus und aus (14. Zuſ.) erhellet demnach, daß man die *n*te Potenz von einer gegebenen Potenz a^m oder a^{-m}, die daher einen bejahten oder verneinten Exponent hat, allemahl findet, wofern man den Exponent der gegebenen Potenz mit dem Exponent der verlangten Potenz multiplicirt.

Z. B. Die dritte Potenz von a^2 iſt $a^{2.3} = a^6$; denn es iſt $(a^2)^3 = a^2.a^2.a^2$ (2. Zuſ.) $= a^{2+2+2} = a^6$. Und die dritte Potenz von a^{-2} iſt ebenfalls $= a^{-2.3} = a^{-6}$; denn es iſt $(a^{-2})^3 = a^{-2}.a^{-2}.a^{-2} = a^{-2-2-2} = a^{-6}$.

16. Zuſatz.

Wenn abc···p ein Product aus Factoren a, b, c···p bedeutet (9. §.); ſo wird jede *n*te Potenz von ihm aus n gleichen Factoren wie abc···p ſeyn müſſen (1. Zuſ.), folglich wird ſie ein Product ſeyn, wo jeder Factor a, b, c···p *n*mahl vorkommen muß: alſo iſt $(abc\cdots p)^n = a^n b^n c^n \cdots p^n$ (1. Zuſ.) ein Product aus *n*ten Potenzen aller Factoren a, b, c···p.

Z. B.

Z. B. Die dritte Potenz von abc ist $(abc)^3 = a^3b^3c^3$; denn es ist aus (2. Zus.) $(abc)^3 = abc.abc.abc = aaabbbccc$ (9. §.) $= a^3b^3c^3$ (9. §.).

11. §. Erklärungen.

Die Wurzel einer Zahl A heißt eine Zahl a, welche einigemahl mit sich selbst multiplicirt die Zahl A zum Product giebt, welche Zahl daher eine Potenz von a seyn muß (10. §.). So ist z. B. a eine Wurzel von a^2, weil a einmahl mit sich selbst multiplicirt a^2 zum Product giebt.

Die Wurzelordnungen hängen von denjenigen Zahlen ab, welche durch ihre Einheiten anzeigen, wie oft die Wurzel a durch die Multiplication genommen werden muß, wenn daraus die Zahl A entstehen soll, wovon a die Wurzel ist, und eben diese Zahlen heißen die Wurzelexponenten: daher ist a die zweyte, dritte, vierte und überhaupt die *m*te Wurzel von A, wenn zween, drey, vier, und überhaupt m gleiche Factoren, derer jeder $= a$ ist, die Zahl A zum Product geben, und dann sind 2, 3, 4 ... m die Exponenten derselben Wurzeln: die zweyte und dritte Wurzel werden auch die Quadrat- und Cubik-Wurzel von A genannt.

1. Zusatz.

Eine z. B. *m*te Wurzel a von einer gegebenen Zahl A finden, heißt daher soviel, als A für die *m*te Potenz von a halten, folglich A in m gleiche Factoren zerfällen (10. §.), und einen davon für die *m*te Wurzel von A nehmen. Daher

her ist jede Wurzel von Eins die Einheit selbst, so wie es jede Potenz war (10. §. 2. Zus.).

12. §. Willkührlicher Satz.

Das Wurzelzeichen ist $\sqrt{}$, welches allemahl der Zahl vorangesetzt wird, deren Wurzel angezeigt werden soll: es muß darüber der Wurzelexponent stehen, die Quadratwurzel ausgenommen, deren Exponent $= 2$ Kürze halber weggelassen wird.

Z. B. Die Quadratwurzel von a wird durch $\sqrt[2]{a}$ oder schlechtweg durch $\sqrt{a}$ angedeutet; eben so sind $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[5]{a}$ - - - $\sqrt[n]{a}$ die dritte, vierte, fünfte - - - nte Wurzel von a.

Anmerkung.

Wenn die Grösse, wovon die Wurzel angezeigt werden soll, die Summe oder Differenz mehrerer Zahlen ist; so muß man diese in eine Parenthese einschließen. Z. B. Die nte Wurzel von $a+b$ wird man so anzeigen, $\sqrt[n]{(a+b)}$: denn schriebe man $\sqrt[n]{a+b}$; so würde dieses nicht die nte Wurzel von der Summe $a+b$, sondern die Summe der nten Wurzel von a und der Zahl b bedeuten. Eine ähnliche Vorsichtigkeit muß man bey der Bezeichnung der Wurzeln gebrochener Zahlen brauchen: z. B. $\frac{\sqrt[n]{a}}{b}$ heißt die nte Wurzel von a durch b dividirt; $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$ ist a durch die nte Wurzel von b dividirt; und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ist die nte Wurzel des Bruches $\frac{a}{b}$.

13. §.

13. §. Erklärungen.

Die unter dem Wurzelzeichen ($\sqrt{}$) stehende Zahl (12. §.) heißt die **Wurzelgröße**: **gleichnahmichte Potenzen und Wurzeln** können diejenigen genannt werden, die einerley Zahlen zu ihren Exponenten (10. 11. §.) haben: z. B. a^m und b^m sind gleichnahmichte Potenzen von a und b; $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$ sind gleichnahmichte Wurzeln von a und b.

14. §. Grundsätze.

Es sind Sätze, derer Richtigkeit unmittelbar auf den Begriffen (10. 11. 13. §.), und den bekannten Grundsätzen der Multiplication beruhen; sie können daher hier ohne allen ferneren Beweis angeführt werden, so, wie man sich derselben bey der vorhergehenden Lehre oft bedient hat, ohne daß von ihnen die geringste Meldung geschah.

I. **Wenn zwo Zahlen** a **und** b **gleich sind; so müssen auch alle gleichnahmichte Potenzen und Wurzeln von ihnen gleich seyn: ist aber** $a \gtrless b$, **so muß auch jede Wurzel und Potenz von** a **gröſſer seyn, als die gleichnahmichte Wurzel und Potenz von** b **ist.**

Z. B. Aus $A = B + C$ folgt $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{(B+C)}$, oder $A^n = (B+C)^n$; und aus $A + B > B$ folgt $\sqrt[n]{(A+B)} > \sqrt[n]{B}$ und $(A+B)^n > B^n$.

II. **Wenn man eine gewisse Zahl** a **auf was immer für eine** m**te Potenz erhebt, und von dieser Po-**

(2. §.): alſo iſt auch $\frac{1}{aaa\cdots a}$ das Entgegengeſetzte von $1.aaa\cdots a$, wenn bey jeder für ſich genommenen Bezeichnung a *m*mahl vorkömmt: ſo wie daher $1 \times aaa\cdots a$ durch a^m angezeigt wird, eben ſo kann man $\frac{1}{aaa\cdots a} = \frac{1}{a^m}$ durch a^{-m} mit Recht anzeigen (4. §.). Bey einer Bezeichnung wie a^{-m} müßte nämlich der Exponent $-m$ durch ſeine Einheiten anzeigen, wie oft Eins mit a multiplicirt iſt (9. 10. §.); da alſo in $-m$ nicht die Einheit ſelbſt, ſondern das ihr Entgegengeſetzte *m*mahl ſtecket (4. §. Zuſ.); ſo wird auch $-m$ bey a^{-m}, den bisher gemachten Vorausſetzungen gemäß, anzeigen müſſen, daß Eins durch a nicht *m*mahl multiplicirt, ſondern dividirt iſt.

4. Zuſatz.

Zwiſchen $+1$ und -1 liegt 0; ſo wie daher bey a^1 oder a die Einheit einmahl mit a multiplicirt, und bey a^{-1} dieſelbe einmahl mit a dividirt iſt (1. 3. Zuſ.), eben ſo iſt bey a^0 die Einheit mit a weder multiplicirt noch dividirt, ſondern ungeändert gelaſſen, das heißt: wenn man ſich bey a^0 durch 0 einen Exponent, und durch a^0 eine Potenz von a denken will; ſo muß man allemahl $a^0 = 1$ ſetzen.

5. Zuſatz.

Weil $ba^{-m} = b.a^{-m}$ (9. §.) $= b.\frac{1}{a^m}$ (3. Zuſ.) $= \frac{b}{a^m}$ iſt; ſo ſind die Bezeichnungen wie ba^{-m} und $\frac{b}{a^m}$ gleichgültig.

Eben

Eben so ist $ba^{-m} = \frac{b}{a^{-m}}$: denn es ist $\frac{b}{a^{-m}} = b.\frac{1}{a^{-m}}$ $= b:\frac{a^{-m}}{1} = b:\frac{1}{a^m}$ (3. Zus.) $= b.a^m = ba^m$.

6. Zusatz.

Es ist $a^m = aaa\cdots a$, und $a^n = aaa\cdots a$, so, daß a bey a^m *m*mahl und bey a^n *n*mahl vorkömmt: also kömmt a bey a^m und a^n zusammen $(m+n)$mahl (1. Zus.), folglich ist $a^m.a^n = aaa\cdots aaaa\cdots a = a^{m+n}$ (9. §.).

Daher ist $a^m.a = a^{m+1}$, folglich giebt das Product aus jeder Zahl a in jede *m*te Potenz von ihr eine um einen Grad höhere Potenz von a.

7. Zusatz.

Es ist allemahl $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Wenn nämlich $m > n$ um e ist: so muß $m = n+e$, und $e = m-n$ nach der gemeinen Rechenkunst seyn: also ist $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{n+e}}{a^n}$ $= \frac{a^n.a^e}{a^n}$ (6. Zus.) $= a^e = a^{m-n}$.

Ist hingegen $n > m$ um r; so ist aus gleicher Ursache $n = m+r$ und $r = n-m$: also ist $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+r}} = \frac{a^m}{a^m.a^r}$ (6. Zus.) $= \frac{1}{a^r} = a^{-r}$ (3. Zus.) $= a^{-(n-m)} = a^{m-n}$ (5. §.).

Ist endlich $m = n$ so hat man $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0$ (4. Zus.) $= a^{m-n}$.

8. Zus

8. Zuſatz.

Daher iſt $a^n . a^{-m} = a^n . \frac{1}{a^m}$ (8. Zuſ.) $= \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (7. Zuſ.): und $a^{-n} . a^{-m} = \frac{1}{a^n} . \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^n . a^m} = \frac{1}{a^{n+m}}$ (6. Zuſ.) $= a^{-(n+m)}$ (3. Zuſ.) $= a^{-n-m}$ (5. §.).

9. Zuſatz.

Das Product aus zwoen Potenzen einer Zahl a iſt ebenfalls eine Potenz von a, welche die Summe der Exponenten jener Potenzen zu ihrem Exponent hat, es mögen jene Exponenten beyde bejaht, oder verneint, oder es mag einer von ihnen bejaht, und der andere verneint ſeyn.

10. Zuſatz.

Es iſt ferner $a^n : a^{-m} = a^n : \frac{1}{a^m}$ (3. Zuſ.) $= a^n . a^m = a^{n+m}$ (6. Zuſ.) $= a^{n-(-m)}$ (5. §.): und $a^{-n} : a^m = \frac{1}{a^n} : a^m$ (3. Zuſ.) $= \frac{1}{a^n . a^m} = \frac{1}{a^{n+m}}$ (6. Zuſ.) $= a^{-(n+m)}$ (3. Zuſ.) $= a^{-n-m}$ (5. §.); und $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m} : \frac{1}{a^n}$ (3. Zuſ.) $= a^{-m} . a^n = a^{-m+n}$ (8. Zuſ.) $= a^{-m-(-n)}$ (5. §.).

11. Zuſatz.

Wenn man eine Potenz von einer Zahl a durch eine andere Potenz von a zu dividiren hat; ſo wird der Quotient ebenfalls eine Potenz von a ſeyn, deren Exponent entſtehet, wenn

wenn man den Exponent des Divisors vom Exponent des Dividendus abziehet, es mögen diese Exponenten gleich oder ungleich, beyde bejaht oder verneint, oder es mag einer von ihnen bejaht, und der andere verneint seyn. (7. 10. Zus.)

12. Zusatz.

Wenn man einen Bruch $\frac{a}{b}$ auf eine Potenz m erheben will; so muß man ein Product aus m gleichen Factoren wie $\frac{a}{b}$ nehmen, (2. Zus.): also ist eine solche Potenz $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}$, wo nun $\frac{a}{b}$ *m*mahl vorkömmt; daher ist $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a.a.a \ldots a}{b.b.b \ldots b} = \frac{a^m}{b^m}$ (9. 10. §.).

Das heißt: die *m*te Potenz eines Bruches $\frac{a}{b}$ wird gefunden, wenn man die *m*te Potenz des Zählers durch die *m*te Potenz des Nenners dividirt.

Z. B. Die dritte Potenz von $\frac{2}{5}$ ist $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2.2.2}{5.5.5} = \frac{8}{125}$.

13. Zusatz.

Jede Potenz eines ächten Bruches ist ein ächter Bruch und zwar von einem desto kleineren Werthe, je höher die Potenz ist: hingegen ist jede Potenz eines unächten Bruches auch ein unächter Bruch, und zwar von einem desto gröſseren Werthe, je höher die Potenz ist.

14. Zusatz.

Die nte Potenz von a^m ist $a^m . a^m . a^m \ldots a^m$, wo a^m nmahl vorhanden seyn muß (2. Zus.): also ist dieselbe Potenz $(a^m)^n = a^{m+m+m\ldots+m}$ (6. Zus.) $= a^{m \cdot n}$, weil $m+m+m+\ldots+m$ soviel als m nmahl genommen heißt, oder es ist $(a^m)^n = a^{mn}$ (9. §.).

15. Zusatz.

Und nun ist $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n$ (3. Zus.) $= \frac{1^n}{a^{mn}}$ (12. 14. Zus.) $= \frac{1}{a^{mn}}$ (2. Zus.) $= a^{-mn}$ (3. Zus.). Hieraus und aus (14. Zus.) erhellet demnach, daß man die nte Potenz von einer gegebenen Potenz a^m oder a^{-m}, die daher einen bejahten oder verneinten Exponent hat, allemahl findet, wofern man den Exponent der gegebenen Potenz mit dem Exponent der verlangten Potenz multiplicirt.

Z. B. Die dritte Potenz von a^2 ist $a^{2 \cdot 3} = a^6$; denn es ist $(a^2)^3 = a^2 . a^2 . a^2$ (2. Zus.) $= a^{2+2+2} = a^6$. Und die dritte Potenz von a^{-2} ist ebenfalls $= a^{-2 \cdot 3} = a^{-6}$; denn es ist $(a^{-2})^3 = a^{-2} . a^{-2} . a^{-2} = a^{-2-2-2} = a^{-6}$.

16. Zusatz.

Wenn abc---p ein Product aus Factoren a, b, c---p bedeutet (9. §.); so wird jede mte Potenz von ihm aus m gleichen Factoren wie abc---p seyn müssen (1. Zus.), folglich wird sie ein Product seyn, wo jeder Factor a, b, c---p mmahl vorkommen muß: also ist $(abc\ldots p)^m = a^m b^m c^m \ldots p^m$ (1. Zus.) ein Product aus mten Potenzen aller Factoren a, b, c---p.

Z. B.

Z. B. Die dritte Potenz von abc ist $(abc)^3 = a^3b^3c^3$; denn es ist aus (2. Zus.) $(abc)^3 = abc.abc.abc = aaabbbccc$ (9. §.) $= a^3b^3c^3$ (9. §.).

11. §. Erklärungen.

Die Wurzel einer Zahl A heißt eine Zahl a, welche einigemahl mit sich selbst multiplicirt die Zahl A zum Product giebt, welche Zahl daher eine Potenz von a seyn muß (10. §.). So ist z. B. a eine Wurzel von a^2, weil a einmahl mit sich selbst multiplicirt a^2 zum Product giebt.

Die Wurzelordnungen hängen von denjenigen Zahlen ab, welche durch ihre Einheiten anzeigen, wie oft die Wurzel a durch die Multiplication genommen werden muß, wenn daraus die Zahl A entstehen soll, wovon a die Wurzel ist, und eben diese Zahlen heißen die Wurzelexponenten: daher ist a die zweyte, dritte, vierte und überhaupt die *m*te Wurzel von A, wenn zween, drey, vier, und überhaupt m gleiche Factoren, derer jeder $= a$ ist, die Zahl A zum Product geben, und dann sind $2, 3, 4 \cdots m$ die Exponenten derselben Wurzeln: die zweyte und dritte Wurzel werden auch die Quadrat- und Cubik-Wurzel von A genannt.

1. Zusatz.

Eine z. B. *m*te Wurzel a von einer gegebenen Zahl A finden, heißt daher soviel, als A für die *m*te Potenz von a halten, folglich A in m gleiche Factoren zerfällen (10. §.), und einen davon für die *m*te Wurzel von A nehmen. Daher

her ist jede Wurzel von Eins die Einheit selbst, so wie es jede Potenz war (10. §. 2. Zus.).

12. §. Willkührlicher Satz.

Das Wurzelzeichen ist $\surd$, welches allemahl der Zahl vorangesetzt wird, deren Wurzel angezeigt werden soll: es muß darüber der Wurzelexponent stehen, die Quadratwurzel ausgenommen, deren Exponent $= 2$ Kürze halber weggelassen wird.

Z. B. Die Quadratwurzel von a wird durch $\sqrt[2]{a}$ oder schlechtweg durch $\surd a$ angedeutet; eben so sind $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[5]{a}$ ... $\sqrt[n]{a}$ die dritte, vierte, fünfte ... nte Wurzel von a.

Anmerkung.

Wenn die Grösse, wovon die Wurzel angezeigt werden soll, die Summe oder Differenz mehrerer Zahlen ist; so muß man diese in eine Parentheſe einschließen. Z. B. Die nte Wurzel von $a+b$ wird man so anzeigen, $\sqrt[n]{(a+b)}$: denn schriebe man $\sqrt[n]{a+b}$; so würde dieses nicht die nte Wurzel von der Summe $a+b$, sondern die Summe der nten Wurzel von a und der Zahl b bedeuten. Eine ähnliche Vorsichtigkeit muß man bey der Bezeichnung der Wurzeln gebrochener Zahlen brauchen: z. B. $\frac{\sqrt[n]{a}}{b}$ heißt die nte Wurzel von a durch b dividirt; $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$ ist a durch die nte Wurzel von b dividirt; und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ist die nte Wurzel des Bruches $\frac{a}{b}$.

13. §. Erklärungen.

Die unter dem Wurzelzeichen ($\sqrt{}$) stehende Zahl (12. §.) heißt die Wurzelgröſſe: gleichnahmichte Potenzen und Wurzeln können diejenigen genannt werden, die einerley Zahlen zu ihren Exponenten (10. 11. §.) haben: z. B. a^m und b^m sind gleichnahmichte Potenzen von a und b; $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$ sind gleichnahmichte Wurzeln von a und b.

14. §. Grundsätze.

Es sind Sätze, derer Richtigkeit unmittelbar auf den Begriffen (10. 11. 13. §.), und den bekannten Grundsätzen der Multiplication beruhen; sie können daher hier ohne allen ferneren Beweis angeführt werden, so, wie man sich derselben bey der vorhergehenden Lehre oft bedient hat, ohne daß von ihnen die geringste Meldung geschah.

I. Wenn zwo Zahlen *a* und *b* gleich sind; so müssen auch alle gleichnahmichte Potenzen und Wurzeln von ihnen gleich seyn: ist aber $a \gtrless b$, so muß auch jede Wurzel und Potenz von *a* gröſſer seyn, als die gleichnahmichte Wurzel und Potenz von *b* ist.

Z. B. Aus $A = B + C$ folgt $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{(B+C)}$, oder $A^n = (B+C)^n$; und aus $A + B > B$ folgt $\sqrt[n]{(A+B)} > \sqrt[n]{B}$ und $(A+B)^n > B^n$.

II. Wenn man eine gewisse Zahl *a* auf was immer für eine *m*te Potenz erhebt, und von dieser Po-

tenz die *m*te Wurzel ſucht, oder wenn man die *m*te Wurzel von *a* nimmt, und ſie alsdann auf die *m*te Potenz erhebt; ſo wird man am Ende allemahl die Zahl *a* ſelbſt erhalten. Das heißt: $\sqrt[m]{a^m} = a$ und $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$.

1. Zuſatz.

Es iſt $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$; und $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}$ (10. §. 12. Zuſ.) $= \frac{a}{b}$: alſo iſt auch $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n$, folglich auch $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ nach (I. Grundſ.). Das heißt: die *n*te Wurzel einer gebrochenen Zahl $\frac{a}{b}$ wird gefunden, wenn man die *n*te Wurzel des Zählers durch die *n*te Wurzel des Nenners dividirt.

2. Zuſatz.

Es iſt ferner $\left(\sqrt[n]{abc\cdots pq}\right)^n = abc\cdots pq$ (II. Grundſ.) und es iſt auch $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots\sqrt[n]{p}\sqrt[n]{q}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\cdots\left(\sqrt[n]{p}\right)^n\left(\sqrt[n]{q}\right)^n$ (10. §. 16. Zuſ.) $= abc\cdots pq$ (II. Grundſ.): alſo iſt auch $\left(\sqrt[n]{abc\cdots pq}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots\sqrt[n]{p}\sqrt[n]{q}\right)^n$, daher $\sqrt[n]{abc\cdots pq} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots\sqrt[n]{p}\sqrt[n]{q}$ (I. Grundſ.).

Das

Das heißt: die *n*te Wurzel eines Products $abc\cdots pq$ ist das Product aus den *n*ten Wurzeln seiner Factoren.

15. §. Lehrsatz.

Wenn m eine bejahte ganze Zahl ist; so kann der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ nichts anders als die *n*te Wurzel von a^m bedeuten: daher ist allemahl $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Beweis. 1) Es ist $a^{\frac{1}{n}}$ ein von den n gleichen Factoren, in welche a zerfällt werden kann (10. §. Zus.): also ist $a^{\frac{1}{n}}$ die *n*te Wurzel von a (11. §. Zus.), oder es ist $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

2) Zwischen den Bezeichnungen $a^{n\,m} = a^{n \cdot m}$ und $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m}$ ist kein anderer Unterschied, als daß n bey a^{nm} und $\frac{1}{n}$ bey $a^{\frac{m}{n}}$ *m*mahl genommen ist; so wie daher nm bey a^{nm} nichts anders bedeuten soll, als, daß a^n einer von den m gleichen Factoren ist, in welche a^{nm} zerlegt werden kann (9. 10. §. 14. Zus.) eben so muß $\frac{m}{n}$ bey $a^{\frac{m}{n}}$ nichts anders bedeuten, als daß $a^{\frac{1}{n}}$ einer von den m gleichen Factoren ist, in welche $a^{\frac{m}{n}}$ zerlegt werden kann, daher ist $a^{\frac{m}{n}}$ die *m*te Potenz von $a^{\frac{1}{n}}$ (10. §.), oder es ist aus

(n. 1.) $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\cdots\sqrt[n]{a}$
$= \sqrt[n]{aaa\cdots a}$, wo a *m*mahl vorkommen muß (14. §. 2. Zuſ.), $= \sqrt[n]{a^m}$, wegen (10. §.).

1. Zuſatz.

Daher iſt $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r$, nach (14. §. 1.) $= \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^m}\cdots\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m\, a^m\, a^m \cdots a^m}$ wo a^m *r*mahl vorkommen muß (10. und 14. §. 2. Zuſ.) und nun iſt $a^m a^m a^m \cdots a^m$ die *r*te Potenz von a^m (10. §.), daher $= a^{mr}$ (10. §. 14. Zuſ.): alſo iſt $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = \sqrt[n]{a^{m\,r}} = a^{\frac{mr}{n}} = a^{\frac{m}{n}.r}$.

2. Zuſatz.

Es iſt $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (10. §. 3. Zuſ.): alſo bedeutet $\frac{-m}{n}$ bey $a^{\frac{-m}{n}}$, daß $a^{\frac{-m}{n}}$ die *n*te Wurzel von $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ iſt, ſo wie $\frac{m}{n}$ bey $a^{\frac{m}{n}}$ bedeutete, daß $a^{\frac{m}{n}}$ die *n*te Wurzel von a^m iſt (Lehrſ.). Daher iſt $a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$
$= \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}}$ (14. §. 1. Zuſ.) $= \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

3. Zusatz.

Auch ist $a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{-m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}}$: denn es ist $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}}$

$= \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = 1 : \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}}$ (14. 1. Zus.) $= \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{1}} = \sqrt[n]{a^m}$

$= a^{\frac{m}{n}}$.

4. Zusatz.

Aus $a^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ folgt jede $r$te Potenz $\left(a^{\frac{-m}{n}}\right)^r =$

$\left(\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\right)^r$ nach (14. §. I.) $= \frac{1^r}{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r}$ (daselbst 1. Zusatz.)

$= \frac{1}{a^{\frac{mr}{n}}}$ (1. Zus.) $= a^{\frac{-mr}{n}}$ (2. Zus.) $= a^{\frac{-m}{n} \cdot r}$.

5. Zusatz.

Aus $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = a^{\frac{m}{n} \cdot r}$ (1. Zus.), und $\left(a^{\frac{-m}{n}}\right)^r =$

$a^{\frac{-m}{n} \cdot r}$ (4. Zus.) folgt, daß der Satz (10. §. 15. Zus.) auch alsdann wahr ist, wenn der Exponent der gegebenen Zahl ein bejahter oder verneinter Bruch ist.

6. Zusatz.

Es ist $\left(a^{\frac{m}{nr}}\right)^r = a^{\frac{mr}{nr}}$ (5. Zus.) $= a^{\frac{m}{n}}$; und auch $\left(\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}}\right)^r = a^{\frac{m}{n}}$ (14. §. II.): also muß seyn $\left(a^{\frac{m}{nr}}\right)^r =$

$\left(\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}}\right)^r$, daher $a^{\frac{m}{nr}} = a^{\frac{m}{n} : r} = \sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}}$ (14. §. I.).

7. Zusatz.

Ferner ist $a^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ (2. Zus.): also auch $\sqrt[r]{a^{\frac{-m}{n}}}$

$= \sqrt[r]{\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}}$ (14. §. 1.) $= \frac{\sqrt[r]{1}}{\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}}}$ (14. §. 1. Zus.) $= \frac{1}{a^{\frac{m}{nr}}}$

(6. Zus.) $= a^{\frac{-m}{nr}}$ (2. Zus.) $= a^{\frac{-m}{n:r}}$.

8. Zusatz.

Aus dem Lehrsatze und den Zusätzen (2. 6. 7.) folgt, daß man jede Wurzel von einer gegebenen Potenz findet, wenn man den Exponent derselben Potenz durch den Exponent der verlangten Wurzel dividirt, es mag der Exponent der Potenz eine ganze oder gebrochene bejahte oder verneinte Zahl seyn.

9. Zusatz.

Der Satz (10. §. 9. Zus.) gielt ferner auch für den Fall, wenn die Factoren gebrochene bejahte oder verneinte Exponenten haben, und für solche Exponenten muß auch der andere Satz (10. §. 11. Zus.) gelten, wofern solche der Divisor und Dividendus haben.

I.) Denn es sey ein Factor $a^{\frac{m}{n}}$ und ein anderer $a^{\frac{r}{s}}$; so hat man $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} \cdot a^{\frac{nr}{ns}} = \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{a^{nr}}$ (Lehrs.) $= \sqrt[ns]{a^{ms} \cdot a^{nr}}$ (14. §. 2. Zus.) $= \sqrt[ns]{a^{ms+nr}}$ (10. §. 6. Zus.) $= a^{\frac{ms+nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$.

II.) Eben

II.) Eben so ist $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} : a^{\frac{nr}{ns}} = \frac{\sqrt[ns]{a^{ms}}}{\sqrt[ns]{a^{nr}}} =$

$\sqrt[ns]{\frac{a^{ms}}{a^{nr}}}$ (14. §. 1. Zus.) $= \sqrt[ns]{a^{ms-nr}}$ (10. §. 7. Zusatz.)

$= a^{\frac{ms-nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$

III.) Also auch $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{-r}{s}} = a^{\frac{m}{n}} \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$ (2. Z.) $= \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$

aus (II.).

Und $a^{\frac{-m}{n}} . a^{\frac{-r}{s}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$ (2. Zus.) $= \frac{1}{a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{s}}}$

$= \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}}$ aus (I.) $= a^{\frac{-m}{n}-\frac{r}{s}}$ aus (2. Zus.).

IV.) Und $a^{\frac{-m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} : a^{\frac{r}{s}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{s}}} =$

$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}}$ aus (I.) $= a^{\frac{-m}{n}-\frac{r}{s}}$ (2. Zus.).

Auch $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{-r}{s}} = a^{\frac{m}{n}} : \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$

aus (I.) $= a^{\frac{m}{n}+(-\frac{r}{s})}$

Und $a^{\frac{-m}{n}} : a^{\frac{-r}{s}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} : \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{a^{\frac{r}{s}}}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{r}{s}-\frac{m}{n}}$ aus

(II.) $= a^{\frac{-m}{n}-(-\frac{r}{s})}$.

V.) Dieſes gielt endlich auch alsdann, wenn ein Factor eine ganze Zahl und der andere einen Bruch zum Exponenten hat, oder wenn dieſe Verſchiedenheit der Exponenten beym Diviſor und Dividendus zutrifft: denn man kann jeden ganzen Exponent e als einen gebrochenen $= \frac{e}{1}$ betrachten, und ſo jeden Fall auf einen von den Fällen (I. II. III. IV.) zurückführen.

16. §. Erklärung.

Wenn man was immer für eine Zahl, z. B. 8, mit einer andern durch einen Buchſtaben a ausgedrückten Zahl multipliciren will; ſo wird man das Product entweder wie a 8 oder 8 a nach (9. §.) ſchreiben: es iſt aber die Bezeichnung eines ſolchen Products mit 8 a bequemer, und a 8 könnte leicht mit der Bezeichnung a^8 einer Potenz von a verwechſelt werden: eine Zahl, wie 8 bey 8 a, heißt der Coefficient der Gröſſe, vor welcher ſie ſtehet, hier von a. Eben ſo iſt $8.a^2b^{-2} = 8a^2b^{-2}$, und nun iſt 8 der Coefficient von a^2b^{-2}.

17. §. Erklärungen.

Eine nach (9. 16. §.) bezeichnete Zahl, wie 3 a b oder $-4a^3c$, oder +a u. d. gl., wird eine einfache Gröſſe genannt: wenn aber mehr ſolche Gröſſen durch die Zeichen (+ —) unter einander verbunden werden; ſo entſtehet aus allen eine zuſammengeſetzte, oder vieltheilichte Gröſſe, deren Glieder eben die einfachen Gröſſen ſind, die unter

einander

einander verbunden werden, daher nennt man sie eine zweytheilichte, dreytheilichte, viertheilichte u. s. f. Gröſſe, nachdem sie aus zwey, drey, vier u. s. f. Gliedern bestehet. So ist z. B. $3ab - 8cd$ eine zweytheilichte, $3ab - 8cd - 5c$ eine dreytheilichte, Gröſſe, und ihre Glieder sind die einfachen Gröſſen $3ab$; $-8cd$ und $-5c$.

18. §. Erklärungen.

Zwo einfache Gröſſen (17. §.) heiſſen gleichartig, wenn sie aus einerley Buchstaben bestehen, die mit einerley Exponenten versehen sind, es mögen übrigens die Coefficienten und ihre Zeichen einerley oder verschieden seyn, wie $+a^2b^{-n}$ und $-5a^2b^{-n}$: wenn sie aber nicht einerley Buchstaben und Exponenten haben; so sind sie allemahl ungleichartig, wie a^3b und a^3b^2, oder a^3b und ab^3, oder $-3ab$ und $+5cd$ u. s. f.

19. §. Aufgabe.

Gröſſen, wie (17. §.) in eine Summe zu bringen.

Auflösung. Wenn einige gleichartige Gröſſen (18. §.) unter ihnen vorkommen; so kann man zwo solche Gröſſen allemahl in eine bringen, wenn man ihre Buchstaben mit eigenen Exponenten behält, und entweder die Coefficienten (16. §.) mit Beybehaltung ihres gemeinschaftlichen Zeichens (+ oder −) zusammen addirt, oder, wofern sie verschiedene Zeichen vor sich haben, den in sich kleineren Coefficient von dem gröſſeren abziehet, und das

Zeichen des gröſſeren Coefficienten behält: ſind hingegen ungleichartige Gröſſen da; ſo bleiben dieſe ungeändert, wie ſie gegeben werden.

Beyſpiele.

$4a^2b - 4a^2b = 0$; $8a^nc - 5a^nc = 3a^nc$; $-6a^nc + 5a^nc = -a^nc$;

$4a^2d + 3a^2d = 7a^2d$; $-5ac - 7ac = -12ac$

$3ab - 2ac = 3ab - 2ac$

$7a + 8c^nd - 7a + 3d - 5c^nd - 8d + g = 3c^nd - 5d + g$.

Beweis. Man kann jede nach (9. §.) bezeichnete Gröſſe mit einem einzigen Buchſtaben A bezeichnen, ſo, daß $A = a^n b^{-1}$ oder was immer für einer anderen Gröſſe gleich ſey; man kann auch jeden Coefficient, er mag ganz oder gebrochen ſeyn, mit m und einen andern mit n bezeichnen (16. §.): zwo gleichartige Gröſſen mit gleichen Zeichen können alſo $+mA$ und $+nA$ oder $-mA$ und $-nA$ heiſſen, und man kann ebenfalls zwo gleichartige mit ungleichen Zeichen verſehene Gröſſen durch $-nA$ und $+mA$ ausdrücken.

Die Summe zwoer ſolchen Gröſſen, wenn ſie gleiche Zeichen vor ſich führen, iſt demnach $mA + nA = m.A + n.A$ (16. §.) $= (m+n)A$, oder $-mA - nA = -A.m - A.n$ (16. und 6. §.) $= -A.(m+n) = -(m+n)A$ (6. §.).

Die Summe aber ſolcher Gröſſen, wenn ſie ungleiche Zeichen haben, iſt $mA - nA = m.A - n.A$ (16. §.) $= (m-n)A$, wo nun $m-n$ entweder $= 0$ iſt, wenn $m = n$, oder eine bejahte Zahl, wenn $m > n$, oder eine verneinte, wenn $m < n$ (3. §. 5. Zuſ.).

20. §. Aufgabe.

Grössen, wie (17. §.), von einander abzuziehen.

Auflösung. Man verwandle die Zeichen (+ —) bey der abzuziehenden Grösse in entgegengesetzte (— +), addire sie hierauf zu der Grösse, wovon der Abzug geschehen soll, nach (19. §.), wegen (5. §.).

Beyspiele.

$8a-(+5a)=8a-5a=3a$; $4a-(-8a)=4a+8a=12a$;

$A=5a+3a^nb-4c+8d-g$;

$B=5a+2a^nb-12c-4d+f$;

$$A-B=\begin{pmatrix}5a+3a^nb-4c+8d-g\\-5a-2a^nb+12c+4d-f\end{pmatrix}$$

oder $A-B=a^nb+8c+12d-f-g$.

21. §. Aufgabe.

Einfache Grössen, wie (17. §.), unter einander zu multiplicirem.

Auflösung. Nachdem sie einerley oder verschiedene Zeichen vor sich haben, nehme man für das Product das Zeichen (+) oder (—), und multiplicire hierauf ihre Coefficienten (16. §.); rechter Hand dieses Products aus den Coefficienten schreibe man endlich alle Buchstaben der beyden Factoren mit ihren eigenen Exponenten neben einander, nur alsdann, wenn beyde Factoren einerley Buchstaben haben, kann man die gemeinschaftlichen im Producte einmahl setzen, und ihre Exponenten addiren.

Bey-

Beyspiele.

$8a^2b.5cd = 40a^2bcd$; $-8a^2b.5a^2bc = -40a^4b^2c$;

$-8a^2b^5.-5ab^2c = 40a^3b^7c$; $\frac{5}{7}a^{-3}c.-7a^2c^{-3} =$

$-\frac{5.7}{7}a^{-1}c^{-2} = -5a^{-1}c^{-2}$;

$-\frac{3}{4}a^{n-\frac{2}{3}}b^{-m}c.\frac{2}{5}a^{-n+\frac{2}{3}}b^{2m}c^{-4} = -\frac{6}{20}b^mc^{-3}$.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung in Ansehung der Zeichen, welche die Producte bekommen müssen, erhellet aus (6. §.), das übrige aber erhellet so. Des einen Factors Coefficient kann m und des andern n heißen, wie (19. §.): man kann daher einen Factor durch mA und den andern durch nB ausdrücken, es mögen A und B was immer für Gröſſen bedeuten, wie $a^nbc\ldots$. Das Product ist also allemahl $mA.nB = mAnB = mnAB$ (9. §.), das heißt: nach dem Producte mn aus den Coefficienten der Factoren muß man alle in A und B befindlichen Buchstaben neben einander schreiben. Wenn aber a^n in A und a^m in B sich befindet; so kann man statt $a^n.a^m$ allemahl a^{n+m} setzen, nämlich den gemeinschaftlichen Buchstaben a einmahl schreiben, und die Exponenten n und m addiren, sie mögen ganze oder gebrochene bejahte oder verneinte Zahlen bedeuten (10. §. 9. Zus. 15. §. 9. Zus.).

Zusatz.

Man wird eine vieltheilichte Gröſſe (17. §.) mit einer einfachen oder mit einer andern vieltheilichten multipliciren, wenn

wenn man jedes Glied jener vieltheilichten Größe mit dieser einfachen, oder mit jedem Gliede dieser vieltheilichten besonders multipliciret, und die einzelnen Producte in eine Summe bringet, wofern dieses nach (19. §.) sich thun läßt.

Beyspiele.

$A = 4a^{\frac{2}{3}}b + 5a^{-2} - 6ab^{-\frac{4}{7}}$; $B = 3a^2b^{-3}c$;

$A.B = 12a^{\frac{2}{3}+2}b^{-3+1}c + 15a^{-2+2}b^{-3}c - 18a^{1+2}b^{-\frac{4}{7}-3}c$

oder $A.B = 12a^{\frac{8}{3}}b^{-2}c + 15b^{-3}c - 18a^3b^{-\frac{25}{7}}c$.

$A = 3a^4 - 8a^{-2}b + 5c$; $B = 2a^3b^2 - 4abc^2$;

$A.B = A.2a^3b^2 + A.(-4abc^2)$,

daher

$A.B = 6a^7b^2 - 16ab^3 + 10a^3b^2c - 12a^5bc^2 + 32a^{-1}b^3c^2 - 20abc^3$.

Anmerkung.

Beym letzten Beyspiele der vorhergehenden Auflösung der Aufgabe, und beym ersten des Zusatzes ist a einmahl im Producte weggefallen, indem man bey jenem Beyspiele $a^{n-\frac{2}{3}}.a^{-n+\frac{2}{3}} = a^0 = 1$, und bey diesem $a^{-2}.a^2 = a^0 = 1$ (10. §. 4. Zus.) gefunden haben würde. Wie oft nämlich eine gewisse Zahl A mit einer Potenz wie a^0 multiplicirt oder statt dessen dividirt ist, so oft kann man A allein statt Aa^0 und $\frac{A}{a^0}$ schreiben, indem auch $A.1$ und $\frac{A}{1} = A$ ist. Wenn aber a^0 allein stehet, z. B. wie in $b + a^0$; so muß man a^0 behalten, oder statt dessen Eins nehmen: denn es ist $b + a^0 = b + 1$ und $b - a^0 = b - 1$, wo $b + 1$ oder $b - 1$ gewiß was anders als b allein bedeutet.

22. §.

22. §. Aufgabe.

Eine einfache Gröſſe von der Art (17. §.) durch eine andere einfache zu dividiren.

Auflösung. 1) Für den Quotient nehme man das Zeichen (+) oder (−), nachdem der Diviſor und Dividendus einerley oder verſchiedene Zeichen haben.

2) Um den Coefficient des Quotienten zu finden dividire man den Coefficient des Dividendus durch des Diviſors ſeinen.

3) Wenn der Dividendus alle die Buchſtaben hat, die ſich im Diviſor befinden; ſo ſchreibe man die gemeinſchaftlichen Buchſtaben einmahl im Quotienten, und gebe ihnen diejenigen Zahlen für die Exponenten, welche erhalten werden, wenn man die Exponenten, die ihnen beym Diviſor zugehören, von den Exponenten abziehet, welche ſie im Dividendus haben.

4) Sind auſſerdem noch einige Buchſtaben im Dividendus vorhanden, welche der Diviſor nicht hat; ſo ſchreibe man dieſelbe mit ihren Exponenten im Quotienten neben einander.

5) Geſchieht es aber, daß auch der Diviſor einige Buchſtaben hat, welche im Dividendus nicht befindlich ſind; ſo wird die Diviſion nur angezeigt, da dann der Diviſor zum Nenner und der Dividendus zum Zähler des Bruches wird, welcher den verlangten Quotient ausdrücken ſoll, und nun wird man vielleicht dieſen Bruch auf die in der gemeinen Rechenkunſt bekannte Art reduciren können, wenn der Zähler und Nenner einige gemeinſchaftliche Factoren haben.

Beyspiele.

$8a^4b^3 : 4a^2b = 2a^{4-2}b^{3-1} = 2a^2b^2$; $-12a^5b : -3a^3 = +4a^{5-3}b = 4a^2b$;

$2a^3b^{-2}c : -3a^3b = -\frac{2}{3}a^{3-3}b^{-2-1}c = -\frac{2}{3}a^0b^{-3}c =$

$-\frac{2}{3}b^{-3}c$;

$-5a^{\frac{1}{2}}b^{-2}c : 7a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} = -\frac{5}{7}a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{-2-\frac{1}{3}}c =$

$-\frac{5}{7}ab^{-\frac{7}{3}}c$;

$3a^nb : 4c^md^r = \frac{3a^nb}{4c^md^r}$.

$8a^nb^4 : -4a^{n+1}b^2c = \frac{8a^nb^4}{-4a^{n+1}b^2c} = -2\frac{a^nb^4}{a^{n+1}b^2c}$

$= -2\frac{a^nb^2b^2}{a^nab^2c} = -\frac{2b^2}{ac}$.

Beweis. Die vorgeschriebene Regel für das Zeichen des Quotienten in (n. 1.) ist im (7. §.) erwiesen worden: die übrigen Regeln aber kann man so darthun.

Es sey der Dividendus $= ma^rc$, und der Divisor na^s, wo m und n die Coefficienten andeuten können, und die Exponenten r, s mögen ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahlen ausdrücken.

Nun ist $ma^rc = m.a^r.c$ und $na^s = n.a^s$ (16. §.): also ist

$\frac{ma^rc}{na^s} = \frac{m.a^rc}{n.a^s} = \frac{m}{n} \cdot \frac{a^r}{a^s} \cdot c = \frac{m}{n} \cdot a^{r-s} \cdot c$ (15. §.

9. Zus.

9. Zuſ. 10. §. 11. Zuſ.) $= \frac{m}{n} a^{r-s} c$, welches die Regeln (2. 3. 4.) giebt.

Die 5te Regel iſt deswegen richtig, weil ein ſolcher Diviſor ganz im Dividendus nicht ſtecken kann.

Zuſatz.

Es iſt zwar ein ſeltner Fall, daß man ſolche Diviſionen mit zuſammengeſetzten Größen vorzunehmen hat: wenn ſich aber ein ſolcher Fall ereignet; ſo muß man entweder den gegebenen einfachen Diviſor, oder ein gewiſſes Glied von ihm, wenn derſelbe auch zuſammengeſetzt iſt, wie der Dividendus, mit einem Gliede des Dividendus vergleichen, welches ſich durch den einfachen Diviſor oder durch das erwählte Glied von ihm nach den angeführten Regeln dividiren läßt; hierauf muß man das dadurch zu erhaltende Glied des Quotienten mit dem ganzen Diviſor multipliciren (21. §. Zuſ.), und das Product vom Dividendus abziehen (20. §.). Wenn nun ein Reſt übrig bleibt; ſo muß man damit den Diviſor auf gleiche Art vergleichen, wie man ihn mit dem Dividendus ſelbſt verglichen hatte, wodurch ein neues Glied für den Quotienten erhalten wird, welches man ebenfalls mit dem ganzen Diviſor multipliciren, und das Product vom erwähnten Reſte abziehen muß: bleibt noch ein Reſt übrig; ſo verfahre man damit auf gleiche Art, und wiederhole die Arbeit mit jedem neuen Reſte, welche man mit dem erſten vornehmen mußte, bis endlich nichts vom Dividendus übrig iſt.

Beyspiele.

I.

Divisor	Der ganze Dividendus D			der Quotient		
d	A	B	C	α	β	γ
$4a^2b^3$	$20a^5b^3$	$-12a^6b^3$	$+24a^3b^4$	$5a^3$	$-3a^4$	$+6ab$

Die Rechnung selbst.

Man suche $A:d=\alpha=5a^3$

und nun nehme man $\alpha.d=20a^5b^3$,

daher $D-\alpha.d=\overset{B}{-12a^6b^3}+\overset{C}{24a^3b^4}=R.$

Hierauf suche man $B:d=\beta=-3a^4$,

und nehme $\beta.d=\overset{C}{-12a^5b^3}$;

so ist $R=\beta.d=24a^3b^4$.

Endlich suche man $C:d=\gamma=6ab$,

und nehme $\gamma.d=24a^3b^4$;

so ist $C-\gamma d=0$.

II.

Divisor d		Der ganze Dividendus D				Der Quotient	
A	B	C	E	F	G	α	β
$2ac$	$-3a^2b$	$6a^5bc$	$-16a^3c^2$	$-9a^6b^2$	$+\underset{2+a^3bc}{24a^4c^2}$	$3a^4b$	$-8a^2c$

Die Rechnung selbst.

Man suche $C:A=\alpha=3a^4b$,

und nehme $\alpha.d=6a^5bc-9a^6b^2$;

so ist $D-\alpha.d=\overset{E}{-16a^3c^2}+\overset{G}{\underset{2+a^3bc}{24a^4c^2}}=R$

Hierauf suche man $E:A=\beta\quad-8a^2c$,

und nehme $d.\beta=-16a^3c^2+\underset{2+a^3bc}{24a^4c^2}$;

so ist $R-d.\beta=0$.

Anhang des Herausgebers.

23. §. Erklärungen.

Eine zusammengesetzte oder auch eine einfache Grösse (17. §.) pflegt man bisweilen in Ansehung einer gewissen darinn befindlichen Zahl zu betrachten, welche allenfalls durch einen Buchstaben ausgedrückt ist, und dann heißt sie eine Function von dieser Zahl: man kann z. B. die Grösse a^2bx^3 eine Function von x nennen, und eben so kann $a^2bx^3 - c^3x^2 + pd^2x$ eine Function von x heißen. Gewöhnlich hat eine Zahl, wie hier x, von deren Function die Rede ist, keinen bestimmten Werth, weswegen sie auch eine veränderliche Grösse genannt wird, welche Benennung hier beybehalten wird. Die Coefficienten der Glieder einer Function heißen hier diejenigen Grössen, mit welchen die veränderliche Grösse, wovon die Function gegeben ist, oder einerley Potenzen der veränderlichen Grösse multiplicirt sind, auch ordnet man die Glieder einer Function so, daß einerley Potenzen der veränderlichen Grösse zu einem Gliede, und verschiedene Potenzen zu verschiedenen Gliedern gehören.

Z. B. Die Function $a^2bx^3 - c^3x^2 + pd^2x$ von x hat drey Glieder, welche drey verschiedene Potenzen von x enthalten; der Coefficient des ersten Gliedes oder von x^3 ist a^2b, der Coefficient des zweyten Gliedes, oder von x^2 ist $-c^3$, und der Coefficient des dritten Gliedes oder von x ist pd^2.

Wenn

Wenn demnach eine gewisse Potenz von x mit verschiedenen Grössen multiplicirt ist; so wird die Summe dieser Grössen der Coefficient derselben Potenz seyn, welche man so zu schreiben pflegt, daß dieselben Grössen in einer verticalen Linie unter einander zu stehen kommen.

Z. B. Die Function $5ax^4 - 3bx^2 + 8cx^3 + 2dx^2 - 5ex^3 - 3px^2$ scheint sechs Glieder zu haben; weil aber einerley Potenzen von x allemahl zu einem Gliede gehören, und hier nur drey verschiedene Potenzen von x gegeben sind; so bestehet diese Function eigentlich nur aus drey Gliedern, welche man so schreiben kann:

I. Glied. II. Glied. III. Glied.

$$5ax^4 + (2d - 3b - 3p)x^2 + (8c - 5e)x^3$$

oder $5ax^4 + \left.\begin{matrix} 2d \\ -3b \\ -3p \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 8c \\ -5e \end{matrix}\right\} x^3$

Und nun ist die Summe $2d - 3b - 3p$ der Coefficient von x^2 und $8c - 5e$ von x^3.

Will man hingegen die Glieder einer Function nach den Potenzen der veränderlichen Grösse ordnen; so muß die Function entweder von der höchsten Potenz oder von der niedrigsten anfangen, da dann im ersten Fall die nächst niedrigeren, im zweyten aber die nächst höheren Potenzen auf einander folgen müssen, so, daß das letzte Glied zur Rechten im ersten Fall die niedrigste, und im zweyten die höchste Potenz enthalten möge.

Z. B. Die oben angeführte Function, wohl geordnet, wird so aussehen:

$$\begin{matrix} 5ax^4 + 8c)x^3 + 2d)x^2 \\ \quad -5e) \quad -3b) \\ \qquad\qquad -3p) \end{matrix}$$

oder

$$\begin{matrix} 2d)x^2 + 8c)x^3 + 5ax^4 \\ -3b) \quad -5e) \\ -3p) \end{matrix}$$

Bey den folgenden Untersuchungen werden zwo Functionen von einerley veränderlichen Grösse x einerley Form haben, wenn sie, wohl geordnet, von ihren ersten Gliedern an, einerley Potenzen von x in einerley Gliedern enthalten, ob es gleich möglich ist, daß eine Function mehr, als die andere, Glieder habe.

Z. B. Die Functionen $1+Ax+Bx^2+Cx^3$ und $1+ax+bx^2+cx^3$ und $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5$ haben einerley Form; hingegen haben $1+Ax+Bx^3+Cx^4$ und $1+ax+bx^2+cx^4$ nicht einerley Form, weil das dritte Glied bey jener Function die dritte, und bey dieser die zweyte Potenz von x enthält.

24. §. Lehrsatz.

Das Product aus zwoen Functionen X und Z von der nachstehenden Form ist ebenfalls eine Function von x von einerley Form (23. §.).

$$X = 1+ax+bx^2+cx^3+\ldots+px^n$$
$$Z = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots+Px^m.$$

Beweis.

Beweis. Das Product aus dieſen Functionen iſt nach (21. §. Zuſ.)

$XZ = X + X.Ax + X.Bx^2 + X.Cx^3 + \cdots + X.Px^m$.

Nun iſt X eine von den gegebenen Functionen, worinn die Potenzen der veränderlichen Gröſſe x von $x^0 = 1$ an ſteigen; dieſe multiplicirt mit Ax giebt eine Function, wo die Potenzen der Gröſſe x von x^1 an ſteigen müſſen; eben die Function multiplicirt mit Bx^2 giebt eine Function, wo die Potenzen der Gröſſe x von x^2 an ſteigen u. ſ. f. giebt die Function X mit jedem folgenden Gliede der Function Z multiplicirt eine Function, worinn die Potenzen der Gröſſe x von eben der Potenz an ſteigen müſſen, die ſich in dem Gliede von Z befindet, womit die Multiplication geſchieht: alſo muß das Product XZ gewiß alle Potenzen der veränderlichen Gröſſe x von $x^0 = 1$ an bis x^{m+n}, welches $px^n . Px^m = pPx^{n+m}$ giebt, enthalten, ſo, daß daſſelbe Product wohl geordnet die nachſtehende Form haben muß, welche demnach mit der Form der gegebenen Functionen X und Z einerley iſt (2. 3. §.).

$XZ = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 \cdots + \mu x^{m+n}$.

1. Zuſatz.

Man mag ſoviel man will Functionen von der Form $1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots + px^m$ unter einander multipliciren: ſo wird das Product aus allen Functionen allemahl eine Function von eben der Form ſeyn.

2. Zuſatz.

Daher iſt jede *m*te Potenz von einer Function wie $1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\cdots+px^m$ eine Function von eben der Form (10. §.).

25. §. Aufgabe.

Den Quotient anzugeben, welchen 1 durch $1+z$ dividirt geben muß.

Auflöſung. Vermöge (22. §. Zuſ.) muß man den Quotient $\frac{1}{1+z}$ ſo ſuchen.

1) Das erſte Glied des Quotienten iſt $1:1=1$.

Dieſes mit dem Diviſor $1+z$ multiplicirt giebt $1+z$, und dieſes vom Dividendus 1 abgezogen giebt den Reſt $1-1-z=-z$.

2) Vergleicht man den Diviſor $1+z$ mit dem Reſt $-z$; ſo ergiebt ſich das zweyte Glied des Quotienten $=-z:1=-z$.

Multiplicirt man es mit dem Diviſor $1+z$; ſo iſt das Product $=-z-z^2$, und dieſes vom Reſte $-z$ abgezogen giebt den neuen Reſt $-z-(-z-z^2)=+z^2$.

3) Vergleichet man ferner den Diviſor $1+z$ mit dem erſt erhaltenen Reſt $+z^2$; ſo findet man des Quotienten drittes Glied $z^2:1=z^2$.

Multiplicirt man dieſes mit dem Diviſor $1+z$; ſo erhält man das Product $=z^2+z^3$, und dieſes vom Reſt z^2 abgezogen, giebt $z^2-(z^2+z^3)=-z^3$.

4) Ver-

4) Vergleichet man den Divisor $1+z$ auch mit dem Rest $-z^3$; so findet man das vierte Glied des Quotienten $= -z^3 : 1 = -z^3$.

Multiplicirt man damit den Divisor $1+z$; so ist das Product $= -z^3 - z^4$, und wenn man nun dieses vom Reste $-z^3$ abziehet; so findet man den neuen Rest $-z^3 - (-z^3 - z^4) = +z^4$.

5) Die bisher in (n. 1. 2. 3. 4.) erhaltenen Glieder des Quotienten, und die zugehörigen Reste sind also:

Die Glieder des Quotienten $1 - z + z^2 - z^3$

Die zugehörigen Reste $\quad -z + z^2 - z^3 + z^4$

6) Die Glieder des Quotienten in (n. 5.) richten sich nach diesem Gesetze: vom zweyten Gliede an folgen die Potenzen von z so auf einander, daß der Exponent von z in jedem Gliede um Eins kleiner ist, als die Zahl, welche anzeiget, das wievielte selbes Glied ist, ob es nämlich das zweyte, dritte, vierte u. s. f. ist, so, daß jede gerade Potenz von z, die nämlich 2, 4, 6, 8 u. s. f. zum Exponent hat, bejaht, und jede andere verneint ist.

7) Die Reste aber, welche bey der Bestimmung der Glieder erhalten werden (n. 5.), sind ebenfalls Potenzen von z, aber um einen Grad höhere, als die, welche die Glieder des Quotienten enthalten, bey deren Bestimmung sie erhalten werden, und zwar bejaht sind alle gerade Potenzen von z, verneint aber die übrigen.

8) Man nehme nun an, daß die Gesetze (n. 6. 7.) für eine gewisse Anzahl n von Gliedern des verlangten Quotienten

9. Zuſ. 10. §. 11. Zuſ.) $= \frac{m}{n} a^{r-s} c$, welches die Regeln (2. 3. 4.) giebt.

Die 5te Regel iſt deswegen richtig, weil ein ſolcher Diviſor ganz im Dividendus nicht ſtecken kann.

Zuſatz.

Es iſt zwar ein ſeltner Fall, daß man ſolche Diviſionen mit zuſammengeſetzten Gröſſen vorzunehmen hat: wenn ſich aber ein ſolcher Fall ereignet; ſo muß man entweder den gegebenen einfachen Diviſor, oder ein gewiſſes Glied von ihm, wenn derſelbe auch zuſammengeſetzt iſt, wie der Dividendus, mit einem Gliede des Dividendus vergleichen, welches ſich durch den einfachen Diviſor oder durch das erwählte Glied von ihm nach den angeführten Regeln dividiren läßt; hierauf muß man das dadurch zu erhaltende Glied des Quotienten mit dem ganzen Diviſor multipliciren (21. §. Zuſ.), und das Product vom Dividendus abziehen (20. §.). Wenn nun ein Reſt übrig bleibt; ſo muß man damit den Diviſor auf gleiche Art vergleichen, wie man ihn mit dem Dividendus ſelbſt verglichen hatte, wodurch ein neues Glied für den Quotienten erhalten wird, welches man ebenfalls mit dem ganzen Diviſor multipliciren, und das Product vom erwähnten Reſte abziehen muß: bleibt noch ein Reſt übrig; ſo verfahre man damit auf gleiche Art, und wiederhole die Arbeit mit jedem neuen Reſte, welche man mit dem erſten vornehmen mußte, bis endlich nichts vom Dividendus übrig iſt.

Beyspiele.

I.

Divisor	Der ganze Dividendus D			der Quotient		
d	A	B	C	α	β	γ
$4a^2b^3$	$20a^5b^3$	$-12a^6b^3$	$+24a^3b^4$	$5a^3$	$-3a^4$	$+6ab$

Die Rechnung selbst.

Man suche $A:d = \alpha = 5a^3$

und nun nehme man $\alpha.d = 20a^5b^3$,

daher $D - \alpha.d = \overset{B}{-12a^6b^3} + \overset{C}{24a^3b^4} = R$.

Hierauf suche man $B:d = \beta = -3a^4$,

und nehme $\beta.d = -12a^5b^3$;

so ist $R = \overset{C}{\beta.d = 24a^3b^4}$.

Endlich suche man $C:d = \gamma = 6ab$,

und nehme $\gamma.d = 24a^3b^4$;

so ist $C - \gamma d = 0$.

II.

Divisor d		Der ganze Dividendus D				Der Quotient	
A	B	C	E	F	G	α	β
aac	$-3a^2b$	$6a^5bc$	$-16a^3c^2$	$-9a^6b^2$	$+\underset{24a^4bc}{24a^4c^2}$	$3a^4b$	$-8a^2c$

Die Rechnung selbst.

Man suche $C:A = \alpha = 3a^4b$,

und nehme $\alpha.d = 6a^5bc - 9a^6b^2$;

so ist $D - \alpha.d = \overset{E}{-16a^3c^2} + \overset{G}{\underset{24a^4bc}{24a^4c^2}} = R$

Hierauf suche man $E:A = \beta \quad -8a^2c$,

und nehme $d.\beta = -16a^3c^2 + \underset{24a^4bc}{24a^4c^2}$;

so ist $R - d.\beta = 0$.

Anhang des Herausgebers.

23. §. Erklärungen.

Eine zusammengesetzte oder auch eine einfache Grösse (17. §.) pflegt man bisweilen in Ansehung einer gewissen darinn befindlichen Zahl zu betrachten, welche allenfalls durch einen Buchstaben ausgedrückt ist, und dann heißt sie eine Function von dieser Zahl: man kann z. B. die Grösse a^2bx^3 eine Function von x nennen, und eben so kann $a^2bx^3 - c^3x^2 + pd^2x$ eine Function von x heißen. Gewöhnlich hat eine Zahl, wie hier x, von deren Function die Rede ist, keinen bestimmten Werth, weswegen sie auch eine veränderliche Grösse genannt wird, welche Benennung hier beybehalten wird. Die Coefficienten der Glieder einer Function heißen hier diejenigen Grössen, mit welchen die veränderliche Grösse, wovon die Function gegeben ist, oder einerley Potenzen der veränderlichen Grösse multiplicirt sind, auch ordnet man die Glieder einer Function so, daß einerley Potenzen der veränderlichen Grösse zu einem Gliede, und verschiedene Potenzen zu verschiedenen Gliedern gehören.

Z. B. Die Function $a^2bx^3 - c^3x^2 + pd^2x$ von x hat drey Glieder, welche drey verschiedene Potenzen von x enthalten; der Coefficient des ersten Gliedes oder von x^3 ist a^2b, der Coefficient des zweyten Gliedes, oder von x^2 ist $-c^3$, und der Coefficient des dritten Gliedes oder von x ist pd^2.

Wenn

Wenn demnach eine gewisse Potenz von x mit verschiedenen Grössen multiplicirt ist; so wird die Summe dieser Grössen der Coefficient derselben Potenz seyn, welche man so zu schreiben pflegt, daß dieselben Grössen in einer verticalen Linie unter einander zu stehen kommen.

Z. B. Die Function $5ax^4 - 3bx^2 + 8cx^3 + 2dx^2 - 5ex^3 - 3px^2$ scheint sechs Glieder zu haben; weil aber einerley Potenzen von x allemahl zu einem Gliede gehören, und hier nur drey verschiedene Potenzen von x gegeben sind; so bestehet diese Function eigentlich nur aus drey Gliedern, welche man so schreiben kann:

I. Glied. II. Glied. III. Glied.

$$5ax^4 + (2d - 3b - 3p)x^2 + (8c - 5e)x^3$$

oder $5ax^4 + \left.\begin{matrix} 2d \\ -3b \\ -3p \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 8c \\ -5e \end{matrix}\right\} x^3$

Und nun ist die Summe $2d - 3b - 3p$ der Coefficient von x^2 und $8c - 5e$ von x^3.

Will man hingegen die Glieder einer Function nach den Potenzen der veränderlichen Grösse ordnen; so muß die Function entweder von der höchsten Potenz oder von der niedrigsten anfangen, da dann im ersten Fall die nächst niedrigeren, im zweyten aber die nächst höheren Potenzen auf einander folgen müssen, so, daß das letzte Glied zur Rechten im ersten Fall die niedrigste, und im zweyten die höchste Potenz enthalten möge.

Z. B. Die oben angeführte Function, wohl geordnet, wird so aussehen:

$$\begin{matrix} 5ax^4 + 8c)x^3 + 2d)x^2 \\ \quad -5e) \quad -3b) \\ \quad\quad\quad -3p) \end{matrix}$$

oder

$$\begin{matrix} 2d)x^2 + 8c)x^3 + 5ax^4 \\ -3b) \quad -5e) \\ -3p) \end{matrix}$$

Bey den folgenden Untersuchungen werden zwo Functionen von einerley veränderlichen Gröſſe x einerley Form haben, wenn sie, wohl geordnet, von ihren ersten Gliedern an, einerley Potenzen von x in einerley Gliedern enthalten, ob es gleich möglich ist, daß eine Function mehr, als die andere, Glieder habe.

Z. B. Die Functionen $1+Ax+Bx^2+Cx^3$ und $1+ax+bx^2+cx^3$ und $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5$ haben einerley Form; hingegen haben $1+Ax+Bx^3+Cx^4$ und $1+ax+bx^2+cx^4$ nicht einerley Form, weil das dritte Glied bey jener Function die dritte, und bey dieser die zweyte Potenz von x enthält.

24. §. Lehrsatz.

Das Product aus zwoen Functionen X und Z von der nachstehenden Form ist ebenfalls eine Function von x von einerley Form (23. §.).

$$X = 1+ax+bx^2+cx^3+\ldots+px^n$$
$$Z = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots+Px^m.$$

Beweis.

Beweis. Das Product aus dieſen Functionen iſt nach (21. §. Zuſ.)

$XZ = X + X.Ax + X.Bx^2 + X.Cx^3 + \cdots + X.Px^m.$

Nun iſt X eine von den gegebenen Functionen, worinn die Potenzen der veränderlichen Gröſſe x von $x^0 = 1$ an ſteigen; dieſe multiplicirt mit Ax giebt eine Function, wo die Potenzen der Gröſſe x von x^1 an ſteigen müſſen; eben die Function multiplicirt mit Bx^2 giebt eine Function, wo die Potenzen der Gröſſe x von x^2 an ſteigen u. ſ. f. giebt die Function X mit jedem folgenden Gliede der Function Z multiplicirt eine Function, worinn die Potenzen der Gröſſe x von eben der Potenz an ſteigen müſſen, die ſich in dem Gliede von Z befindet, womit die Multiplication geſchieht: alſo muß das Product XZ gewiß alle Potenzen der veränderlichen Gröſſe x von $x^0 = 1$ an bis x^{m+n}, welches px^n. $Px^m = pPx^{n+m}$ giebt, enthalten, ſo, daß daſſelbe Product wohl geordnet die nachſtehende Form haben muß, welche demnach mit der Form der gegebenen Functionen X und Z einerley iſt (2. 3. §.).

$XZ = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 \cdots\cdots + \mu x^{m+n}.$

1. Zuſatz.

Man mag ſoviel man will Functionen von der Form $1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots + px^m$ unter einander multiplicirt: ſo wird das Product aus allen Functionen allemahl eine Function von eben der Form ſeyn.

2. Zusatz.

Daher ist jede *m*te Potenz von einer Function wie $1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots+px^m$ eine Function von eben der Form (10. §.).

25. §. Aufgabe.

Den Quotient anzugeben, welchen 1 durch $1+z$ dividirt geben muß.

Auflösung. Vermöge (22. §. Zus.) muß man den Quotient $\frac{1}{1+z}$ so suchen.

1) Das erste Glied des Quotienten ist $1:1=1$.

Dieses mit dem Divisor $1+z$ multiplicirt giebt $1+z$, und dieses vom Dividendus 1 abgezogen giebt den Rest $1-1-z=-z$.

2) Vergleicht man den Divisor $1+z$ mit dem Rest $-z$; so ergiebt sich das zweyte Glied des Quotienten $=-z:1=-z$.

Multiplicirt man es mit dem Divisor $1+z$; so ist das Product $=-z-z^2$, und dieses vom Reste $-z$ abgezogen giebt den neuen Rest $-z-(-z-z^2)=+z^2$.

3) Vergleichet man ferner den Divisor $1+z$ mit dem erst erhaltenen Rest $+z^2$; so findet man des Quotienten drittes Glied $z^2:1=z^2$.

Multiplicirt man dieses mit dem Divisor $1+z$; so erhält man das Product $=z^2+z^3$, und dieses vom Rest z^2 abgezogen, giebt $z^2-(z^2+z^3)=-z^3$.

4) Ver-

4) Vergleichet man den Divisor $1+z$ auch mit dem Rest $-z^3$; so findet man das vierte Glied des Quotienten $= -z^3 : 1 = -z^3$.

Multiplicirt man damit den Divisor $1+z$; so ist das Product $= -z^3 - z^4$, und wenn man nun dieses vom Reste $-z^3$ abziehet; so findet man den neuen Rest $-z^3 - (-z^3 - z^4) = +z^4$.

5) Die bisher in (n. 1. 2. 3. 4.) erhaltenen Glieder des Quotienten, und die zugehörigen Reste sind also:

Die Glieder des Quotienten $1 - z + z^2 - z^3$

Die zugehörigen Reste $\quad -z + z^2 - z^3 + z^4$

6) Die Glieder des Quotienten in (n. 5.) richten sich nach diesem Gesetze: vom zweyten Gliede an folgen die Potenzen von z so auf einander, daß der Exponent von z in jedem Gliede um Eins kleiner ist, als die Zahl, welche anzeiget, das wievielte selbes Glied ist, ob es nämlich das zweyte, dritte, vierte u. s. f. ist, so, daß jede gerade Potenz von z, die nämlich 2, 4, 6, 8 u. s. f. zum Exponent hat, bejaht, und jede andere verneint ist.

7) Die Reste aber, welche bey der Bestimmung der Glieder erhalten werden (n. 5.), sind ebenfalls Potenzen von z, aber um einen Grad höhere, als die, welche die Glieder des Quotienten enthalten, bey deren Bestimmung sie erhalten werden, und zwar bejaht sind alle gerade Potenzen von z, verneint aber die übrigen.

8) Man nehme nun an, daß die Gesetze (n. 6. 7.) für eine gewisse Anzahl n von Gliedern des verlangten Quotienten

richtig sind; so muß das $n$te Glied desselben $\pm z^{n-1}$ seyn, und einen Rest $= \mp z^n$ zurücklassen, und nun giebt dieser Rest durch das erste Glied 1 des Divisors $1+z$ dividirt, das nächst folgende $(n+1)$te Glied $\mp z^n$ des Quotienten.

Offenbar ist es also, daß, wenn die Gesetze (n. 6. 7.) für was immer für eine Anzahl n von Gliedern des verlangten Quotienten gelten, sie auch für die um Eins grössere Anzahl von ihnen gelten müssen: da also dieselben Gesetze für 4 Glieder wirklich gelten, wegen (n. 5.); so müssen sie auch für $4+1$ oder 5 Glieder gelten, und wenn dieses wahr ist; so gelten die Gesetze auch für $5+1=6$ Glieder, u. s. f. für jede nächst grössere Anzahl von Gliedern.

9) Man kann daher den verlangten Quotienten auf die nachstehende Art angeben.

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + z^8 \cdots \pm z^n \mp z^{n+1} \pm \cdots$$

1. Zusatz.

Hätte man $\frac{1}{1-z}$ suchen sollen; so würde man alles, wie oben gefunden haben, mit dem Unterschiede nur, daß nun alle Potenzen von z, wie z, z^3, z^5, z^7 u. s. f. wie die übrigen z^2, z^4, z^6 u. s. f. bejaht wären, daher ist

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^4 + z^5 + z^6 + \cdots + z^n + \cdots$$

2. Zusatz.

Wenn man zwo Functionen von der Form (24. §.) durch einander dividirt; so muß der Quotient eine Function von eben der Form seyn.

Denn

Denn es sey $X = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$ und $Z = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$, oder $Z = 1 + z$, wenn man $z = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ setzt.

Nun ist $\frac{1}{Z} = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \ldots$; es war aber $z = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots = Ax\left(1 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}x^3 + \ldots\right)$, daher ist jede Potenz von z so groß als das Product aus gleichnahmichten Potenzen der Factoren Ax und $1 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}x^3 + \ldots$ (10. §. 16. Zus.), und jede Potenz dieses Factors ist eine Function von eben der Form (24. §. 2. Zus.): wenn man demnach die Werthe von z, z^2, $z^3 \ldots$ in $\frac{1}{Z} = \frac{1}{1+z}$ nähme; so müßte $\frac{1}{Z}$ alle Potenzen der Grösse x von $x^0 = 1$ an nach der Ordnung enthalten, folglich ist $\frac{1}{Z}$ eine Function von der Form, von welcher die Functionen X und Z sind.

Es ist ferner $\frac{X}{Z} = \frac{1}{Z} \times X$; also ist auch $\frac{X}{Z}$ eine Function von einerley Form (24. §.).

3. Zusatz.

Jede $m$te Potenz von $\frac{1}{1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots}$ ist eine Function von der Form des Nenners (2. Zus. und 24. §. 2. Zus.).

26. §. Lehrſatz.

Es iſt verſtattet jede *mte* Potenz von einer Function, wie $Z = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$, als eine Function von einerley Form $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots$ zu betrachten, daher $Z^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ zu ſetzen.

Beweis. 1) Wenn m eine bejahte ganze Zahl iſt; ſo erhellet der Satz aus (24. §. 2. Zuſ.). Iſt ferner m eine ganze verneinte Zahl $= -n$; ſo hat man $Z^{-n} = (1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots)^{-n} = \frac{1}{(1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots)^n}$ $= \left(\frac{1}{1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots}\right)^n$ und dieſe Potenz kann man gewiß einer Function $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ gleich ſetzen (25. §. 3. Zuſ.).

2) Iſt m eine bejahte gebrochene Zahl $= \frac{u}{v}$; ſo hat man $Z^m = Z^{\frac{u}{v}} = (1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots)^{\frac{u}{v}}$ $= \left((1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots)^{\frac{1}{v}}\right)^u$.

Es iſt $(1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots)^{\frac{1}{v}}$ nichts anders, als eine Function von x, welche $(v - 1)$mahl mit ſich ſelbſt multiplicirt die zwiſchen den Klammern befindliche Function zum Product geben muß (15. §.); da alſo eine Function $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$ von der Form der zwiſchen den Klammern befindlichen Function $(v - 1)$mahl mit ſich ſelbſt multiplicirt eine Function von eben der Form zum Product geben

geben muß (24. §. 2. Zuſ.); ſo läßt ſich mit Grund vermuthen, daß auch $(1+ax+bx^2+cx^3+\ldots)^{\frac{1}{\nu}}$ eine Function von der Form $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\ldots$ iſt, ob man gleich noch nicht wiſſen kann, wie die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ beſchaffen ſeyn müſſen, wenn dieſe Function $(\nu-1)$mahl mit ſich ſelbſt multiplicirt ein Product geben ſoll, welches der Function $1+ax+bx^2+cx^3+\ldots$ vollkommen gleich ſey.

Iſt aber $(1+ax+bx^2+cx^3+\ldots)^{\frac{1}{\nu}}$ von der Form der Function $1+ax+bx^2\ldots$ ſo muß es auch $\left((1+ax+bx^2+cx^3+\ldots)^{\frac{1}{\nu}}\right)^u$ ſeyn (24. §. 2. Zuſ.).

3) Iſt endlich m eine gebrochene verneinte Zahl $=-\frac{u}{\nu}$; ſo hat man $Z^m=Z^{\frac{-u}{\nu}}=\frac{1}{Z^{\frac{u}{\nu}}}=\frac{1}{(1+ax+bx^2+\ldots)^{\frac{u}{\nu}}}$, da alſo der Nenner dieſes Bruches eine Function von der Form $1+ax+bx^2+cx^3\ldots$ iſt (n. 2.); ſo iſt es auch der Bruch ſelbſt (25. §. 2. Zuſ.).

Es iſt übrigens hier gar nicht die Abſicht geweſen, dem Lehrſatze alle Gewißheit und Evidenz zu verſchaffen, genug iſt es vielmehr, daß man Gründe ihn zu muthmaßen hat, wie dieſes unten erhellen ſoll.

Der III. Abſchnitt.

Anwendung der Buchſtaben-Rechenkunſt auf die Auflöſung mathematiſcher Aufgaben.

27. §. Erklärungen.

Der Satz, worinn verlangt wird, man ſoll aus einigen gegebenen Zahlen eine oder mehr unbekannte Zahlen finden, heißt eine mathematiſche Aufgabe, und dieſe auflöſen heißt die verlangten Zahlen beſtimmen.

Zuſatz.

Wenn unbekannte Zahlen mit einigen gegebenen oder bekannten Zahlen in gar keiner Verbindung ſtehen; ſo iſt klar genug, daß jene aus dieſen nicht hergeleitet werden können: um alſo eine mathematiſche Aufgabe aufzulöſen, iſt nicht genug, daß einige Zahlen als bekannt vorausgeſetzt werden, es wird vielmehr erfodert, daß die Aufgabe ſolche Bedingungen enthalte, woraus ſich gewiſſe Verbindungen der verlangten noch unbekannten Zahlen mit den bekannten beſtimmen laſſen.

28. §. Willkührlicher Satz.

Zur bequemen Auflöſung einer mathematiſchen Aufgabe (27. §.) iſt nöthig, daß man die Zahlen, worauf ſich die Aufgabe beziehet, mit Buchſtaben bezeichne, und die bekannten von den noch unbekannten gehörig unterſcheide; jene bezeichne man daher

her allemahl mit den ersten Buchstaben a, b, c, d..., diese aber mit den letzten x, y, z.

29. §. Erklärungen.

Ein doppelter Ausdruck einerley Grösse heißt eine Gleichung, welche entstehet, wenn man die Gleichheit der Ausdrücke durch das bekannte Zeichen (=) anzeiget; die Theile, welche bey einer Gleichung durch die Zeichen (+ —) unter einander verbunden sind, heißen ihre Glieder.

Z. B. Der Ausdruck 8—3 gielt soviel als 6. 4—19, nämlich 5, so, daß 8—3 und 6. 4 — 19 nichts anders als gleiche Ausdrücke einerley Zahl 5 sind, weswegen man 8 — 3 = 6. 4 — 19 schreiben kann, und nun hat man eine Gleichung, welche 8; —3; 6.4; — 19 zu ihren Gliedern hat.

30. §. Lehrsatz.

Es ist gestattet, jedes Glied einer Gleichung von einer Seite des Gleichheitszeichens auf die andere mit entgegengesetztem Zeichen zu bringen, ohne das durch die Gleichheit der Ausdrücke aufzuheben.

Beweis. Wenn man was immer für Zahlen A, B, C, D hat, und A — B = C + D ist; so kann man auch A — B — D = C, und A = C + D + B setzen.

Es ist nämlich C + D die Summe der Zahlen C und D, und diese Summe soll vermöge der Voraussetzung = A — B seyn: man kann also eine Zahl D von der Summe A — B abziehen, und dann muß der Rest die andere Zahl C geben, oder es muß seyn A — B — D = C.

Ferner

Ferner ist $A - B$ die Differenz der Zahl B von A, und diese Differenz ist vermöge der Voraussetzung $= C + D$: da also die abgezogene Zahl zur Differenz addirt die andere geben muß, wovon der Abzug geschah; so muß die Summe von $C + D$ und B die Zahl A geben, oder es ist $A = C + D + B$.

1. Zusatz.

Wenn eine unbekannte Grösse (28. §.) sich in einer Gleichung befindet, und sie mit keiner andern multiplicirt oder dividirt ist; so kann man allemahl machen, daß sie sich allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens befinde, und auf der andern Seite lauter bekannte Grössen vorkommen: dazu ist nämlich nichts weiter nöthig, als daß man die bekannten Grössen, welche vielleicht mit der unbekannten Grösse auf einer Seite befindlich sind, mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringe.

Z. B. Aus $a - b + c + x - 2d = 3g - p$.

erhält man $x = 3g - p - a + b - c + 2d$.

2. Zusatz.

Es ist allemahl erlaubt, die Zeichen aller Glieder einer Gleichung in die entgegengesetzten zu verwandeln: denn dieses heißt soviel, als die Glieder, die sich auf einer Seite des Zeichens ($=$) befinden, auf die andere mit entgegengesetzten Zeichen bringen. Man kann z. B. statt $a - b + x = c + d$ auch $-a + b - x = -c - d$ schreiben.

3. Zusatz.

Man kann auch machen, daß alle Glieder einer vorgelegten Gleichung auf einer Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommen, und auf der andern Seite sich die o befinde. Denn wenn man z. B. die Gleichung $A = B$ hat; so ist offenbar $A - B = o$; eben so kann man aus $a + d - x = c - d$ auch $a + d - x - c + d = o$ machen.

31. §. Lehrsatz.

Man kann alle Glieder einer Gleichung mit einer gewissen Zahl multipliciren oder dividiren, ohne die Gleichheit der Ausdrücke aufzuheben.

Beweis. Es ist einleuchtend, daß man bey dieser Arbeit gleiche Ausdrücke mit gleichen Zahlen multiplicirt oder dividirt, welches allemahl angehet.

1. Zusatz.

Wenn die unbekannte Grösse (28. §.) in einer Gleichung mit einer bekannten was immer für einen Bruch bildet; so kann man diesen Bruch allemahl wegschaffen, wenn man seinen Nenner wegläßt, und damit die übrigen Glieder multiplicirt. Aus $\frac{x}{A} + B = C$ erhält man nämlich $\frac{x}{A} \cdot A + BA = CA$, oder $x + BA = CA$; und aus $\frac{A}{x} + B = C$ findet man $\frac{A}{x} \cdot x + Bx = Cx$, oder $A + Bx = Cx$.

2. Zusatz.

Wenn auch was immer für Brüche in einer Gleichung vorkommen; so kann man alle wegschaffen, wenn man alle Glieder entweder mit dem Producte aus allen Nennern, oder mit einer Zahl multiplicirt, welche durch jeden Nenner ohne Rest dividirt werden kann.

Z. B. Aus $a-x+\frac{b}{m}-\frac{c}{n}=\frac{d}{p}+\frac{e}{q}$,

wird $amnpq-xmnpq+\frac{bmnpq}{m}-\frac{cmnpq}{n}=\frac{dmnpq}{p}+\frac{emnpq}{q}$,

oder $amnpq-mnpqx+bnpq-cmpq=dmnq+emnp$.

Aus $\frac{a}{2}-\frac{x}{3}+\frac{b}{4}=\frac{c}{3}-\frac{e}{5}$ findet man wegen $2.3.4.3.5=360$

$$\frac{360a}{2}-\frac{360x}{3}+\frac{360b}{4}=\frac{360c}{3}-\frac{360e}{5}$$

oder $180a-120x+90b=120c-72e$.

Weil aber 60 durch jeden Nenner 2, 3, 4, 5, ohne Rest dividirt werden kann; so hätte man die Brüche vortheilhafter so wegschaffen können.

$$\frac{60a}{2}-\frac{60x}{3}+\frac{60b}{4}=\frac{60c}{3}-\frac{60e}{5}$$

oder $30a-20x+15b=20c-12e$.

3. Zuſatz.

Iſt die unbekannte Gröſſe in einer Gleichung mit einer bekannten multiplicirt; ſo kann man ſie von ihr befreyen, wenn man dieſelbe wegſtreichet, und damit die übrigen Glieder dividirt: aus $Ax + B = C$ wird nämlich

$$\frac{Ax}{A} + \frac{B}{A} = \frac{C}{A} \text{ oder } x + \frac{B}{A} = \frac{C}{A}.$$

Daher aus $3ax - 5bx + c = 8d - g$ erhält man

$$(3a - 5b)x + c = 8d - g,$$

und nun $x + \frac{c}{3a - 5b} = \frac{8d - g}{3a - 5b}$.

32. §. Aufgabe.

Den Werth einer unbekannten Gröſſe aus der vorgelegten Gleichung auszudrücken.

Auflöſung. 1) Man bringe alle Glieder, worinn die unbekannte Gröſſe ſtehet, deren Werth ausgedrückt werden ſoll, auf eine Seite des Gleichheitszeichens, und alle übrigen, worinn dieſelbe nicht befindlich iſt, auf die andere Seite (30. §.).

2) Wenn eben die unbekannte Gröſſe mit andern einen Bruch bildet; ſo ſchaffe man ihn weg (31. §. 1. Zuſ.).

3) Iſt endlich dieſelbe mit andern Gröſſen multiplicirt; ſo befreye man ſie von ihnen nach (31. §. 3. Zuſ.).

4) Auf dieſe Art erhält man die unbekannte Gröſſe allein auf einer Seite des Zeichens (=), daher drückt das, was ſich auf der andern Seite befindet, ihren Werth aus.

Geſchieht es, daß die unbekannte Gröſſe mit dem Zeichen (—) da ſtehet, folglich verneint iſt; ſo verwandle man die Zeichen aller Glieder in entgegengeſetzte (30. §. 2. Zuſ.) um ſie bejaht zu machen.

Beyſpiel.

Aus $\frac{a}{b}x - d = ex + \frac{c}{d}x - p$

folgt $\frac{a}{b}x - ex - \frac{c}{d}x = d - p$

oder $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - e\right)x = d - p$:

alſo iſt $x = \frac{d-p}{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - e} = \frac{(d-p)bd}{ad - cb - bde}$.

1. Zuſatz.

Wenn auf der andern Seite ſich lauter bekannte Zahlen befinden wie bey der Gleichung $x = \frac{d-p}{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - e}$; ſo iſt durch eine ſolche Gleichung der Werth der unbekannten Gröſſe x völlig beſtimmt, und man kann ihn ſogleich in Zahlen angeben, wenn nur die Zahlen bekannt ſind, welche die auf der andern Seite befindlichen Buchſtaben andeuten ſollen.

Wäre z. B. bey der angeführten Gleichung $d = 8$; $p = 3$; $a = 120$; $b = 4$; $c = 24$; $e = 3$; ſo hätte man

$$x = \frac{8-3}{\frac{120}{4} - \frac{24}{8} - 3} = \frac{5}{30-6} = \frac{5}{24}.$$

2. Zu-

2. Zusatz.

Bey der Auflösung einer mathematischen Aufgabe (27. §.) kömmt also alles darauf an, daß man die gegebenen Zahlen von der noch unbekannten Zahl genau unterscheide; aus den gegebenen Bedingungen die Verbindung bestimme, in welcher die gegebenen Zahlen mit der unbekannten Zahl stehen sollen (27. §. Zus.); und aus der entdeckten Verbindung eine Gleichung (29. §.) herleite, aus der sich hierauf der Werth der gesuchten Zahl angeben läßt (1. Zus.).

3. Zusatz.

Hat man eine Aufgabe aufgelöst (2. Zus.); so ist nöthig, die Auflösung zu prüfen: man muß nämlich untersuchen, ob die herausgebrachte Zahl hinreichet, die in der Aufgabe angegebenen Bedingungen zu erfüllen, oder nicht; im ersten Fall wird man von der Richtigkeit der Auflösung allemahl sicher seyn.

Beyspiele.

I. **Eine Zahl zu finden, welche so groß seyn soll, daß die Helfte, ein Drittel, und Viertel von ihr zusammen um 3 mehr betragen, als die Zahl selbst.**

Auflösung. Die verlangte Zahl heisse x; so ist $\frac{1}{2}x$ die Helfte, $\frac{1}{3}x$ ein Drittel, und $\frac{1}{4}x$ ein Viertel von ihr: da also vermöge der gegebenen Bedingung $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x$ um 3 grösser seyn muß, als die Zahl x selbst; so muß jene Summe so groß als $x+3$ seyn, daher hat man

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=x+3$

also $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-x=3$

und nun $6x+4x+3x-12x=36$

daher $13x-12x=36$; oder $x=36$.

Prüfung. Für $x=36$ ist $\frac{1}{2}x=18$; $\frac{1}{3}x=12$; $\frac{1}{4}x=9$: also $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=18+12+9=39$ um 3 gröſſer als $x=36$, welches die Aufgabe haben wollte.

II. Es ist die Summe 56 und die Differenz 16 zwoer Zahlen gegeben; man soll die Zahlen selbst finden.

Wenn man die gegebene Summe mit s und die Differenz mit d bezeichnet, und überdem die gröſſere Zahl x nennt; so ist die kleinere $s-x$: da also die kleinere Zahl von der gröſſeren abgezogen die Differenz d geben soll; so hat man

$x-(s-x)=d$: also $x-s+x=d$,

oder $2x-s=d$, und nun $2x=s+d$,

daher $x=\frac{s+d}{2}=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$.

Folglich $s-x=s-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$.

Es soll aber seyn $s=56$ und $d=16$: die gröſſere unter den unbekannten Zahlen ist demnach $x=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d=\frac{56}{2}+\frac{16}{2}=36$, und die kleinere $s-x=56-36=20$.

Prüfung. Die Summe der Zahlen 36 und 20 ist $=56$, die Differenz aber $=36-20=16$, welches die Aufgabe haben will.

4. Zusatz.

Im zweyten Beyspiele kann s jede Summe, und d jede Differenz zwoer Zahlen bedeuten: aus $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$ und $s - x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$ folgt daher der allgemeine Satz: wenn die Summe und Differenz zwoer Zahlen gegeben werden; so findet man die grössere Zahl, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt, die kleinere Zahl aber findet man, wenn man die halbe Differenz von der halben Summe abzieht.

5. Zusatz.

Aus den Beyspielen (3. Zus.) erhellet ferner, daß es nicht nöthig ist, die unbekannten Zahlen allemahl mit verschiedenen Buchstaben zu bezeichnen, und jede Zahl besonders zu suchen: es kann nämlich seyn, wie es bey den im zweyten Beyspiele verlangten Zahlen geschieht, daß die unbekannten Zahlen von einander und den bekannten dergestalt abhängen, daß durch eine von ihnen die übrigen völlig bestimmt sind, und dann ist genug, wenn man nur eine solche Zahl zu finden suchet.

33. §. Aufgabe.

Aus einer Anzahl n von Gleichungen, welche eben so viele unbekannte Grössen enthalten, die doch in keiner Gleichung mit einander multiplicirt sind, neue $n - 1$ Gleichungen herzuleiten, welche auch $n - 1$ unbekannte Grössen enthalten sollen.

Auflösung. Man nehme eine unter den gegebenen n Gleichungen, welche eine in mehreren andern Gleichungen vorkommende unbekannte Grösse, z. B. x, enthält, und betrachte alle übrigen in ihr vorhandenen Grössen, als wenn sie lauter bekannte Zahlen wären: man suche hierauf aus eben der Gleichung den Werth von x nach (2. §) und setze ihn statt x in allen übrigen Gleichungen, welche x enthalten; so wird man dadurch offenbar n — 1 neue Gleichungen erhalten, welche n — 1 unbekannte Grössen, nämlich um x weniger, enthalten werden.

1. Zusatz.

Wenn man mit diesen neuen n — 1 Gleichungen so, wie mit den n gegebenen, verfährt, und dadurch eine neue unbekannte Grösse wegschaffet; so wird man n — 2 neue Gleichungen erhalten, worinn nur n — 2 unbekannte Grössen stecken werden. Man kann daher dieses Verfahren soweit fortsetzen, bis man auf eine einzige Gleichung kömmt, welche nur eine unbekannte Grösse enthält.

Beyspiel.

1) $u+x+y-z=A$ 5) $u=A-x-y+z$
2) $u+x+z-y=B$
3) $u+y+z-x=C$
4) $x+y+z-u=D$

---

6) $A+z-x-y+x+z-y=B$ aus 5.2)
7) $A+z-x-y+y+z-x=C$ aus 5.3)
8) $x+y+z-A-z+x+y=D$ aus 5.4)

---

oder 9) $A+2z-2y=B$ aus 6)
10) $A+2z-2x=C$ aus 7)

11) $2x+2y-A=D$ aus 8) 12) $z=\frac{B-A+2y}{2}$

13) $A+B-A+2y-2x=C$ aus 12. 10)

oder 14) $B+2y-2x=C$ 15) $y=\frac{C-B+2x}{2}$

16) $2x+C-B+2x-A=D$ aus 15. 11).

oder 17) $4x+C-B-A=D$.

2. Zusatz.

Weil die letzte Gleichung, wie 17) in (1. Zus.) ausser bekannten Zahlen nur eine unbekannte enthält; so kann man nun den Werth dieser unbekannten Zahl aus eben der Gleichung völlig bestimmen (32. §. 1. Zus.). Weil ferner diese unbekannte Zahl mit noch einer andern in einer der nächst vorhergehenden Gleichungen sich befindet, wie x mit y in 15) beym (1. Zus.); so kann man nun auch den Werth dieser andern unbekannten Zahl aus eben der Gleichung völlig bestimmen (32. §. 1. Zus.). Und auf diese Art wird es möglich seyn, die Werthe aller unbekannten Grössen, einen Werth nach dem andern, in Zahlen zu bestimmen.

3. Zusatz.

Wenn demnach eine mathematische Aufgabe sich auf mehr unbekannte Grössen beziehet, welche von der Beschaffenheit sind, daß sie von einander und den bekannten nicht so abhängen, wie es in (32. §. 5. Zus.) vorausgesetzt wurde; so muß man suchen aus den Bedingungen der Aufgabe so viele Gleichungen zwischen den gegebenen und gesuchten

Zahlen herzuleiten, als Zahlen gesucht werden, und dann nach (1. 2. Zus.) zu verfahren.

Beyspiele.

I. Man hat vier Pferde A, B, C, D gekauft; A, B, C haben zusammen 198 Thaler gekostet; A, B, D aber 175 Thaler; A, C, D 193 Thaler; und B, C, D 163 Thaler; was hat also jedes Pferd gekostet?

Auflösung. Die Preise der Pferde A, B, C, D in Thalern genommen seyen x, y, z, ω; so ist nach den gegebenen Bedingungen:

1) $x+y+z=198$
2) $x+y+\omega=175$
3) $x+z+\omega=193$
4) $y+z+\omega=163$

5) $x=198-y-z$

8) $\omega=163-y-z$

6) $198-z+\omega=175$ aus 5. 2)
7) $198-y+\omega=193$ aus 5. 3)

9) $361-2z-y=175$ aus 8. 6)
10) $361-2y-z=193$ aus 8. 7)

11) $y=186-2z$

12) $361-2(186-2z)-z=193$ aus 11. 10)
od. 13) $-11+3z=193$; 14) $z=68$ Th.

Das heißt: das Pferd C hat 68 Thaler gekostet, und nun findet man die Preise der übrigen Pferde, wie folgt:

Von B aus 11) $y=186-2.68=50$ Th.
Von D aus 8) $\omega=163-50-68=45$ Th.
Von A aus 5) $x=198-50-68=80$ Th.

II. Eine Zahl a in vier Theile x, y, z, ω zu theilen, welche sich wie vier ganze Zahlen m, n, p, q gegen einander verhalten sollen.

Die

Die hier gegebene Bedingung giebt drey Proportionen und eine Gleichung.

1) $x+y+z+\omega=a$
2) $x:y=m:n$
3) $y:z=n:p$
4) $z:\omega=p:q$

aus 1. 8. 9)

5) $xn=ym$ 8) $y=\frac{xn}{m}$ 10) $x+\frac{nx}{m}+z+\frac{qz}{p}=a$
6) $yp=zn$ aus 8. 6)
7) $zq=\omega p$ 9) $\omega=\frac{zq}{p}$ 11) $\frac{npx}{m}=zn$

aus 11) aus 10. 12)

12) $x=\frac{nmz}{np}=\frac{mz}{p}$ 13) $\frac{mz}{p}+\frac{nz}{p}+z+\frac{qz}{p}=a$

14) $\frac{mz+nz+pz+qz}{p}=a$ 15) $z(m+n+p+q)=ap$

16) $z=\frac{ap}{m+n+p+q}$.

aus 9. 16) aus 12. 16) aus 8. ~~16~~) und x

$\omega=\frac{aq}{m+n+p+q}$; $x=\frac{am}{m+n+p+q}$; $y=\frac{an}{m+n+p+q}$.

Die vier letzten Gleichungen geben die vier folgenden Proportionen, und diese enthalten bekanntlich die gewöhnliche Gesellschaftsrechnung, und Vermischungsrechnung. (a)

$m+n+p+q : a$
$= p : z$
$= q : \omega$
$= m : x$
$= n : y$

(a) Man sehe des Hrn. Hofr. Kästner Anfangsgründe der Arithm. V. Cap. 47. 48. §.

III. Ein Eimer des Weines A kostet 8 Gulden, und ein Eimer des Weines B wird um 12 Gulden verkauft: wieviel muß man nun vom Weine A und wieviel von B nehmen, um von beyden 1000 Eimer bekommen, und jeden Eimer um einen mittlern Preis von 10 Gulden verkaufen zu können?

Auflösung. Man setze $1000 = m$, $8 = b$, $12 = a$; die Anzahl der Eimer des Weins A, die man zur Vermischung m nehmen muß, sey x, und die Anzahl derjenigen, welche man dazu von B zu nehmen hat, sey y. Nun giebt die Voraussetzung, daß x und y zusammen m geben müssen, daß ferner x und y um die Preise b; a verkauft, eben soviel zusammen betragen würden, als m um den mittleren Preis $10 = n$ verkauft betragen wird; also muß seyn:

1) $x + y = m$) 3) $x = m - y$
2) $bx + ay = mn$)

4) $bm - by + ay = mn$ aus 3. 2)

daher $y(a - b) = m(n - b)$

folglich $y = \frac{m(n-b)}{a-b}$,

und nun $x = m - \frac{m(n-b)}{a-b} = \frac{m(a-n)}{a-b}$ aus 3).

In Zahlen ist demnach

$$y = \frac{1000(10-8)}{12-8} = \frac{1000 \cdot 2}{4} = 500.$$

$$x = \frac{1000(12-10)}{12-8} = \frac{1000 \cdot 2}{4} = 500.$$

Diese

Dieſe Aufgabe iſt zwar auf eine beſtimmte Gattung der Dinge eingeſchränkt, doch aber iſt ihre Auflöſung ſo allgemein, daß man darnach jede zwey Dinge von gegebenen Werthen ſo vermiſchen kann, daß daraus eine Vermiſchung von einem mittleren Werthe herauskommen möge.

Uebrigens kann man aus den letzten Gleichungen für y und x andere herleiten, wodurch ſich andere Fälle auflöſen laſſen, und dieſes iſt unſtreitig ein großer Vortheil, welchen nur die Buchſtaben-Rechenkunſt gewähren kann.

Wollte man zu dem Weine A Waſſer nehmen; ſo müßte man den Preis davon $a = o$ ſetzen, und dann wäre

$$y = \frac{m(n-b)}{-b} = \frac{m(b-n)}{b},$$

$$x = \frac{m.-n}{-b} = \frac{mn}{b}.$$

Wenn hingegen der mittlere Preis n der Vermiſchung beſtimmt iſt, und man überdem entweder x oder y willkührlich annimmt; ſo iſt die Vermiſchung m noch unbekannt, und man muß daher m aus $m = \frac{y(a-b)}{n-b}$ für bekanntes y ſuchen, woraus ſich $x = m - y$ für ſich ergiebt; oder man muß m aus $m = \frac{x(a-b)}{a-n}$ für bekanntes x beſtimmen, woraus $y = m - x$ für ſich folgt.

Der IV. Abſchnitt.

Anwendung der Buchſtaben-Rechenkunſt auf die merkwürdigſten Eigenſchaften der geraden, ungeraden und Primzahlen.

34. §. Erklärungen.

Wenn eine Zahl A durch eine andere B ohne Reſt dividirt werden kann; ſo heißt B ein Maaß von A, und man ſagt, A ſey theilbar durch B, ſonſt aber, wenn A durch B dividirt einen Reſt zurückläßt, iſt A nicht theilbar durch B: ſo iſt z. B. 8 durch 4 theilbar und durch 5 nicht theilbar.

35. §. Erklärungen.

Wenn zwo oder mehr Zahlen A, B, C, D...P, jede für ſich, durch eine gewiſſe Zahl n theilbar ſind (34. §.); ſo heißt n ein gemeinſchaftliches Maaß derſelben Zahlen: es iſt n das größte Maaß der Zahlen A, B, C...P, wenn es keine andere größere Zahl giebt, wodurch jede derſelben Zahlen theilbar wäre: ſo ſind z. B. die Zahlen 8 und 12 durch jede der Zahlen 2, 4 theilbar, daher iſt ſowohl 2 als 4 ein gemeinſchaftliches Maaß von 8 und 12, und das größte Maaß iſt 4.

36. §. Erklärungen.

Einfache Zahlen oder abſolute Primzahlen nennt man ſolche Zahlen, welche durch andere (die Einheit ausgenom-

nommen) nicht theilbar sind (34. §.), wie 3, 5, 7, 11, 13 ---; jede Zahl hingegen, welche durch eine andere theilbar ist, wie 8 durch 2 und 4, heißt eine zusammengesetzte Zahl; wenn aber zwo Zahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben (35. §.), es mögen dieselben, einzeln genommen, durch andere theilbar seyn oder nicht; so werden sie unter sich Primzahlen genannt, wie 5 und 11, oder 4 und 15, oder 4 und 13.

Zusatz.

Absolute Primzahlen sind auch unter sich Primzahlen, aber unter sich Primzahlen sind nicht allemahl auch absolute Primzahlen; so sind z. B. 4 und 15 zwar unter sich Primzahlen, nicht aber auch absolute Primzahlen.

37. §. Erklärungen.

Eine Zahl B heißt ein aliquoter Theil von einer Zahl A, wenn B etlichemahl genommen genau A giebt, wie 2 dreymahl genommen 6 giebt; es heißt ferner A ein Vielfaches von B, und insbesondere ist es ein Doppeltes, Dreyfaches, Vierfaches, Fünffaches u. s. f. von B, nachdem B zwey, drey, vier, fünf u. s. f. mahl genommen A giebt.

Zusatz.

Jedes Product AB aus zwoen Zahlen A und B ist ein Vielfaches jedes von seinen Factoren, und theilbar durch denselben (34. §.).

38. §. Erklärungen.

Eine gerade Zahl heißt die, welche durch 2 theilbar ist (24. §.), wie 4; und eine ungerade Zahl ist diejenige, welche durch 2 dividirt Eins zum Rest giebt, wie 5.

Zusatz.

Wenn n was immer für eine ganze Zahl bedeutet; so drückt 2n jede Gerade (37. §. Zus.) daher 2n+1 und 2n—1 jede ungerade Zahl aus.

39. §. Lehrsatz.

Die Summe oder Differenz einer ganzen Zahl und eines ächten Bruches, oder auch eines unächten, der sich auf keine ganze Zahl bringen läßt, kann nie eine ganze Zahl geben.

Beweis. Die ganze Zahl sey A und $\frac{n}{m}$ ein solcher Bruch, der sich auf keine ganze Zahl bringen läßt; es sey ferner die Summe $A+\frac{n}{m}=S$, und die Differenz $A-\frac{n}{m}=D$; so ist $\frac{n}{m}=S-A$ u. $A-D=\frac{n}{m}$. Wenn nun S oder D eine ganze Zahl ist, weil auch A eine ganze Zahl seyn soll; so wäre auch S—A oder A—D eine ganze Zahl, daher auch $\frac{n}{m}$, welches mit der Voraussetzung streitet, daß $\frac{n}{m}$ ein Bruch ist, der sich auf keine ganze Zahl bringen läßt.

40. §. Lehrsatz.

Wenn eine Zahl A durch eine andere B und diese durch eine dritte n theilbar ist; so muß auch A durch n theilbar seyn.

Beweis. Man setze $\frac{A}{B} = C$ und $\frac{B}{n} = D$; so ist $A = CB$ und $B = Dn$, daher $A = CDn$, und $\frac{A}{n} = CD$. Da nun A durch B und B durch n theilbar seyn soll; so sind C und D ganze Zahlen (34. §.): also ist auch $\frac{A}{n} = CD$ eine ganze Zahl, folglich A durch n theilbar (34. §.).

Zusatz.

Wenn B durch n theilbar ist, und A durch n nicht theilbar; so kann es auch A durch B nicht seyn.

41. §. Lehrsatz.

Die Summe $S = A + B + C + \ldots + P$ mehrerer Zahlen, ist durch eine Zahl μ theilbar, wenn entweder jede Zahl für sich, oder die Summe aller Reste, welche die einzeln genommenen Zahlen durch μ dividirt geben würden, durch μ theilbar ist: findet man aber, daß die Summe derselben Reste durch μ nicht theilbar ist; so kann es auch S nicht seyn.

Beweis. 1) Wenn jede Zahl für sich durch μ theilbar ist; so sind die Quotienten $\frac{A}{\mu}; \frac{B}{\mu}; \frac{C}{\mu}; \ldots \frac{P}{\mu}$ lauter ganze Zahlen (34. §.): also ist auch die Summe derselben

$\frac{S}{\mu}$

$\frac{S}{\mu} = \frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu} + \frac{C}{\mu} + \ldots + \frac{P}{\mu}$ eine ganze Zahl, folglich S durch μ theilbar (34. §.).

2) Wenn nicht alle Zahlen durch μ theilbar sind; so können die Quotienten in (n. 1.) aus ganzen und gebrochenen Zahlen bestehen, welche die Reste zu ihren Zählern, und die Zahl μ zum gemeinschaftlichen Nenner haben müssen: wenn man also die Summe ihrer ganzen Theile mit s, und die Summe der Reste mit r, daher die Summe aller gebrochenen Theile mit $\frac{r}{\mu}$ bezeichnet; so ist die Summe der Quotienten (n. 1.) nun $\frac{S}{\mu} = s + \frac{r}{\mu}$. Diese ist demnach entweder eine ganze Zahl, und daher S durch μ theilbar (34. §.), wenn $\frac{r}{\mu}$ eine ganze Zahl, folglich r durch μ theilbar ist: wenn aber r durch μ nicht theilbar ist; so kann $\frac{r}{\mu}$ keine ganze Zahl ohne allen Bruch geben (34. §.), daher kann auch $\frac{S}{\mu} = s + \frac{r}{\mu}$ keine ganze Zahl seyn (39. §.), und dann ist S durch μ gewiß nicht theilbar (34. §.).

1. Zusatz.

Wenn eine Zahl a durch μ theilbar, und eine andere b durch μ nicht theilbar ist; so kann ihre Summe a + b durch μ nicht theilbar seyn.

2. Zusatz.

Wenn daher die Summe a+b und eine Zahl a, jede für sich, durch μ theilbar ist; so muß auch die andere Zahl b durch μ theilbar seyn; und wenn a+b durch μ theilbar, eine Zahl a aber durch μ nicht theilbar ist; so kann die andere Zahl b durch μ nicht theilbar seyn: und wenn a+b durch μ nicht theilbar, eine Zahl a aber durch μ theilbar ist; so ist b durch μ nicht theilbar.

3. Zusatz.

Die Differenz zwoer Zahlen A und B sey $A - B = D$; so ist $A = D + B$: ist nun A durch μ theilbar, und B durch μ nicht theilbar; so kann D durch μ nicht theilbar seyn (2. Z.): ist aber B durch μ theilbar und A durch μ nicht theilbar; so ist auch D durch μ nicht theilbar (2. Zus.). Das heißt: wenn die eine von zwoen Zahlen A und B durch eine Zahl μ theilbar, die andere aber durch μ nicht theilbar ist; so kann ihre Differenz durch μ nicht theilbar seyn.

4. Zusatz.

Wenn sowohl A als B durch μ theilbar ist; so muß auch die Differenz $A - B = D$ durch μ theilbar seyn: denn es ist $A = D + B$, und demnach sowohl D+B als B durch μ theilbar, folglich muß es auch D seyn (2. Zus.).

5. Zusatz.

Wenn die Differenz zwoer Zahlen A — B und eine Zahl für sich durch μ theilbar ist; so ist es auch die andere Zahl: denn wäre sie es nicht; so könnte die Differenz A — B durch

μ nicht theilbar seyn (3. Zus.) Wenn aber die Differenz zwoer Zahlen durch μ nicht theilbar, und eine von den Zahlen durch μ theilbar ist; so kann die andere Zahl durch μ nicht theilbar seyn: denn wäre sie es; so müßte es auch die Differenz seyn (4. Zus.).

6. Zusatz.

Die Summe lauter gerader Zahlen ist allemahl eine gerade Zahl (38. §. und Lehrs.): die Summe aber aus lauter ungeraden Zahlen ist eine gerade oder ungerade Zahl, nachdem es die Anzahl derselben ist (38. §. und Lehrs.).

7. Zusatz.

Also ist die Summe gerader und ungerader Zahlen entweder eine gerade oder ungerade Zahl, nachdem die Anzahl der ungeraden gerad oder ungerad ist.

8. Zusatz.

Die Differenz zwoer geraden Zahlen ist allemahl eine gerade Zahl (4. Zus. und 38. §.): und die Differenz zwoer Zahlen, wovon die eine gerad, und die andere ungerad ist, muß allemahl eine ungerade Zahl seyn (3. Zus. und 38. §.).

42. §. Lehrsatz.

Wenn weder A noch B durch μ theilbar ist; so kann die Differenz $A - B$ der Zahlen A und B nur alsdann durch μ theilbar seyn, wenn die Reste gleich sind, welche die Zahlen A und B durch μ dividirt geben.

Beweis.

Beweis. Es gebe $\frac{A}{\mu}$ den ganzen Quotienten a und einen Rest α, und $\frac{B}{\mu}$ gebe den ganzen Quotienten b und einen Rest β; so ist:

$$\frac{A}{\mu} = a + \frac{\alpha}{\mu} \text{ und } \frac{B}{\mu} = b + \frac{\beta}{\mu}:$$

also $\frac{A-B}{\mu} = a - b + \frac{\alpha-\beta}{\mu}$.

Sind nun die Reste α, β gleich groß; so ist $\alpha - \beta = 0$, und $\frac{A-B}{\mu} = a - b$ ist eine ganze Zahl, folglich $A - B$ durch μ theilbar (34. §.).

Ist aber $\alpha > \beta$ oder $\beta > \alpha$; so ist $\frac{\alpha - \beta}{\mu}$ in jedem Fall ein ächter Bruch, bejaht im ersten und verneint im zweyten Fall: also ist $\frac{A-B}{\mu} = a - b + \frac{\alpha-\beta}{\mu}$ in keinem Fall eine ganze Zahl (41. §.), daher ist auch $A - B$ in keinem Fall durch μ theilbar (34. §.).

Zusatz.

Die Differenz zwoer ungeraden Zahlen ist allemahl eine gerade Zahl (38. §.).

* 43. §. Lehrsatz.

Wenn P ein Product aus mehreren Zahlen bedeutet, und ein Factor A von ihm durch μ theilbar ist; so ist es auch das Product P selbst.

Beweis. Es ist P durch A theilbar (37. §. Zus.): da also auch A durch μ theilbar seyn soll; so ist auch P durch μ theilbar (40. §.).

Zusatz.

Das Product aus zwoen geraden Zahlen, oder aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist allemahl eine gerade Zahl (38. §.).

44. §. Lehrsatz.

Wenn weder A noch B durch μ theilbar ist; so wird das Product AB durch μ nur alsdann theilbar seyn, wenn es das Product aus den Resten ist, welche die Zahlen A und B durch μ dividirt geben.

Beweis. Man nehme die Voraussetzungen (42. §.) an, daß $A = a\mu + \alpha$ und $B = b\mu + \beta$ ist; so hat man das Product aus den Zahlen A und B,

$$\begin{aligned} AB &= (a\mu+\alpha)(b\mu+\beta) \\ &= ab\mu^2 + \alpha b\mu + a\beta\mu + \alpha\beta \\ &= (ab\mu + \alpha b + a\beta)\mu + \alpha\beta: \end{aligned}$$

also $\frac{AB}{\mu} = ab\mu + \alpha b + a\beta + \frac{\alpha\beta}{\mu}$.

Ist nun $\alpha\beta$ durch μ theilbar; so ist $\frac{\alpha\beta}{\mu}$ eine ganze Zahl (34. §.), daher ist es auch $\frac{AB}{\mu}$, folglich AB durch μ theilbar (das.): ist aber $\alpha\beta$ durch μ nicht theilbar; so kann $\frac{\alpha\beta}{\mu}$ keine ganze Zahl geben (34. §.), folglich kann auch

$\frac{AB}{\mu}$

$\frac{AB}{\mu}$ keine ganze Zahl seyn (39. §.), und so ist AB durch μ nicht theilbar (34. §.).

Zusatz.

Das Product aus zwoen ungeraden Zahlen ist allemahl eine ungerade Zahl (38. §.).

45. §. Lehrsatz.

Wenn die Zahlen A, B, jede für sich, durch μ theilbar sind, und die Zahl A > B durch B dividirt einen Rest R giebt; so muß auch R durch μ theilbar seyn.

Beweis. Bey dieser Voraussetzung ist $A = QB + R$, wenn Q den ganzen Quotienten bedeutet, welchen A durch B dividirt geben soll: da also A durch μ theilbar ist; so ist es auch $QB + R$. Es ist aber auch QB durch μ theilbar, indem es B seyn soll (43. §.): also muß es auch R seyn (41. §. 2. Zus.).

1. Zusatz.

Weil sowohl B als R durch μ theilbar ist; so wird auch r durch μ theilbar seyn, wenn B durch R dividirt einen Rest $= r$ giebt: ferner wenn man auch R durch r dividirt, und dadurch einen neuen Rest $= s$ findet; so wird auch s durch μ theilbar seyn u. s. f.

2. Zusatz.

Wenn die Zahl B durch den Rest R theilbar ist; so muß R das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A und B seyn. Weil nämlich $A = QB + R$ war; so ist bey dieser

Vorausſetzung ſowohl QB (43. §.) als R folglich auch A (41. §.) durch R theilbar, daher iſt R ein gemeinſchaftliches Maaß von A und B (35. §.). Es iſt aber R zugleich das größte Maaß: denn wäre $n > R$ ein Maaß von A und B; ſo müßte ſowohl QB (43. §.), als $A = QB + R$ durch n theilbar ſeyn, folglich wäre es auch R (41. §. 2. Zuſ.), da doch $n > R$ ſeyn ſoll.

46. §. Aufgabe.

Das gröſte gemeinſchaftliche Maaß zweyer ganzen Zahlen zu finden.

Auflöſung. Man dividire die gröſſere Zahl durch die kleinere: geſchieht nun die Diviſion ohne Reſt; ſo iſt die kleinere Zahl das gröſte gemeinſchaftliche Maaß (45. §. 2. Zuſ.). Wenn aber bey der Diviſion ein Reſt übrig bleibt; ſo dividire man die kleinere Zahl durch dieſen Reſt: bleibt hier kein Reſt übrig; ſo war der erhaltene Reſt das verlangte gemeinſchaftliche Maaß (45. §. 2. Zuſ.): findet man aber einen neuen Reſt; ſo dividire man durch ihn den nächſt vorhergehenden Reſt, u. ſ. f. bis man auf eine Diviſion kömmt, welche ohne Reſt geſchieht, und alsdann iſt der bey ihr gebrauchte Diviſor das verlangte gröſte gemeinſchaftliche Maaß gegebener Zahlen.

Beyſpiel.

Werden dividirt		durch		geben die Reſte.	
25897	A	5311	B	4653	R
5311	B	4653	R	658	r
4653	R	658	r	47	s
658	r	47	s	0	

Hier

Hier ist nämlich $s = 47$ das gröſste gemeinschaftliche Maaſs der Zahlen $A = 25897$ und $B = 5311$: denn weil s durch sich selbst und r durch s theilbar ist; so ist s das gröſste gemeinschaftliche Maaſs von r und s, wie auch von r und R (45. §. 2. Zus.): wenn aber r und R durch s theilbar sind; so muſs auch B und nun auch A durch s theilbar seyn.

Anmerkung.

Wenn man bey diesem Verfahren auf einen Rest $= 1$ kömmt; so wird dieses die Unmöglichkeit des gemeinschaftlichen Maaſses beweisen: denn wenn der letzte Rest $s = 1$ wäre, und dennoch die Zahlen A und B ein gemeinschaftliches Maaſs $n > 1$ hätten; so müſste auch R durch n (45. §.), daher auch r, und endlich s dadurch theilbar seyn (45. §. 1. Zus.) da doch dieses unmöglich seyn muſs, sobald $n > 1$, daher $n > s$ ist. Unten (58. §. 3. Zus.) kömmt übrigens ein allgemeiner Beweis dieses Verfahrens vor.

47. §. Lehrsatz.

Wenn zwo Zahlen z, Z durch das gröſste gemeinschaftliche Maaſs dividirt werden; so müssen die Quotienten unter sich Primzahlen seyn.

Beweis. Das gröſste Maaſs (46. §.) der Zahlen z, Z sey μ, und man setze $\frac{z}{\mu} = m$, $\frac{Z}{\mu} = M$, wo m, M ganze Zahlen seyn müssen (35. 34. §.): sind nun m, M nicht unter sich Primzahlen; so müssen sie ein gemeinschaft-

liches Maaß π haben (36. §.), durch welches man sie ohne Rest dividiren kann, so, daß $\frac{m}{\pi} = q$ und $\frac{M}{\pi} = Q$ gewisse ganze Zahlen bedeuten können. Da nun hieraus $m = q\pi$ und $M = Q\pi$ folgt; so ist $\frac{z}{\mu} = q\pi$ und $\frac{Z}{\mu} = Q\pi$: also $\frac{z}{\mu\pi} = q$ und $\frac{Z}{\mu\pi} = Q$, und dieses sind ganze Zahlen, daher ist jede der Zahlen z, Z durch $\mu\pi > \mu$ theilbar (34. §.), folglich ist μ nicht das größte Maaß derselben Zahlen, wie man es vorausgesetzt hat.

48. §. Lehrsatz.

Wenn A und B unter sich Prinzahlen sind; so kann man den Bruch $\frac{A}{B}$ ohne Veränderung seines Werthes durch kleinere Zahlen nicht angeben.

Beweis. Wäre es möglich; so gäbe es gewisse kleinste Zahlen a und b, wodurch eben das geschehen könnte, und es wäre $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$: also auch $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$.

Wegen $A > a$ und $B > b$ müssen $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$ gewisse ganze Quotienten α, β und vielleicht auch gewisse Reste r, R geben, daß $\frac{A}{a} = \alpha + \frac{r}{a}$ und $\frac{B}{b} = \beta + \frac{R}{b}$ ist; daher wäre $\alpha + \frac{r}{a} = \beta + \frac{R}{b}$, und nun

1) α

1) $\alpha = \beta + \frac{R}{b} - \frac{r}{a}$

2) $\beta = \alpha + \frac{r}{a} - \frac{R}{b}$.

Es ist aber alles unmöglich: denn es kann weder $\frac{R}{b} > \frac{r}{a}$ noch $\frac{r}{a} > \frac{R}{b}$ seyn, weil im ersten Fall $\frac{R}{b} - \frac{r}{a}$ ein ächter Bruch, folglich $\beta + \frac{R}{b} - \frac{r}{a}$ keine ganze Zahl wäre (39. §.), da doch α in (n. 1.) eine ganze Zahl seyn soll; im zweyten Fall wäre $\frac{r}{a} - \frac{R}{b}$ ein ächter Bruch, daher $\alpha + \frac{r}{a} - \frac{R}{b}$ keine ganze Zahl (39. §.), da doch β in (n. 2.) eine ganze Zahl seyn soll; es kann auch $\frac{r}{a} = \frac{R}{b}$ nicht seyn, weil sonst $\frac{r}{R} = \frac{a}{b}$ wäre, und dann müßte, wegen $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ auch $\frac{r}{R} = \frac{A}{B}$ seyn: weil also $r < a, R < b$ ist; so könnte man den Bruch $\frac{A}{B}$ durch noch kleinere Zahlen r, R ausdrücken, als a, b sind, da doch a, b die kleinsten Zahlen seyn sollen, wodurch es sich thun läßt. Man kann auch nicht sagen, daß $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}$ ohne Reste r, R sind, sonst wäre $\alpha = \beta$, daher $\frac{A}{a} = \alpha$, $\frac{B}{b} = \alpha$, folglich wären

$\frac{A}{\alpha} = a$, $\frac{B}{\alpha} = b$ ganze Zahlen, und A, B durch α theilbar (34. §.), da doch A und B, als unter sich Primzahlen, kein gemeinschaftliches Maaß α haben können (36. §.).

1. Zusatz.

Wenn mehrere Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ - - - mit ungleichen Zählern und Nennern versehen, und jedes Bruches Zähler und Nenner unter sich Primzahlen sind; so können die Brüche nicht einander gleich seyn.

2. Zusatz.

Es können daher auch diejenigen Brüche nicht einander gleich seyn, derer Zähler und Nenner ungleich und absolute Primzahlen sind, das heißt: wenn a, b, A, B absolute Primzahlen sind, und $a \lessdot A$, $b \lessdot B$; so kann nicht $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ seyn (36. §. Zus.).

3. Zusatz.

Wenn zwo Zahlen A und B durch eine dritte Zahl μ dividirt die Quotienten a und b geben, und diese unter sich Primzahlen sind; so muß μ das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A und B seyn. Denn es ist $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$: gäbe es nun ein gemeinschaftliches Maaß $\pi > \mu$ für A und B; so wären $\frac{A}{\pi} = \alpha$, $\frac{B}{\pi} = \beta$ ganze Zahlen, und

kleiner

kleiner als a, b; sie gäben auch $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B}$ folglich $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$, welches nicht seyn kann, wenn a, b unter sich Primzahlen sind (Lehrs.).

4. Zusatz.

Wenn A, B, C . . . P und a, b, c . . . p absolute Primzahlen sind, und man ABC . . . P = abc . . . p setzt; so ist auch $\frac{BC \ldots P}{a} = \frac{bc \ldots p}{A}$, welches mit (1. Zus.) streitet, indem hier jedes Bruches Zähler und Nenner, wegen absoluter Primzahlen a und A, unter sich Primzahlen sind (36. §.): das Product aus einigen absoluten Primzahlen kann also nicht aus andern eben sovielen, wenigeren, oder mehreren absoluten Primzahlen entstehen.

5. Zusatz.

Man nehme an, daß das Product ABC . . . P aus absoluten Primzahlen durch eine andere Primzahl a, oder durch das Product abc . . . m aus einigen andern absoluten Primzahlen theilbar ist (34. §.); so müssen die nachstehenden Quotienten ganze Zahlen geben.

$$\frac{ABC \ldots P}{a} = Z; \quad \frac{ABC \ldots P}{abc \ldots m} = z;$$

also ist $\frac{BC \ldots P}{a} = \frac{Z}{A}$; $\frac{BC \ldots P}{a} = \frac{zbc \ldots m}{A}$.

Dieses kann aber wegen (1. Zus.) so wenig bestehen, wie wenig ein gleiches Verfahren in (4. Zus.) bestehen konnte: das Product ABC . . . P aus einigen absoluten Primzahlen

ist

ist also weder durch eine andere absolute Primzahl, noch durch das Product aus einigen andern absoluten Primzahlen theilbar.

6. Zusatz.

Zwo Zahlen Z, z können kein gemeinschaftliches Maaß haben (35. §.), wenn alle einfachen Factoren (36. §.) der einen Zahl von allen einfachen Factoren der andern Zahl unterschieden sind (5. Zus.).

7. Zusatz.

Wenn aber zwo Zahlen Z, z einige gemeinschaftliche einfache Factoren haben, als wenn $Z = ABC \ldots P\alpha\beta \ldots \mu$, und $z = abc \ldots m\alpha\beta \ldots \mu$ wäre; so ist das Product $\alpha\beta \ldots \mu$ aus gemeinschaftlichen Factoren das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen Z, z (6. Zus. und 3. Zus.).

8. Zusatz.

Der Satz (6. Zus.) gielt auch für mehrere Zahlen. Wenn drey Zahlen z. B. a, b, c, wo $a > b$ und $b > c$ seyn soll, keine gemeinschaftliche einfache Factoren haben; so haben sie auch kein gemeinschaftliches Maaß (35. §): wenn sie aber aus einigen gemeinschaftlichen einfachen Factoren bestehen: so ist das Product aus diesen einfachen Factoren das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen a, b, c, und so ist dieses Maaß entweder mit dem größten gemeinschaftlichen Maaß der Zahlen a und b (7. Zus.) einerley, oder doch mit dem größten gemeinschaftlichen Maaß zwoer Zahlen gleich groß, wovon die eine das größte Maaß von a und b ist, die andere aber die dritte Zahl c selbst ist.

49. §. Lehrſatz.

Jede Zahl, welche die 0 zur Endziffer hat, iſt durch 2, 5 und 10 theilbar: iſt aber die Endziffer =5; ſo iſt die Zahl durch 5 theilbar: iſt ſie aber eine gerade Ziffer 2, 4, 6, 8; ſo iſt die Zahl allemahl durch 2 theilbar; folglich eine gerade Zahl (38. §.).

Beweis. Wenn man die Ziffern, woraus eine Zahl beſtehen ſoll, überhaupt mit Buchſtaben bezeichnet; ſo kann man jede Zahl durch A, B, C, D - - - P, Q ausdrücken: z. B. bey 8534 - - - - 12 wäre A=8, B=5, C=3, D=4 - - - - P=1, Q=2.

1) Iſt nun die Endziffer Q=0, folglich die Zahl ſelbſt=A, B, C, D - - - P 0; ſo iſt ſie=A, B, C, D - - - P. 10: alſo theilbar durch 10. (37. §. Zuſ.) Es iſt aber 10 ſowohl durch 2 als 5 theilbar (daſ.): alſo iſt es auch die Zahl A, B, C, D - - - P, 0 (43. §.).

2) Iſt die Endziffer Q=5; ſo iſt die Zahl =A, B, C, D - - - P, 5=A, B, C - - - P, 0+5: es iſt aber ſowohl A, B, C - - - P, 0 als 5 durch 5 theilbar, jenes wegen (n. 1.); daher iſt es auch A, B, C - - - P, 0+5 (41. §.).

3) Iſt endlich bey A, B, C - - - P, Q=A, B, C - - - P, 0+Q die Endziffer Q eine gerade Ziffer; ſo iſt ſie durch 2 theilbar (38. §.): da alſo auch A, B, C - - - P, 0 durch 2 theilbar ſeyn muß (n. 1.); ſo iſt es auch A, B, C - - - P, 0+Q (41. §.).

50. §. Lehrsatz.

Wenn man die Ziffern einer Zahl A, B, C ... P, Q, ohne auf ihre Decimal-Ordnungen Rücksicht zu nehmen, als wenn sie einfache Einheiten gälten, in eine Summe bringet, und diese Summe durch 9 oder 3 theilbar ist; so muß es auch die Zahl selbst seyn: ist aber jene durch 9 oder 3 nicht theilbar; so kann es auch diese nicht seyn.

Beweis. 1) Man nehme an, daß 10 durch 1^1; 100 durch 1^2; 1000 durch 1^3; und überhaupt 1000...0 durch 1^n der Kürze halber ausgedrückt wird, so, daß 1, 2, 3 ... n nichts anders, als die Mengen der Nullen andeuten, welche an der Einheit hängen sollen.

2) Es ist aber $10=9+1$; $100=99+1$; $1000=999+1$ und s. f.: also kann man 1^1 durch 9^1+1; 1^2 durch 9^2+1; 1^3 durch 9^3+1, und überhaupt 1^n aus (n. 1.) durch 9^n+1 ausdrücken, so, daß nun 1, 2, 3 ... n die Mengen der 9 anzeigen, welche neben einander stehen sollen.

3) Sollen nun nach der höchsten Ziffer A einer Zahl A, B, C ... P, Q, R noch n Ziffern folgen; so kann man diese Zahl auf die nachstehende Art ausdrücken, wo n, n — 1, n — 2 .... 2, 1 in der Bedeutung (n. 1. 2.) genommen werden müssen.

$$A.1^n+B.1^{n-1}+C.1^{n-2}+\ldots+P.1^2+Q.1^1+R$$

oder

$$A(9^n+1)+B(9^{n-1}+1)+C(9^{n-2}+1)+\ldots+P(9^2+1)+Q(9^1+1)+R,$$

und

und dieſes giebt

$$A.9^n+B.9^{n-1}+C.9^{n-2}+\ldots+P.9^2+Q.9^1$$
$$+A+B+C+\ldots+P+Q+R.$$

4) Es iſt aber einleuchtend, daß $9^n, 9^{n-1}, 9^{n-2} \ldots 9^2, 9^1$, wegen (n. 2.), gewiß durch 9 und daher auch durch 3 theilbare Zahlen ſind (43. §.): alſo muß auch die Summe $A.9^n+B.9^{n-1}+C.9^{n-2}+\ldots+P.9^2+Q.9^1$ durch 9 und 3 theilbar ſeyn (41. 40. §.). Iſt daher noch $A+B+C+\ldots+P+Q+R$ die Summe der Ziffern von der Zahl A, B, C---P, Q, R durch 9 oder 3 theilbar; ſo muß es auch die Zahl A, B, C, --- P, Q, R ſeyn (41. §.): iſt aber jene Summe durch 9 oder 3 nicht theilbar; ſo kann es auch dieſe Zahl nicht ſeyn (41. §. 1. Zuſ.).

51. §. Aufgabe.

Es iſt eine aus einfachen Factoren zuſammengeſetzte Zahl gegeben (36. §.); wie kann man nicht nur alle ihre einfachen Factoren, ſondern auch alle zuſammengeſetzte beſtimmen, durch welche dieſelbe Zahl theilbar ſeyn mag?

Auflöſung. Ob die gegebene Zahl durch 2, 3, 5 theilbar iſt, dieſes kann man nach (49. 50. §.) unterſuchen: iſt ſie dadurch wirklich theilbar; ſo dividire man dieſelbe Zahl durch ſolchen Factor: findet man auch den Quotienten durch einen ſolchen Factor theilbar; ſo dividire man auch ihn durch eben den Factor, und ſo verfahre man mit jedem neuen Quotienten, bis man auf einen kömmt, welcher eine abſo-

abſolute Primzahl iſt, ſich daher durch keine andere Zahl ohne Reſt dividiren läßt. Auf dieſe Art werden die gebrauchten Diviſoren, und der letzte Quotient alle die einfachen Factoren geben, woraus die vorgelegte Zahl beſtehet.

Die Urſache hievon iſt leicht einzuſehen: weil nämlich der Quotient mit dem Diviſor multiplicirt den Dividendus zum Product geben muß; ſo giebt hier das Product aus dem letzten Quotienten in den letzten Diviſor den vorletzten Quotient, folglich giebt eben das Product mit dem vorletzten Diviſor multiplicirt den nächſt vorhergehenden Quotient, u. ſ. f. bis man auf das Product aus dem letzten Quotienten in alle Diviſoren kömmt, welches die gegebene Zahl zurückſtellen muß. Daß ferner auſſer dieſen einfachen Factoren, andere von ihnen unterſchiedene in der vorgelegten Zahl nicht ſtecken können, dieſes folgt aus (48. §. 5. Zuſ.).

Hat man alle einfache Factoren der gegebenen Zahl auf dieſe Weiſe gefunden; ſo multiplicire man nun jeden von ihnen mit jedem andern, hierauf mit zweenen andern, dann mit drey andern u. ſ. f.: alle dieſe Producte werden die noch übrigen möglichen zuſammengeſetzten Factoren geben (36. §.), durch welche die gegebene Zahl theilbar iſt.

Beyſpiel.

Man ſoll alle Factoren von 360 beſtimmen

I. $\frac{360}{2} = 180$

$\frac{180}{2} = 90$

$\frac{90}{2} = 45$

$\frac{45}{3} = 15$

$\frac{15}{3} = 5$

II. Alle einfache Factoren.

1. 2. 2. 2. 3. 3. 5

III. Zuſammengeſetzte aus zweenen.

2. 2 = 4
2. 3 = 6
3. 3 = 9
2. 5 = 10
3. 5 = 15

IV. Zuſammengeſetzte aus dreyen.

2. 2. 2 = 8
2. 2. 3 = 12
2. 3. 3 = 18
2. 2. 5 = 20
2. 3. 5 = 30
3. 3. 5 = 45

V. Zuſammengeſetzte aus vieren.

2. 2. 2. 3 = 24
2. 2. 3. 3 = 36
2. 2. 2. 5 = 40
2. 2. 3. 5 = 60
2. 3. 3. 5 = 90

VI. Zuſammengeſetzte aus Fünfen.

2. 2. 2. 3. 3 = 72
2. 2. 2. 3. 5 = 120
2. 2. 3. 3. 5 = 180

VII. Zuſammengeſetzte aus allen.

2. 2. 2. 3. 3. 5 = 360.

Alle Factoren der Zahl 360

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60
72, 90, 120, 180, 360.

52. §. Aufgabe.

Man ſoll einen gegebenen Bruch $\frac{A}{B}$ durch kleinſte Zahlen ohne Veränderung ſeines Werthes ausdrücken.

Auflöſung. Man ſuche das größte gemeinſchaftliche Maaß des Zählers A und Nenners B nach (46. §.); dividire hierauf durch daſſelbe den Zähler ſowohl als den Nenner, und behalte die Quotienten ſtatt des gegebenen Zählers und Nenners, welche unter ſich Primzahlen (47. §.), daher die kleinſten Zahlen ſeyn werden, wodurch ſich der Bruch $\frac{A}{B}$ ausdrücken läßt (48. §.): haben hingegen A und B kein gemeinſchaftliches Maaß (46. §. Anmerk.); ſo ſind A und B unter ſich Primzahlen (36. §.), daher ſind auch kleinere Zahlen unmöglich, durch welche man $\frac{A}{B}$ auszudrücken ſucht (48. §.).

Oder man zerlege den Zähler und Nenner in ihre einfachen Factoren (51. §.), ſtreiche hierauf die gemeinſchaftlichen weg, welches ſo viel heißt, als den Zähler und Nenner durch das größte gemeinſchaftliche Maaß dividiren (48. §. 7. Zuſ.): haben ſie hingegen keine gemeinſchaftliche Factoren; ſo haben ſie auch kein gemeinſchaftliches Maaß (48. §. 6. Zuſ.), und daher iſt, wie oben, unmöglich, den gegebenen Bruch durch kleinere Zahlen auszudrücken.

Zusatz.

Wenn drey Zahlen A, B, C, wo $A > B$ und $B > C$ seyn soll, gegeben werden, und man das gröſste gemeinschaftliche Maaſs wissen will, durch welches dieselben Zahlen dividirt drey unter sich Primzahlen zu Quotienten geben würden; so kann man erstlich das gröſste Maaſs μ von A und B, und dann das gröſste Maaſs von μ und C nach (46. §.) suchen, welches das gröſste gemeinschaftliche Maaſs der Zahlen A, B, C seyn würde: oder man kann A, B, C Zahlen in ihre einfachen Factoren zerlegen (51. §.) und dann ist das Product aus denjenigen Factoren, welche den drey Zahlen A, B, C gemein sind, zugleich das gröſste gemeinschaftliche Maaſs derselben Zahlen. (48. §. 8. Zus.).

Sey $A = 2525$; $B = 475$; $C = 275$. Nun ist nach (46. §.) 25 das gröſste gemeinschaftliche Maaſs von A und B, und 25 ist auch nach (46. §.) das gröſste Maaſs von 25 und C; also ist 25 das gröſste gemeinschaftliche Maaſs von A, B, C.

Wäre $A = 1728$; $B = 1152$; $C = 248$; so fände man nach (46. §.) die Zahl 576 für das gröſste Maaſs von A und B, und 8 für das gröſste Maaſs von 576 und C: also wäre 8 das gröſste gemeinschaftliche Maaſs der Zahlen A, B, C.

Anhang des Herausgebers.

Anmerkung zum 51ten §.

Es ist einleuchtend, daß bey der zweyten Auflösung dieser Aufgabe (52. §.) alles darauf ankömmt, daß man die gegebene Zahl, wofern es möglich ist, in alle ihre einfachen Factoren zu zerlegen wisse, welches (51. §.) lehren soll: es ist auch die Aufsuchung solcher Factoren nicht nur in der theoretischen Mathematik, wovon in der Folge Beyspiele vorkommen werden, sondern auch in der angewandten gebräuchlich. Wenn die gegebene Zahl aus keinen andern Factoren bestehet, als aus 2, 3, 5, und vielleicht noch nur aus einer von diesen unterschiedenen Primzahl; so kann man diese Zahlen nach (49. 50. 51. §.) leicht entdecken. Es kann aber geschehen, und dafür giebt es unzählbare Fälle, daß eine Zahl auch aus andern einfachen Factoren, wie 7, 11, 13, 17, 19, 23 u. s. f. zusammengesetzt ist, und nun, weil man solche Kennzeichen der Theilbarkeit für diese Primzahlen, wie für 2, 3, 5 in (49. 50. §.), hier nicht vorgetragen hat, läßt sich fragen: auf was für eine Art kann man wohl erkennen, ob eine gegebene Zahl nicht aus andern von 2, 3, 5 unterschiedenen einfachen Factoren bestehet, und was das für Zahlen sind? Ueber die beste Beantwortung dieser Frage haben verschiedene Mathematikverständige geschrieben; ich will hier nur einige anführen. Des Hrn. Hindenburg dahin gehörige Schrift (a) verdient vor andern gelesen zu werden, womit man noch einen Aufsatz vom Hrn. Klügel, (b) und einen vom Hrn. Segner, nebst

Anmer-

Anmerkungen des Hrn. Hindenburg, (b) verbinden kann. Für die Ausübung sind indessen die schon berechneten Tafeln hinreichend, welche meistentheils die einfachen Factoren der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen enthalten: ausser den Felkelschen und andern Tafeln, kann man sich dazu der Lambertschen, (c) und vorzüglich des Vegaischen (d) mit Vortheile bedienen. Vermittelst solcher Tafeln kann man daher die einfachen Factoren einer vorgelegten und in den Tafeln vorkommenden Zahl durch bloßes Nachschlagen finden, woraus sich hierauf die übrigen zusammengesetzten Factoren nach (51. §.) leicht ergeben.

(a) Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen und Abmessen bequem und sicher zu finden. Leipzig, 1776.

(b) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. 2tes Stück aufs Jahr 1787.

(c) Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen u. s. f. Berlin 1770.

(d) Logarithmische, Trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien 1783.

53. §. Lehrsatz.

Es mag ein Product ABC---P aus so viel man will durch μ nicht theilbaren Zahlen A, B, C---P bestehen; so kann man es doch allemahl als die Summe zweyer Producte betrachten, wovon das eine Product eine gewisse ganze Zahl und die Zahl μ, das andere aber die Reste, welche die Zahlen A, B, C, D---P

durch μ dividirt geben ſollen, zu ſeinen Factoren hat.

Beweis. I. Es ſeyen a, b, c, d die ganzen Quotienten, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Reſte, welche die Zahlen A, B, C, D durch μ dividirt geben; ſo iſt:

$$A = a\mu + \alpha;\ B = b\mu + \beta;$$
$$C = c\mu + \gamma;\ D = d\mu + \delta.$$

II. Das Product aus zwoen Zahlen A und B iſt alſo

$$AB = (a\mu + \alpha)(b\mu + \beta)$$
$$= (ab\mu + \alpha b + a\beta)\mu + \alpha\beta.$$

Setzt man $ab\mu + \alpha b + a\beta = Q$: ſo iſt $AB = Q\mu + \alpha\beta$.

III. Das Product aus drey Zahlen A, B, C, iſt nach I.) II.)

$$ABC = AB(c\mu + \gamma) = (Q\mu + \alpha\beta)(c\mu + \gamma)$$
$$= (Qc\mu + \alpha\beta c + Q\gamma)\mu + \alpha\beta\gamma:$$

Setzt man $Qc\mu + \alpha\beta c + Q\gamma = R$; ſo iſt $ABC = R\mu + \alpha\beta\gamma$.

IV. Das Product aus vier Zahlen ABCD iſt ferner nach I.) III.)

$$ABCD = ABC(d\mu + \delta) = (R\mu + \alpha\beta\gamma)(d\mu + \delta)$$
$$= (Rd\mu + \alpha\beta\gamma d + R\delta)\mu + \alpha\beta\gamma\delta.$$

Setzt man $Rd\mu + \alpha\beta\gamma d + R\delta = S$; ſo iſt $ABCD = S\mu + \alpha\beta\gamma\delta$.

V. Wenn man nun die Producte II.) III.) IV.), welche aus zwoen, drey, und vier Zahlen beſtehen, erwäget; ſo findet man, daß der Satz für ſie gewiß gielt: man hat aber kein Recht daraus zu ſchließen, daß der Satz auch für alle andere mögliche Producte, die nämlich aus fünf, ſechs,

sechs, sieben, acht, neun u. s. f. ohne Ende, Factoren bestehen, gelten muß; dieses würden diejenigen thun, welche die sogenannte unvollkommene Induction für eine sichere Beweisart solcher Sätze halten, da sie doch nirgends einen so unvollkommenen Beweis abgiebt, wie in der Mathematik, wo jeder Satz auf die überzeugendste Art dargethan werden muß, so, daß er nach geschehenem Beweise nicht in den geringsten Zweifel gezogen werden kann. Vielleicht giebt es, könnte man nämlich mit Recht einwenden, unter den unzählbaren möglichen Producten auch solche, die von dem angeführten Satze abweichen, und daher ist der Schluß aus einigen geprüften Producten auf alle mögliche so lang nicht am sichersten, bis man nicht die Unmöglichkeit einer solchen Abweichung darthut.

VI. Will man demnach haben, daß der Satz, dessen Richtigkeit für die aus zweenen, drey, und vier Factoren bestehenden Producte in II.) III.) IV.) erwiesen ist, für alle mögliche Producte gelten soll; so muß man darthun, daß davon eins unter diesen möglichen Producten so wenig abweichen kann, wie wenig dieses bey dem Producte geschieht, welches aus vier Zahlen bestehet, und man wird dieses leisten, wenn man aus der Natur der Arbeit, welche bey dieser Untersuchung zum Grunde liegt, beweiset, daß, wenn der angeführte Satz von was immer für einer unbestimmten Anzahl n von Factoren wahr wäre, er auch von der um Eins grösseren Anzahl $n+1$ von ihnen wahr seyn müßte; denn es würde hieraus folgen, daß der Satz auch

für $4+1=5$ Factoren gelten muß, indem er für 4 Factoren in IV.) wirklich gielt, und nun müßte er auch für $5+1=6$ Factoren, daher auch für $6+1=7$ Factoren, u. s. f. für jede nächst grössere Anzahl von ihnen gelten.

VII. Man nehme also an, es sey das aus einer Anzahl n von Factoren bestehende Product $ABCD\ldots P=Z\mu+\alpha\beta\gamma\delta\ldots\varrho$, und Q sey ein neuer Factor, welcher durch μ dividirt den ganzen Quotienten q und den Rest σ geben soll; so ist $Q=q\mu+\sigma$, und nun ist das Product aus $n+1$ Factoren A, B, C..., P, Q

$$ABC\ldots PQ=ABC\ldots P(q\mu+\sigma)$$
$$=(Z\mu+\alpha\beta\gamma\delta\ldots\varrho)(q\mu+\sigma)=$$
$$(Zq\mu+\alpha\beta\gamma\ldots\varrho q+Z\sigma)\mu+\alpha\beta\gamma\delta\ldots\varrho\sigma.$$

Heißt nun Z eine gewisse ganze Zahl, und sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots\varrho$ diejenigen Reste, welche die n Factoren A, B, C, D ... P durch μ dividirt geben sollen; so ist auch was im letzten Ausdrucke des Products ABC.....PQ zwischen den Klammern stehet, eine ganze Zahl, und $\alpha\beta\gamma\delta\ldots\varrho\sigma$ ist das Product aus den Resten, welche nun die $n+1$ Factoren A, B, C... P, Q durch μ dividirt geben sollen, das heißt demnach: wenn das Product ABC...P aus n Factoren dem Satze angemessen ist; so muß der Satz auch für $n+1$ Factoren gelten.

Anmerkung.

Ein anderes Beyspiel dieser vortrefflichen und seinzigen, bey solchen Untersuchungen überzeugenden Beweisart, habe ich

im

im 25ten §. gegeben: *Jac.* Bernoulli hat sich derselben bedient, um allgemeine Glieder gewisser Reihen zu bestimmen, (a) und ich darf wohl dem Hrn. Hofrath Kästner glauben, daß Hr. Hausen (b) der erste unter den deutschen Mathematikern gewesen ist, welcher sich eben der Beweisart statt der sonst gewöhnlichen Induction bedient hatte, Herr Hofrath selbst aber scheint den ersten Gebrauch davon in der Abhandlung: Theorematis Newtoniani de relationibus inter coefficientes aequationis determinatae, et summas potentiarum radicum, demonstratio (c) gemacht zu haben, so wie er hierauf bey vielen andern wichtigen Untersuchungen sich eben der Beweisart am glücklichsten zu bedienen gewußt hat: sie beruhet auf einem allgemeinen Grundsatze, den ich hier anführen will, um alle überflüßige Worte in der Folge vermeiden zu können, welches auch die einzige Ursache war, warum ich hier diese Beweisart so zu erläutern gesucht habe, daß jeder Anfänger leicht einsehen möge, worauf es bey ihr ankömmt, um die Richtigkeit eines Satzes ausser allen Zweifel zu setzen.

(a) *Ars Conjectandi.* Part. II. Cap. 3

(b) *Element. Arithm.* Prop. 23.

(c) *Dissertationes Mathem. et Physic.* I.

54. §. Grundsatz.

Wenn a, b, c --- p, q einerley Art Grössen sind, und man einige von ihnen, z. B. zwo a und b auf eine gewisse Art unter einander verbindet, sodann die

Vorausſetzung machet, daß das, was aus ähnlicher Verbindung einer gewiſſen Anzahl v von Gröſſen entſtehet, ſich nach eben dem Geſetze richtet, wornach ſich das richtete, was aus der Verbindung zweyer Gröſſen a und b entſtund, und man hieraus darthut, daß auch das, was aus ähnlicher Verbindung der nächſt gröſſeren Anzahl $v+1$ derſelben Gröſſen entſtehet, ſich nach eben dem Geſetze richten muß; ſo wird dieſes Geſetz allemahl Statt finden, man mag ſoviel man will Gröſſen unter einander verbinden.

Anmerkung.

Die Richtigkeit dieſes allgemeinen Grundſatzes erhellet aus vor. §. VI.), und man kann den weſentlichen Unterſchied zwiſchen den Schlüſſen nach dieſem Grundſatze, und denen, welche nach der gewöhnlichen unvollkommenen Induction zu geſchehen pflegen, mit ein paar Worten ſo erklären.

Es ſey von dieſem Satze die Rede: bey einer gewiſſen Verbindung was immer für einer Anzahl von Gröſſen a, b, c ... p, q findet ein Geſetz G Statt.

Nun geſchieht der Beweis dieſes Satzes nach der gewöhnlichen Induction auf dieſe Art. Man hat zwo Gröſſen a und b, hierauf drey a, b, c, hernach viere a, b, c, d unter einander verbunden, und bey jeder Verbindung das Geſetz G gültig gefunden: alſo muß G allemahl gelten, man mag ſoviel man will Gröſſen a, b, c ... p, q unter einander verbin-

verbinden. Die Urſache demnach, warum man G für alle mögliche Verbindungen gelten läßt, iſt, weil man G bey der Verbindung zwoer, drey und vier Gröſſen gefunden hat, nicht aber weil es bewieſen worden iſt, daß G für ſoviel man will Gröſſen gelten muß, wenn es für einige gielt.

Nach dem angeführten Grundſatze hingegen geſchieht der Schluß auf dieſe Art. Man hat das Geſetz G bey der Verbindung zwoer Gröſſen a und b gefunden; man hat aber auch dargethan, daß die Gröſſen a, b, c--- p, q und die Verbindungen, welche mit ihnen vorgenommen werden, von der Beſchaffenheit ſind, daß G bey der Verbindung der nächſt gröſſeren Anzahl n+1 von ſolchen Gröſſen Statt haben muß, wenn es bey der Verbindung einer gewiſſen Anzahl n von ihnen Statt hat, und wer dieſes dargethan hat, der hat bewieſen, daß die Gröſſen a, b, c --- p, q und die damit vorzunehmenden Verbindungen von der Natur ſind, daß G bey jeder Verbindung, man mag dazu ſoviel man will Gröſſen nehmen, Statt haben muß, ſobald G bey der Verbindung nur zwoer Gröſſen Statt hat: alſo muß das Geſetz G, welches man bey der Verbindung zwoer Gröſſen wirklich fand, für jede Verbindung gelten, es mögen dazu ſoviel man immer will Gröſſen genommen werden.

Der V. Abschnitt.

Anwendung der Buchstaben-Rechenkunst auf die Lehre von zusammenhängenden Brüchen, und die Erfindung der um Eins unterschiedenen Vielfachen zwoer Primzahlen.

55. §. Erklärung.

Ein zusammenhängender Bruch (fractio continua) wird hier derjenige Bruch genannt, welcher eine ganze Zahl zum Zähler hat, und dessen Nenner aus zween Theilen bestehet, wovon der eine Theil eine ganze Zahl und der andere ein Bruch ist, dessen Nenner wieder aus einer ganzen Zahl und einem Bruche u. s. f. bestehet.

Z. B. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$

56. §. Aufgabe.

Einen vorgelegten unächten Bruch $\frac{A}{B}$ in einen zusammenhängenden (55. §.) zu verwandeln.

Auflösung. Man dividire den Zähler A durch den Nenner B, welcher bey der angenommenen Voraussetzung kleiner als der Zähler ist, und merke sowohl den herausgebrachten Quotient, als den Rest, wofern einer übrig bleibt:

hierauf

hierauf dividire man den Nenner B durch den gefundenen Rest, und merke den neuen Quotient und Rest; sodann dividire man durch diesen neuen Rest den nächst vorhergehenden Rest, und merke den Quotient und Rest, welchen diese Division giebt; und so dividire man durch jeden neuen Rest den nächst vorhergehenden Rest, bis man auf einen Rest $= 0$ oder $= 1$ kömmt, ob gleich hier der zweyte Fall vorausgesetzt wird, welcher sich bey zwey unter sich Primzahlen A und B ereignen soll (46. §. Anmerk.).

2) Wenn also C, D, E, F, G u. s. f. die Quotienten, und a, b, c, d .... die Reste in der Bedeutung (n. 1.) heißen; so hat man aus der Natur der Division

$$\frac{A}{B} = C + \frac{a}{B}; \quad \frac{B}{a} = D + \frac{b}{a};$$

$$\frac{a}{b} = E + \frac{c}{b}; \quad \frac{b}{c} = F + \frac{d}{c};$$

$$\frac{c}{d} = G + \frac{e}{d}; \text{ u. s. f.}$$

3) Nun ist aus (n. 2.)

$$\frac{a}{B} = 1 : \frac{B}{a} = 1 : \left(D + \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{D + \frac{b}{a}},$$

$$\frac{b}{a} = 1 : \frac{a}{b} = 1 : \left(E + \frac{c}{b}\right) = \frac{1}{E + \frac{c}{b}},$$

$$\frac{c}{b} = 1 : \frac{b}{c} = 1 : \left(F + \frac{d}{c}\right) = \frac{1}{F + \frac{d}{c}},$$

$$\frac{d}{c} = 1 : \frac{c}{d} = 1 : \left(G + \frac{e}{d}\right) = \frac{1}{G + \frac{e}{d}},$$

u. s. f.

Also

Alſo iſt in (n. 2.) der gegebene Bruch:

$$\frac{A}{B} = C + \cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E+\cfrac{1}{F+\cfrac{1}{G+\frac{0}{d}}}}}$$

4) Einen vorgelegten unächten Bruch $\frac{A}{B}$ kann man alſo durch einen zuſammenhängenden ſo ausdrücken. Zum erſten Quotienten C in (n. 1. 2.) addire man einen Bruch, welcher Eins zum Zähler, und zum Nenner den zweyten Quotient D und einen Bruch hat, welcher ebenfalls Eins zum Zähler und zum Nenner den dritten Quotient E und einen Bruch haben muß, welcher ferner Eins zum Zähler und zum Nenner den vierten Quotient F und einen Bruch u. ſ. f. haben ſoll.

Beyſpiel.

Man ſoll $\frac{124}{37}$ durch einen zuſammenhängenden Bruch ausdrücken.

Die Diviſion nach (n. 1.) giebt folgende Rechnung:

37 (124) 3 Erſter Quotient.
111
Reſt 13 (37) 2 Zweyter Quotient.
26
Reſt 11 (13) 1 Dritter Quotient.
11
Reſt 2 (11) 5 Vierter Quotient.
10
Reſt 1 (2) 2 Fünfter Quotient.
2
0

Daher

Daher $\frac{124}{37} = 3 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}}$

4. Zusatz.

Der letzte Theil $\frac{1}{G+\frac{e}{d}}$ des gleichgültigen zusammenhängenden Bruches, enthält im Nenner ausser dem Quotienten G noch einen Bruch $\frac{e}{d}$, welcher den mit dem Quotienten G zusammengehörigen Rest e zum Zähler, und den nächst vorhergehenden mit dem Quotienten F zusammengehörigen Rest d zum Nenner hat.

5. Zusatz.

Aus dem zusammenhängenden Bruche, durch welchen ein vorgelegter unächter Bruch $\frac{A}{B}$ ausgedrückt wird (Auflös. n. 3.), lassen sich folgende Brüche machen:

I. $C = \frac{C}{1}$

II. $C + \frac{1}{D} = \frac{CD+1}{D}$

III. $C + \frac{1}{D+\frac{1}{E}} = \frac{CDE+E+C}{DE+1}$

IV. $C + \frac{1}{D+\frac{1}{E+\frac{1}{F}}} = \frac{CDEF+EF+CF+CD+1}{DEF+F+D}$ u. s. f.

Diese

Dieſe Brüche ſollen in der Folge Partialbrüche heißen; und zwar ſoll der Bruch I.), welcher aus dem erſten Quotienten C (in der Bedeutung der Auflöſ. der Aufgabe n. 1. 2.) beſtehet, der erſte Partialbruch, der Bruch II.), welcher aus zween erſten Quotienten C, D beſtehet, der zweyte Partialbruch, der Bruch III.), welcher aus drey erſten Quotienten C, D, E beſtehet, der dritte Partialbruch u. ſ. f. genannt werden.

57. §. Aufgabe.

Wie kann man unmittelbar aus den Quotienten, welche bey der Verwandlung eines ächten Bruches $\frac{A}{B}$ in einen zuſammenhängenden erhalten werden (56. §. Auflöſ. n. 1. 2.) die Partialbrüche (daſ. 2. Zuſ.) angeben?

Auflöſung. Man muß zeigen, auf was für eine Art man aus den bekannten Quotienten die Zähler und Nenner der verlangten Partialbrüche machen kann: dieſes ſoll aber ſo geſchehen.

Wie in der nachſtehenden Tafel ſchreibe man die bekannten Quotienten (56. §. Auflöſ. n. 1. 2.) in einer verticalen Reihe I.) unter einander in der Ordnung, wie ſie erhalten worden ſind; daher den zweyten D unter dem erſten C, den dritten E unter dem zweyten D u. ſ. f.

Um nun aus dieſen Quotienten die Zähler und Nenner der verlangten Partialbrüche, wie ſie unten in II.) und III.) angezeigt ſind, herzuleiten, nehme man den erſten Quotient C

zum

zum Zähler in II.) und Eins zum Nenner in III.) des erſten Partialbruches, hierauf multiplicire man jenen und dieſen mit dem in I.) folgenden zweyten Quotienten D; ſo wird das Product CD um Eins vermehrt den Zähler in II), und das Product 1. D = D den Nenner in III.) des zweyten Partialbruches geben; ferner multiplicire man ſowohl den Zähler CD+1 in II.) als den Nenner D in III.) des zweyten Partialbruches mit dem in I.) nächſt folgenden dritten Quotienten E, und addire zum erſten Producte CDE+E den Zähler C und zum zweyten Producte DE den Nenner 1 des erſten Partialbruches; ſo wird die erſte Summe den Zähler in II.), und die zweyte den Nenner in III.) des dritten Partialbruches geben: und nun kann man überhaupt aus jedem ſchon gefundenen $n$ten Zähler in II.) und Nenner in III.) den nächſt folgenden $(n+1)$ten Zähler in II.) und Nenner in III.) beſtimmen, wenn man ſowohl den $n$ten Zähler in II.) als den $n$ten Nenner in III.) mit dem in I.) nächſt folgenden $(n+1)$ten Quotienten multiplicirt, hierauf zum erſten Producte den $(n-2)$ten Zähler in II.), und zum zweyten Producte den $(n-1)$ten Nenner in III.) addirt.

I.	Die Zähler II.	Die Nenner III.
C	C	1
D	CD+1	D
E	CDE+E+C	ED+1
F	CDEF+EF+CF+CD+1	DEF+F+D
G	CDEFG+EFG+CFG +CDG+G+CDE+E+C	DEFG+FG+DG+ED+1

Beweis. Aus (56. §. 2. Zuſ.) erhellet die Richtigkeit dieſer Auflöſung für die vier erſten Partialbrüche: wegen (54. §.) wird alſo dieſelbe auch für alle folgende Partialbrüche gelten müſſen, wenn man darthut, daß, wenn ſie von n erſten Partialbrüchen gielt, dieſelbe auch für den $(n+1)$ten Partialbruch gelten muß, und dieſes kann ſo geſchehen:

Man nehme an, daß M, N, P, Q in der Bedeutung (56. §. Auflöſ. n. 1. 2.) der $(n-2)$te, $(n-1)$te, nte, $(n+1)$te, Quotienten ſind: es ſollen ferner $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, der $(n-2)$te und $(n-1)$te Partialbruch ſeyn; ſo iſt wegen den Begriffen (56. §. 2. Zuſ.)

$$C+\frac{1}{D+1}=\frac{\alpha}{\beta}; \quad \text{und} \quad C+\frac{1}{D+1}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Der $(n-2)$te Partialbruch $\overline{E+1}$ Der $(n-1)$te Partialbruch $\overline{E+1}$

$$+\frac{1}{M} \qquad +\frac{1}{M+\frac{1}{N}}$$

Und weil die Auflöſung der Aufgabe bis zum nten Partialbruch gelten ſoll; ſo iſt derſelbe

$$C+\frac{1}{D+1}=\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}.$$

$$\overline{E+1}$$

$$+\frac{1}{M+\frac{1}{N+\frac{1}{P}}}$$

Der

Der $(n+1)$te Partialbruch, welcher aus $n+1$ Quotienten C, D, E - - - M, N, P, Q wegen der Begriffe (56. §. 2. Zuſ.) beſtehen muß, iſt alſo:

$$C+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E+\ddots+\cfrac{1}{M+\cfrac{1}{N+\cfrac{1}{P+\cfrac{1}{Q}}}}}}$$

Daher findet man ihn aus dem $n$ten Partialbruche $\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$, wofern man hier $P+\frac{1}{Q}$ ſtatt P ſetzt: der $(n+1)$te Partialbruch iſt alſo:

$$\frac{\gamma\left(P+\frac{1}{Q}\right)+\alpha}{\delta\left(P+\frac{1}{Q}\right)+\beta}=\frac{(\gamma P+\alpha)Q+\gamma}{(\delta P+\beta)Q+\delta}.$$

Und nun ſieht man, daß er aus dem $n$ten und $(n-1)$ten Partialbruche eben ſo erhalten wird, wie der $n$te aus dem $(n-1)$ten und $(n-2)$ten.

1. Zuſatz.

Das Product aus dem Zähler des $n$ten Partialbruches in den Nenner des $(n+1)$ten iſt hier:

$$(\gamma P+\alpha)\left((\delta P+\beta)Q+\delta\right)=(\gamma P+\alpha)(\delta P+\beta)Q+\delta(\gamma P+\alpha)$$

Und das Product aus dem Zähler des $(n+1)$ten Partialbruches in den Nenner des $n$ten ist hier:

$$\big((\gamma P+\alpha)Q+\gamma\big)(\delta P+\beta)=(\gamma P+\alpha)(\delta P+\beta)Q+\gamma(\delta P+\beta)$$

Ziehet man dieses Product von jenem ab; so ist der Unterschied

$$\delta(\gamma P+\alpha)-\gamma(\delta P+\beta).$$

Es war aber $\frac{\gamma}{\delta}$ der $(a-1)$te Partialbruch, woraus der Satz erhellet. Wenn man des $(n+1)$ten Partialbruches Zähler mit dem Nenner des $n$ten, und den Zähler dieses Partialbruches mit dem Nenner jenes multiplicirt; so ist der Unterschied der Producte so groß, als die Differenz $\delta(\gamma P+\alpha)-\gamma(\delta P+\beta)$ der Producte, welche aus den Zählern und Nennern des $n$ten und $(n-1)$ten Partialbruches auf gleiche Art entstehen würden.

2. Zusatz.

Thut man dieses bey den zwey ersten Partialbrüchen (56. §. 2. Zus.); so findet man die Differenz der Producte

$$(CD+1).1-C.D=1.$$

Und thut man es bey dem zweyten und dritten Partialbruche (56. §. 2. Zus.); so ist die Differenz der Producte.

$$(CD+1)(DE+1)-(CDE+E+C)D=1.$$

Das heißt: wenn man zween nächste Partialbrüche in (56. §. 2. Zus.) nimmt; so ist der Unterschied der Producte, welche entstehen, wenn man den Zähler jedes Bruches mit dem Nenner des andern multiplicirt, allemahl $=1$. Dieser

Satz

Satz muß nun wegen (1. Zuf.) auch für den dritten und vierten, vierten und fünften, u. ſ. f. ohne Ende, Partialbruch gelten. (54. §.).

3. Zuſatz.

Es war $\frac{\alpha}{\beta}$ der $(n-2)$te, $\frac{\gamma}{\delta}$ der $(n-1)$te, und $\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$ der $n$te Partialbruch: ziehet man alſo dieſen von jenem ab; ſo iſt die Differenz des $n$ten vom $(n-1)$ten Partialbruche

$$\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta} = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\delta(P\delta+\beta)} = \frac{\pm 1}{\delta(P\delta+\beta)}.$$

Denn daß der Zähler $= 1$ ſeyn muß, dieſes erhellet aus (2. Zuf.), weil man aber noch nicht weiß, ob $\beta\gamma > \alpha\delta$ oder $\beta\gamma < \alpha\delta$ iſt; ſo kann man nicht angeben, ob $+1$ oder -1 zum Zähler genommen werden ſolle.

Geſetzt, es ſey der $(n-1)$te Partialbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ kleiner als der $(n-2)$te $\frac{\alpha}{\beta}$; ſo iſt $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma\beta-\alpha\delta}{\delta\beta}$ etwas verneintes, und in dieſem Fall muß der Unterſchied des $n$ten Partialbruches vom $(n-1)$ten verneint $= \frac{-1}{\delta(P\delta+\beta)}$ ſeyn, und ſo iſt der $n$te gröſſer als der $(n-1)$te.

Wäre aber der $(n-1)$te Partialbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ gröſſer als der $(n-2)$te $\frac{\alpha}{\beta}$; ſo müßte $\frac{\gamma\beta-\alpha\delta}{\delta\beta}$ etwas bejahtes ſeyn, folglich wäre auch der Unterſchied des $n$ten Partialbruches vom $(n-1)$ten bejaht $=\frac{+1}{\delta(P\delta+\beta)}$, und ſo wäre der $n$te kleiner als der $(n-1)$te.

4. Zuſatz.

Wenn man die erſten Partialbrüche in (56. §. 2. Zuſ.) betrachtet; ſo wird man finden, daß der zweyte gröſſer als der erſte, der dritte kleiner als der zweyte, der vierte gröſſer als der dritte iſt; wegen (3. Zuſ.) muß alſo der fünfte kleiner als der vierte, der ſechſte gröſſer als der fünfte, u. ſ. f. ohne Ende muß jeder $n$te Partialbruch gröſſer oder kleiner als der nächſt vorhergehende $(n-1$ te ſeyn, nachdem die Ordnungszahl n, welche nämlich ausdrücket, ob der $n$te Partialbruch der erſte, zweyte, dritte, vierte u. ſ. f. gerad oder ungerad iſt. Wenn demnach ein Bruch $\frac{A}{B}$ gegeben wird; ſo kann man für ihn nicht nur alle Partialbrüche, ſondern auch die Differenzen derſelben leicht angeben, indem die Differenz zwiſchen zween nächſten Brüchen allemahl Eins zum Zähler und das Product aus ihren Nennern zum eigenen Nenner haben muß (3. Zuſ.).

5 Zuſatz.

Weil die Nenner der Partialbrüche deſto mehr zuſammengeſetzte Zahlen ſind, aus je mehr Quotienten dieſelben beſtehen

bestehen (Auflös. der Aufg.), und jeder Partialbruch desto mehr Quotienten enthalten muß, je weiter derselbe vom ersten $\frac{C}{1}$ entfernt ist (56. §. 2. Zus.); so müssen auch die Differenzen der Partialbrüche allmählich abnehmen, und sehr klein werden, wenn die Brüche vom ersten Partialbruche $\frac{C}{1}$ weit abstehen.

6. Zusatz.

Der Zähler und Nenner jedes Partialbruches (56. §. 2. Zus.) sind unter sich Primzahlen. Denn wenn der Zähler und Nenner eines $(n-1)$ten Partialbruches $\frac{\gamma}{\delta}$ nicht unter sich Primzahlen wären; so müßte es für sie ein gemeinschaftliches Maaß $\mu > 1$ geben, wodurch beyde theilbar wären (36. §.), und dann wären auch die Producte $\beta\gamma$, $\alpha\delta$ durch μ theilbar (43. §.), folglich wäre es auch die Differenz $\beta\gamma - \alpha\delta$ (41. §. 4. Zus.), da doch diese $= 1$ (3. Zus.) und $\mu > 1$ seyn soll.

7. Zusatz.

Jeder Partialbruch ist also von der Beschaffenheit, daß er durch kleinere Zahlen ohne Veränderung seines Werthes nicht ausgedrückt werden kann. (48. §.).

8. Zusatz.

Zwischen zween nächsten Partialbrüchen, z. B. zwischen dem $(n-2)$ten $\frac{\alpha}{\beta}$ und dem $(n-1)$ten $\frac{\gamma}{\delta}$ (3. Zus.) giebt

es keinen andern Bruch $\frac{x}{y}$, welcher aus kleineren Zahlen bestünde, und dennoch kleiner als der gröſſere und gröſſer als der kleinere Partialbruch wäre: denn wenn $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$, und nun $\frac{x}{y} < \frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{x}{y} > \frac{\alpha}{\beta}$ wäre; so wäre auch:

$$\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} - \frac{x}{y}; \quad \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{\delta\beta} > \frac{\gamma y - \delta x}{\delta y}.$$

Weil aber $\gamma\beta - \alpha\delta = 1$ ist (3. Zuſ.); so wäre $\frac{1}{\delta\beta} > \frac{\gamma y - \delta x}{\delta y}$. Nun aber soll $\beta > y$ seyn, indem der Bruch $\frac{x}{y}$ aus kleineren Zahlen bestehen soll, als jeder von den Partialbrüchen; daher ist auch $\delta\beta > \delta y$: also muß nothwendig $1 > \gamma y - \delta x$ seyn, welches, weil γy, δx ganze Zahlen seyn sollen, nur in der Bedeutung gelten kann, daß $\gamma y - \delta x$ etwas verneintes, folglich $\gamma y < \delta x$ ist, woraus folgt $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{x}{y}$, da doch, vermöge der Voraussetzung $\frac{x}{y} < \frac{\gamma}{\delta}$ seyn soll.

Anmerkung.

e. Ich will die hier erwiesenen Eigenschaften der Partialbrüche durch ein Beyspiel erläutern. Man nehme nämlich einen unächten Bruch $\frac{1679}{724}$, und suche die unten in I.)

befind-

befindlichen Quotienten nach (56. §.), und aus ihnen die in II.) und III.) geschriebenen Zähler und Nenner der Partialbrüche (56. §. 2. Zus.) nach (57. §.), woraus sich die Partialbrüche selbst in IV.) ergeben, wie auch ihre Differenzen in V.) nach (4. Zus.).

I.)	II.)	III.)
2	2 — —	1
3	7 — —	3
7	51 — —	22
2	109 — —	47
4	487 — —	210
1	596 — —	257
2	1679 — —	724

V.) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{66}$ $\frac{1}{1034}$ $\frac{1}{9870}$ $\frac{1}{53970}$ $\frac{1}{186068}$

IV.) $\frac{2}{1}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{51}{22}$ $\frac{109}{47}$ $\frac{487}{210}$ $\frac{596}{257}$ $\frac{1679}{724}$

Man findet hier, daß der erste Partialbruch in IV.) kleiner als der zweyte, dieser gröſſer als der dritte, dieser kleiner als der vierte, dieser gröſſer als der fünfte, dieser kleiner als der sechste, und dieser gröſſer als der siebente ist, welches den Satz (4. Zus.) bestätiget: man findet ferner, daß die in V.) befindlichen Brüche die wahren Differenzen der Partialbrüche in IV.) sind, alle Eins zu ihren Zählern haben, und jeder Differenz Nenner das Product aus den Nennern der zugehörigen Partialbrüche ist; so ist $\frac{1}{3}$ die Differenz des ersten Partialbruches $\frac{2}{1}$ vom zweyten $\frac{7}{3}$, und

es ist der Nenner jener Differenz = 1.3; ferner ist $\frac{1}{65}$ die Differenz des dritten Partialbruches $\frac{5}{22}$ vom zweyten $\frac{7}{24}$, und ihr Nenner ist 66 = 22.3 u. s. f., welches den andern Theil des Satzes (4. Zus.) erläutert.

Es ist ferner einleuchtend, daß die Differenzen V.) der Partialbrüche IV.) immer kleiner werden, je mehr diese sich vom ersten Partialbruche $\frac{2}{7}$ entfernen (5. Zus.), und daß jeder Partialbruch in IV.) aus unter sich Primzahlen bestehet (6. Zus.), folglich von der Beschaffenheit ist, daß er sich ohne Aenderung seines Werthes durch kleinere Zahlen nicht ausdrücken läßt (7. Zus.).

Der letzte Partialbruch in IV.) ist der gegebene Bruch $\frac{1679}{724}$, woraus die Partialbrüche nach (56. §. 2. Zus. 57. §.) entstanden sind, und dieses muß ja allemal geschehen: denn der letzte Partialbruch muß nothwendig aus allen Quotienten bestehen (56. §. 2. Zus.), welche erhalten werden, wenn man die Division nach (56. §. n. 1.) so lang fortsetzt, bis ein Divisor = 1 wird, welchen der nächst erhaltene Rest geben muß, folglich ist ein solcher Partialbruch dem ganzen zusammenhängenden Bruche (56. §. n. 3.) gleich, weil, sobald man annimmt, daß G in (56. §. n. 3.) der letzte Quotient ist, das dortige e = o seyn muß, nämlich der letzte Rest.

58. §. Aufgabe.

Die Differenz jedes *n*ten Partialbruches (56. §. 2 Zus.) von dem Bruch $\frac{A}{B}$, woraus die Partialbrüche entstanden sind, anzugeben.

Auflö-

Auflösung. Wenn in der Bedeutung (56. §. n. 3.) den Quotienten N und P die Reste R und r zugehören; so wird man, wegen (56. §. 1. Zus.) aus dem $n$ten Partialbruche $= \frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$ in (57. §.) den Bruch $\frac{A}{B}$ erhalten, wenn man den $n$ten Quotient P um $\frac{r}{R}$ vermehrt: also ist

$$\frac{A}{B} = \frac{\gamma\left(P+\frac{r}{R}\right)+\alpha}{\delta\left(P+\frac{r}{R}\right)+\beta} = \frac{\gamma(PR+r)+\alpha R}{\delta(PR+r)+\beta R}.$$

Die Differenz des $n$ten Partialbruches von $\frac{A}{B}$ ist also:

$$\frac{A}{B} - \frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta} = \frac{\gamma(PR+r)+\alpha R}{\delta(PR+r)+\beta R} - \frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$$

$$= \frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)r}{(\delta(PR+r)+\beta R)(\delta P+\beta)} = \frac{\pm r}{(\delta(PR+r)+\beta R)(\delta P+\beta)}$$

Der letzte Ausdruck folgt aus (57. §. 3. Zus.), woraus die Art erhellet, wie man den Unterschied jedes $n$ten Partialbruches von $\frac{A}{B}$ unmittelbar aus den daraus nach (56. §.) entstandenen Quotienten bestimmen kann: er ist nämlich allemahl ein Bruch, welcher den mit dem $n$ten Quotienten P zusammengehörigen Rest r zum Zähler hat, sein Nenner aber entstehet, wenn man die Nenner β, δ, $\delta P+\beta$ der drey nächsten Partialbrüche, nämlich des $(n-2)$ten, $(n-1)$ten, und $n$ten nach (57. §.) bestimmet, hierauf

hierauf den $n$ten Quotient P mit dem $(n-1)$ten Reſt R multiplicirt, dazu den $n$ten Reſt r addirt, die Summe mit dem Nenner δ des $(n-1)$ten Partialbruches multiplicirt, und zum Produkt das Product aus dem Nenner des $(n-2)$ten Partialbruches in den $(n-1)$ten Reſt R addirt, dieſe Summe endlich mit dem Nenner des $n$ten Partialbruches multiplicirt.

1. Zuſatz.

Weil jeder Reſt in (56. §. n. 1.) kleiner als der nächſt vorhergehende ſeyn muß; ſo iſt r allemahl kleiner als R: weil ferner die Nenner β, δ, $\delta P+\beta$ der zunächſt auf einander folgenden Partialbrüche deſto gröſſer werden müſſen, je gröſſer die Quotienten ſind, aus welchen ſie beſtehen, und je mehr dieſelben Brüche ſich vom erſten Partialbruche entfernen (57. §.); ſo iſt klar genug, daß der Unterſchied jedes $n$ten Partialbruches von $\frac{A}{B}$ auch deſto kleiner werden muß, je gröſſer die Quotienten ſind, aus welchen er beſtehet, und je mehr derſelbe ſich vom erſten Partialbruche entfernet, ſo, daß dieſer Unterſchied bey Rechnungen, welche ohnehin keine geometriſche Genauigkeit erfodern, völlig unbeträchtlich werden kann.

2. Zuſatz.

Der erſte, dritte, fünfte, ſiebente, und jeder in ungerader Ordnung folgende Partialbruch (56. §. 2. Zuſ.) iſt kleiner,

kleiner, hingegen der zweyte, vierte, sechste, und jeder in gerader Ordnung folgende gröſſer als $\frac{A}{B}$.

Es ist nämlich offenbar, daß die Differenz des $n$ten Partialbruches von $\frac{A}{B}$ nur alsdann bejaht oder verneint seyn, folglich $+r$ oder $-r$ im Zähler haben kann, wenn der $n$te Partialbruch kleiner oder gröſſer als $\frac{A}{B}$ ist, und es muß $+r$ oder $-r$ da stehen, nachdem $\beta\gamma > \alpha\delta$ oder $\beta\gamma < \alpha\delta$, folglich nachdem $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$ oder $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}$ ist: also ist der $n$te Partialbruch nur alsdann kleiner oder gröſſer als $\frac{A}{B}$, wenn der $(n-1)$te $\frac{\gamma}{\delta}$ gröſſer oder kleiner als der $(n-2)$te $\frac{\alpha}{\beta}$ ist, demnach, weil $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$ oder $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}$ ist, nachdem die Ordnungszahl $n-1$ eine gerade oder ungerade (57. §. 4. Zus.), folglich nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist, muß auch der $n$te Partialbruch kleiner oder gröſſer als $\frac{A}{B}$ seyn, nachdem seine Ordnungszahl n ungerad oder gerad ist.

3. Zusatz.

Wenn man in $\frac{A}{B} = \frac{\alpha(PR+r)+\alpha R}{\delta(PR+r)+\beta R}$ (Aufl. der Aufg.) den mit dem $n$ten Quotient P zusammengehörigen Rest $r = o$ setzt, und annimmt, es sey der $(n-1)$te Rest, als der Divisor, welcher den Quotient P gegeben hat, $R > 1$; so ist R das gröſste gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A und B:

denn

denn es ist in diesem Fall $\frac{A}{B} = \frac{\gamma P R + \alpha R}{\delta P R + \beta R} = \frac{\gamma P + \alpha}{\delta P + \beta}$, wobey der Zähler und Nenner unter sich Primzahlen sind (57. §. 3. 6. Zus.), folglich war R das gröſste gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A und B (48. §. 3. Zus.) Dieses ist ein allgemeiner Beweis von (46. §.).

59. §. Aufgabe.

Es sind zwo unter sich Primzahlen A und B gegeben; wie kann man zwey Vielfachen von ihnen finden, welche nur um Eins von einander unterschieden sind?

Auflösung. 1) Man verfahre mit den gegebenen Zahlen A und B nach (56. §. n. 1.), und setze die Division jedes Restes durch den nächst folgenden so lang fort, bis ein Rest = 1 wird, welches hier geschehen muß, weil sonst A und B ein gemeinschaftliches Maaß hätten (46. §. Anm.), da sie doch unter sich Primzahlen seyn sollen.

2) Aus allen Quotienten, welche man bis zum Rest = 1 erhält, suche man die Zähler und Nenner der Partialbrüche nach (57. §.), multiplicire hierauf die gröſsere Zahl A mit dem letzten Nenner, und die kleinere B mit dem letzten Zähler; so werden die Producte die verlangten um Eins unterschiedenen Vielfachen von A und B seyn.

Beyspiel.

Beyspiel.

Man soll die um Eins unterschiedenen Vielfachen von 32 und 175 finden.

Die Division nach (56. §. n. 1.) giebt folgende Rechnung:

```
32|175|5
  160
   15|32|2
     30
      2|15|7
       14
        1
```

Aus den Quotienten 5, 2, 7 entstehen nach (57. §.) folgende Zähler und Nenner.

Die Quotienten.	Die Zähler.	Die Nenner.
5	5	1
2	11	2
7	82	15

Multiplicirt man nun die kleinere Zahl 32 mit dem letzten Zähler 82; so giebt das Product 32.82 = 2624: multiplicirt man ferner die grössere Zahl 175 mit dem letzten Nenner 15; so ist das Product 175.15 = 2625: und es ist der Unterschied beyder Producte 2625 — 2624 = 1.

Beweis. Wenn man bey den gegebenen Zahlen A und B die Quotienten C, D, E ... M, N findet, und ihnen die Reste a, b, c ... m, 1 in der Bedeutung (56. §. n. 1. 2.) zugehören; so wird noch der nächst vorhergehende Rest m

durch

durch den Rest $= 1$ dividirt den Quotient $= m$ geben; wenn also $\frac{\alpha}{\beta}$ der aus den Quotienten C, D . . . M, und $\frac{\gamma}{\delta}$ der aus C, D . . . M, N bestehende Partialbruch, wie in (57. §.), heißt; so ist der nächstfolgende Partialbruch, welcher aus den Quotienten C, D . . . M, N, m bestehen soll $= \frac{\gamma m+\alpha}{\delta m+\beta}$ (57. §.), und dieser ist dem Bruche $\frac{A}{B}$ gleich (57. §. Anm.), oder es ist:

$$\frac{A}{B} = \frac{\gamma m+\alpha}{\delta m+\beta}: \text{ also } \begin{matrix} A.\delta = (\gamma m+\alpha)\delta \\ B.\gamma = (\delta m+\beta)\gamma \end{matrix}$$

$$A.\delta - B.\gamma = (\gamma m+\alpha)\delta - (\delta m+\beta)\gamma$$
$$= \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ (57. §. 2. Zus.)}$$

Das heißt: wenn man die grössere Zahl A mit dem Nenner δ, welcher aus den Quotienten C, D . . . M, N bestehet, und die kleinere B mit dem aus eben denselben Quotienten bestehenden Zähler γ multiplicirt; so ist die Differenz der Producte $= 1$.

Zusatz.

Wenn die Anzahl der Quotienten C, D . . . M, N, welche zur Bestimmung der Factoren γ und δ gebraucht werden, gerade ist; so muß das Vielfache B. γ der kleineren Zahl B grösser seyn, als das Vielfache A. δ der grösseren Zahl A: wenn aber die Anzahl derselben ungerad ist; so ist das Vielfache B. γ der kleineren Zahl B kleiner als das Vielfache A. δ der grösseren Zahl A. Denn weil, wie es

aus

aus dem angeführten Beweiſe erhellet, $\frac{\gamma}{\delta}$ und $\frac{A}{B}$ zween nächſte Partialbrüche ſind; ſo muß im erſten Fall $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{A}{B}$ und im zweyten $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{A}{B}$ ſeyn (57. §. 4. Zuſ.), welches auch aus (58. §. 2. Zuſ.) folgt, daher iſt im erſten Fall $B.\gamma > A.\delta$, und im zweyten $B.\gamma < A.\delta$.

Man hat z. B. bey dem oben angeführten Beyſpiele drey Quotienten 5, 2, 7 zur Beſtimmung der Factoren 82; 15 gebraucht, und man hat auch wirklich gefunden, daß das Vielfache 32.82. der kleineren Zahl 32 kleiner iſt, als das Vielfache 175.15 der gröſſeren Zahl 175.

60. §. Aufgabe.

Wenn A und B unter ſich Primzahlen ſind, den Bruch $\frac{A}{B}$ durch kleinere Zahlen ſo auszudrücken, daß die Aenderung ſeines Werthes, welche dabey geſchehen muß, unbeträchtlich ſey.

Auflöſung. 1) Wären A und B nicht unter ſich Primzahlen; ſo würden dieſelben Zahlen ein gröſtes gemeinſchaftliches Maaß haben, und dann könnte man den Bruch $\frac{A}{B}$ ohne Aenderung ſeines Werthes durch kleinere Zahlen ausdrücken (52. §.): wenn aber A und B unter ſich Primzahlen ſind; ſo iſt eine ſolche Abkürzung unmöglich (48. §.), und in dem Fall läßt ſich noch fragen, ob es nicht möglich

sey, den Bruch $\frac{A}{B}$ durch kleinere Zahlen dergestalt auszudrücken, daß die Aenderung, welchen der Werth von $\frac{A}{B}$ dabey leiden muß, unbeträchtlich ist.

2) Dem zufolge dividire man die grössere Zahl A durch die kleinere B, und setze die Division nach (56. §. n. 1.) fort, bis man auf den Rest = 1 kömmt.

Aus den Quotienten, welche bey dieser Arbeit gefunden werden, suche man die Partialbrüche (56. §. 2. Zus.) nach (57. §.): man kann nun statt des Bruches $\frac{A}{B}$ einen solchen Partialbruch nehmen; jeder Partialbruch wird durch die kleinsten Zahlen dergestalt ausgedrückt seyn (57. §. 7. Zus.) daß er zwar grösser oder kleiner als $\frac{A}{B}$ (58. §. 2. Zus.) dabey aber so nahe dem Werthe von $\frac{A}{B}$ seyn wird, daß kein anderer Bruch möglich ist, welcher aus kleineren Zahlen bestünde, und dem Werthe von $\frac{A}{B}$ näher, als er käme (57. §. 8. Zus.); es wird auch der Partialbruch, welchen man statt $\frac{A}{B}$ nehmen mag, seinem Werthe nach, von $\frac{A}{B}$ immer weniger unterschieden seyn, wenn er vom ersten Partialbruche mehr entfernt, daher aus mehreren oder gröfferen Quotienten zusammengesetzt seyn wird, so, daß der Unterschied desselben von $\frac{A}{B}$ ganz unbeträchtlich wird werden können (58. §. 1. Zus.).

Zum

Zum Beyspiele kann hier der oben (57. §. Anm.) angeführte Bruch $\frac{1679}{724}$ dienen. Aus diesem hat man die Partialbrüche $\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{51}{22}, \frac{109}{47}, \frac{487}{210}, \frac{596}{257}$ bestimmt, wovon jeder durch kleinere Zahlen ausgedrückt ist, als der gegebene Bruch $\frac{1679}{724}$: wollte man nun den zweyten Partialbruch $\frac{7}{3}$ statt des gegebenen in einer Rechnung brauchen; so würde man einen um $\frac{31}{2172}$ grösseren Bruch brauchen, als er wirklich seyn sollte; denn es ist $\frac{7}{3} - \frac{1679}{724} = \frac{31}{2172}$: wollte man aber den dritten Partialbruch $\frac{51}{22}$ statt des gegebenen brauchen; so würde man eigentlich einen um $\frac{14}{19928} = \frac{7}{2964}$ kleineren Bruch brauchen, als er seyn soll; denn es ist $\frac{1679}{724} - \frac{51}{22} = \frac{14}{19928}$. Die Abweichung des dritten Partialbruches $\frac{51}{22}$ vom gegebenen ist schon klein genug, doch aber wird die Abweichung des vierten $\frac{109}{47}$ um ein Ansehnliches kleiner seyn, und noch kleiner jedes folgenden: denn die Abweichung des vierten Partialbruches ist $= \frac{109}{47} - \frac{1679}{724} = \frac{3}{34028}$.

1. Zusatz.

Es ist zwar bey der vorhergehenden Theorie überall die Voraussetzung gemacht worden, daß $\frac{A}{B}$ ein unächter Bruch ist, doch gielt alles auch für jeden ächten Bruch: denn wenn ein Bruch $\frac{p}{P}$ gegeben wird, wo $p < P$ ist; so kann man die Partialbrüche $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{C}{c}$ ... suchen, durch welche sich der unächte Bruch $\frac{P}{p}$ abkürzen läßt, und dann werden die Brüche $\frac{a}{A}, \frac{b}{B}, \frac{c}{C}$ ... diejenigen seyn, wovon mann einen statt $\frac{p}{P}$ wird nehmen können.

2. Zusatz.

Weil jedes Verhältniß B:A durch einen Bruch $\frac{A}{B}$ ausgedrückt wird, obgleich dieser nur der Exponent des Verhältnisses B:A ist; so kann man sich der vorigen Methode auch zur Abkürzung der Verhältnisse bedienen. Es giebt Verhältnisse, derer man sich bey gewissen Rechnungen allemahl bedienen muß, die demnach als Grundverhältnisse solcher Rechnungen betrachtet werden: wenn sie aus grossen Zahlen bestehen; so muß man suchen, dieselben auf die angeführte Art abzukürzen, um die Rechnungen nicht ohne Noth zu erschweren.

Anmer-

Anmerkung des Herausgebers.

Von zusammenhängenden Brüchen, und ihrem Gebrauch hat Herr Euler umständlich gehandelt (a), aber bündiger Herr Lambert (b): mit Rücksicht auf die Erfindung der um Eins unterschiedenen Vielfachen zwoer Primzahlen, und des größten gemeinschaftlichen Maaßes zwoer Zahlen, habe ich vor drey Jahren, als ich in Leipzig war, etwas davon in einem kleinen Aufsatze gesagt, der für das leipziger Magazin von Hrn. Hindenburg bestimmt war: die letzten Stücke dieses Magazins habe ich noch nicht erhalten können, weswegen mir auch unbekannt ist, ob derselbe Aufsatz schon gedruckt ist, oder nicht: so viel erinnere ich mich noch, daß er nur eine Gleichung zwischen dem Bruche $\frac{A}{B}$ und den Quotienten und Resten (56. §. n. 1.) enthält, woraus sich das, was ich suchte, leicht herleiten läßt.

(a) *Introduct. in Analys. Infin.* Tom. 1. Cap. XVIII.

(b) Beyträge zum Gebrauche der Mathem. 2ter Theil. III. Beytrag von Verwandlung der Brüche.

Der VI. Abschnitt.

Von der Rechnung mit Wurzelgrössen.

61. §. Erklärungen.

Es ist zwar diejenige Grösse, welche unter dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ sich befindet, in (13. §.) eine **Wurzelgrösse** genannt worden, doch wird man hier darunter den ganzen Ausdruck, wie $B\sqrt[n]{A}$, verstehen: bey jedem solchen Ausdrucke drückt B eine gewisse Zahl aus, mit welcher die **Wurzel** $\sqrt[n]{A}$ von A multiplicirt ist, und heißt der **Coefficient** von $\sqrt[n]{A}$; so ist $a+b$ bey $(a+b)\sqrt[n]{A}$ auch der Coefficient von $\sqrt[n]{A}$. Gleichartige Wurzelgrössen werden diejenigen heissen, welche mit einerley Wurzelexponenten versehen sind, und einerley Grössen unter den Wurzelzeichen haben, wie $a\sqrt[n]{A}$ und $b\sqrt[n]{A}$. Zum Unterschied von Wurzelgrössen, die man auch Irrationalgrössen zu nennen pflegt, werden alle übrigen Grössen, die von allen Wurzelzeichen frey sind, und keine gebrochene Exponenten haben, die sich auf ganze Zahlen nicht bringen lassen, Rationalgrössen genannt. So ist z. B. a^2b eine Rationalgrösse, wie auch $a^{\frac{4}{2}}b = a^2b$; hingegen ist $a^{\frac{3}{2}}b = b\sqrt{a^3}$ eine Irrationalgrösse.

62. §.

62. §. Aufgabe.

Den Coefficient einer gegebenen Wurzelgröſſe, unter das Wurzelzeichen zu bringen, ohne den Werth der Wurzelgröſſe zu ändern.

Auflösung. Man nehme diejenige Potenz des Coefficienten, welche der Wurzelexponent anzeigt, und multiplicire dieſelbe mit der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Gröſſe.

Beyſpiele.

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$; $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$; $\frac{a}{b}\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\frac{a^3 c}{b^3}}$;

Beweis. Es ſoll ſeyn $a^m\sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{a^{mn} b^p}$; denn es iſt $a^m\sqrt[n]{b^p} = a^m b^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{mn}{n}} b^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^{mn}}\sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{a^{mn} b^p}$. (14. §. 2. Zuſ.)

1. Zuſatz.

Daher auch umgekehrt, wenn die unter dem Wurzelzeichen befindliche Gröſſe aus Factoren beſtehet, welche Potenzen von dem Grade ſind, den der Wurzelexponent anzeiget; ſo kann man allemahl dieſelben weglaſſen, wenn man nur mit ihren Wurzeln von eben dem Grade den Coefficient des Wurzelzeichens multiplicirt; ſo kann man z. B. ſtatt $a\sqrt[n]{b^n c}$ auch $ab\sqrt[n]{c}$, ſtatt $a\sqrt[3]{\frac{b^3 c d^6 e}{-f^9 g}}$ allemahl $\frac{abd^2}{f^3}\sqrt[3]{\frac{ce}{g}}$ ſetzen.

2. Zuſatz.

Wenn die unter dem Wurzelzeichen befindliche Gröſſe eine Zahl iſt; ſo muß man verſuchen, ſie in einfache Factoren nach (51. §.) zu zerlegen: kömmt nun ein ſolcher Factor unter dem Wurzelzeichen ſo oft vor, als der Wurzelexponent Einheiten hat; ſo kann man denſelben unter dem Wurzelzeichen eben ſo oft wegſtreichen, und den Coefficient nur einmahl damit multipliciren (11. §. Zuſ.). Es iſt z. B.

$$\sqrt[3]{3024} = \sqrt[3]{2.2.2.2.3.3.3.7} = 6.2.3\sqrt[3]{2.7} = 30\sqrt[3]{14}.$$

3. Zuſatz.

Nach (12. Z.) können bisweilen ungleichartige Wurzelgröſſen gleichartig werden (61. §.). So ſind z. B. die Wurzelgröſſen $a\sqrt[n]{b^n c}$ u. $g\sqrt[m]{d^{m-n}c}$ ungleichartig; man kann aber $\sqrt[n]{b^n c} = ab\sqrt[n]{c}$, und $g\sqrt[m]{d^{m-n}c} = d^2 g\sqrt[n]{c}$ machen, und dann ſind ſie gleichartig: eben ſo ſind $5\sqrt[3]{2}$ und $4\sqrt[3]{16}$ ungleichartige Wurzelgröſſen, weil aber $4\sqrt[3]{16} = 4\sqrt[3]{2.2.2.2} = 4.2\sqrt[3]{2.} = 8\sqrt[3]{2}$ iſt; ſo kann man ſtatt ihrer die gleichartigen $5\sqrt[3]{2}$ und $8\sqrt[3]{2}$ (61. §.) in der Rechnung brauchen.

63. §. Aufgabe.

Jede Potenz n einer gegebenen Wurzelgröſſe zu finden.

Auflöſung. Man behalte den Wurzelexponent ungeändert, und erhebe ſowohl den Coefficient als die unter dem

dem Wurzelzeichen befindliche Gröſſe auf die verlangte Potenz n.

Beyſpiele.

$(\sqrt[r]{b})^n = a^n\sqrt[r]{b^n}$; $(2\sqrt[3]{5})^2 = 2^2\sqrt[3]{5^2} = 4\sqrt[3]{25}$;

$(\frac{a}{b}\sqrt[r]{c})^3 = \frac{a^3}{b^3}\sqrt[r]{c^3}$; $(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{7}})^3 = \frac{8}{27}\sqrt[4]{\frac{1}{343}}$.

Beweis. Es iſt $\sqrt[r]{b} = b^{\frac{1}{r}}$; alſo $(\sqrt[r]{b})^n = (b^{\frac{1}{r}})^n$ $= a^n b^{\frac{n}{r}}$ (10. §. 16. Zuſ.) $= a^n\sqrt[r]{b^n}$.

1. Zuſatz.

Wenn der Wurzelexponent ſich durch den Exponent der verlangten Potenz dividiren läßt; ſo kann man dieſes thun, und die unter dem Wurzelzeichen befindliche Gröſſe ungeändert behalten, doch aber muß der Coefficient allemahl auf die verlangte Potenz erhoben werden. Denn es iſt $(\sqrt[nr]{b})^n = a^n\sqrt[nr]{b^n} = a^n b^{\frac{n}{nr}} = a^n b^{\frac{1}{r}} = a^n\sqrt[r]{b} = a^n\sqrt[nnn]{b}$; daher $(a\sqrt[4]{5})^2 = a^2\sqrt[2]{5}$; $(a^3\sqrt[2]{c^5})^2 = a^6\sqrt[4]{c^5} = a^6 c\sqrt[4]{c}$.

2. Zuſatz.

Wenn die gegebene Wurzelgröſſe auf diejenige Potenz, welche der Wurzelexponent anzeiget, erhoben werden ſoll; ſo wird dieſe Potenz ein rationales Product aus eben der Potenz des Coefficienten in die unter dem Wurzelzeichen befindliche Gröſſe ſeyn; z. B. $(a\sqrt[3]{5})^3 = 5a^3$: denn es iſt überhaupt $(a\sqrt[n]{b})^n = a^n\sqrt[n]{b^n} = a^n b^{\frac{n}{n}} = a^n b$.

64. §. Aufgabe.

Jede Wurzel von einer gegebenen Wurzelgröſſe zu beſtimmen.

Auflöſung. Man bringe den Coefficient unter das Wurzelzeichen nach (62. §.), hierauf multiplicire man den Wurzelexponent mit dem Exponent der verlangten Wurzel.

Beyſpiele.

$\sqrt[n]{(a\sqrt[r]{b})} = \sqrt[n]{(\sqrt[r]{a^r b})} = \sqrt[nr]{a^r b}$; $\sqrt[3]{(2\sqrt{5})} = \sqrt[6]{20}$;

$\sqrt[2]{(\frac{2}{3}\sqrt{5})} = \sqrt[4]{\frac{20}{9}}$; $\sqrt[2]{(\frac{1}{2}\sqrt{6})} = \sqrt[4]{\frac{6}{8}} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$.

Beweis. Es iſt $a\sqrt[r]{b} = ab^{\frac{1}{r}}$; alſo $\sqrt[n]{(a\sqrt[r]{b})} = \sqrt[n]{ab^{\frac{1}{r}}}$, $= a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{nr}}$ (14. §. 2. Zuſ.), $= a^{\frac{r}{nr}} b^{\frac{1}{nr}} = \sqrt[nr]{a^r}\sqrt[nr]{b} = \sqrt[nr]{a^r b}$ (14. §. 2. Zuſ.).

1. Zuſatz.

Wo es ſich thun läßt, kann man ſtatt deſſen die Exponenten des Coefficienten und der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Gröſſe durch den Exponent der verlangten Wurzel dividiren; ſo iſt $\sqrt[3]{(a^6\sqrt[5]{b^3})} = a^{\frac{6}{3}}\sqrt[5]{b^{\frac{3}{3}}} = a^2\sqrt[5]{b}$; und überhaupt $\sqrt[n]{(a^m\sqrt[r]{b^s})} = a^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{b^{\frac{s}{n}}}$; denn es iſt dieſes allemahl $= a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{s}{nr}}$ (15. §. 8. Zuſ.) $= a^{\frac{mr}{nr}} b^{\frac{s}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}}\sqrt[nr]{b^s}$ $= \sqrt[nr]{a^{mr} b^s}$ (14. §. 2. Zuſ.) $= \sqrt[n]{(a^m\sqrt[r]{b^s})}$.

2. Zuſatz.

Daher iſt $\sqrt[m:r]{a^{n:r}} = \sqrt[m]{a^n}$, und $\sqrt[m.r]{a^{n.r}} = \sqrt[m]{a^n}$ (63. §. 1. Zuſ. und vor. Zuſ.): man kann alſo den Wurzelexponent m und zugleich den Exponent n der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Gröſſe mit einerley Zahl r dividiren oder multipliciren, ohne dadurch den Werth der Wurzelgröſſe zu ändern.

65. §. Aufgabe.

Eine gegebene Wurzelgröſſe $a\sqrt[n]{b}$ mit einer Gröſſe A ohne Aenderung ihres Werthes zu multipliciren.

Auflöſung. Man multiplicire den Coefficient a mit A, und dividire zugleich die unter dem Wurzelzeichen befindliche Gröſſe b durch diejenige Potenz von A, welche der Wurzelexponent n anzeiget.

Beyſpiele.

$$2\sqrt[3]{5} = 2.2\sqrt[3]{\frac{5}{2^3}} = 4\sqrt[3]{\tfrac{5}{8}}; \quad \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{3}{5}} = \tfrac{2}{3}.3\sqrt{\tfrac{3}{9.3^2}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{3.3}}.$$

Beweis. Es iſt $aA\sqrt[n]{\frac{b}{A^n}} = a\sqrt[n]{\frac{bA^n}{A^n}}$ (62. §.) $= a\sqrt[n]{b}$.

66. §. Aufgabe.

Wurzelgröſſen, welche mit verſchiedenen Wurzelexponenten verſehen ſind, in gleichgültige zu verwandeln, welche einerley Wurzelexponenten haben ſollen.

Auflö-

Auflösung. Bey jeder Wurzelgröſſe multiplicire man ſowohl den ihr zugehörigen Wurzelexponent, als den Exponent der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Gröſſe mit den Wurzelexponenten aller übrigen Wurzelgröſſen; ſo wird man aus den gegebenen Wurzelgröſſen andere erhalten, welche das Product aus den Wurzelexponenten aller gegebenen Wurzelgröſſen zum gemeinſchaftlichen Wurzelexponent haben, und den gegebenen Wurzelgröſſen gleich ſeyn werden (64. §. 2. Zuſ.).

Beyſpiele.

I. $a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[m]{d} = a\sqrt[mn]{b^m} + c\sqrt[mn]{d^n}$;

II. $2\sqrt{5} - 3\sqrt[4]{7} = 2\sqrt[8]{5^4} - 3\sqrt[8]{7^2} = 2\sqrt[8]{625} - 3\sqrt[8]{49}$;

III. $\sqrt{3} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{5} = \sqrt[24]{3^{12}} + \sqrt[24]{7^8} + \sqrt[24]{5^6}$.

Zuſatz.

Bisweilen kann man nach (64. §. 2. Zuſ.) mit den Wurzelgröſſen ſo verfahren, daß der gemeinſchaftliche Exponent kleiner ausfällt, als man ihn nach der vorgeſchriebenen Regel erhalten würde: ſo kann man im zweyten Beyſpiele bey $2\sqrt{5}$ den Wurzelexponent 2 und den Exponent der, unter dem Wurzelzeichen befindlichen Zahl 5, mit 2 multipliciren, da dann $2\sqrt[4]{5^2} = 2\sqrt[4]{25}$ daraus entſtehet, welche Wurzelgröſſe mit der andern gegebenen $-3\sqrt[4]{7}$ ſchon einerley Exponent hat. Und überhaupt, wenn eine gewiſſe

Zahl

Zahl vorhanden ist, welche durch jeden Exponent, den eine unter den gegebenen Wurzelgrössen haben mag, theilbar ist; so nehme man dieselbe Zahl zum gemeinschaftlichen Wurzelexponent, und multiplicire den Exponent der unter jedem Wurzelzeichen befindlichen Grösse mit dem Quotienten, welchen der angenommene gemeinschaftliche Wurzelexponent durch den Exponent eben des Wurzelzeichens dividirt giebt. Beym dritten Beyspiele ist die Zahl 12 durch jeden Exponent 2, 3, 4 theilbar, und es ist $\frac{12}{2}=6$; $\frac{12}{3}=4$; $\frac{12}{4}=3$: also verwandeln sich $\sqrt[2]{3}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[4]{5}$ in $\sqrt[12]{3^6}+\sqrt[12]{7^4}+\sqrt[12]{5^3}$ $=\sqrt[12]{729}+\sqrt[12]{2401}+\sqrt[12]{125}$.

67. §. Aufgabe.

Die Addition und Subtraction mit Wurzelgrössen zu verrichten.

Auflösung. Wenn die Wurzelgrössen gleichartig (61. §.) sind; so bleibt der Wurzelexponent und die unter dem Wurzelzeichen befindliche Grösse ungeändert, der Coefficient der Summe oder Differenz gegebener Wurzelgrössen aber muß die Summe oder Differenz ihrer Coefficienten seyn: wenn hingegen die gegebenen Wurzelgrössen ungleichartig sind; so muß die Addition und Subtraction nur angedeutet werden.

Beyſpiele.

$a\sqrt[n]{b}+c\sqrt[n]{b}=(a+c)\sqrt[n]{b}$; $4\sqrt{5}+8\sqrt{5}=12\sqrt{5}$;

$8\sqrt[3]{7}+(-11\sqrt[3]{7})=-3\sqrt[3]{7}$; $\frac{3}{4}\sqrt{11}+\frac{1}{4}\sqrt{11}=\frac{11}{4}\sqrt{11}$.

$a\sqrt[n]{b}-c\sqrt[n]{b}=(a-c)\sqrt[n]{b}$; $15\sqrt[3]{7}-8\sqrt[3]{7}=7\sqrt[3]{7}$;

$8\sqrt{5}-(-6\sqrt{5})=8\sqrt{5}+6\sqrt{5}=14\sqrt{5}$.

$a+2\sqrt{ab}+3\sqrt[3]{ac}-4\sqrt{ad}=A$

$b-5\sqrt{ab}+9\sqrt[3]{ac}+2\sqrt{ad}=B$

$a+b-3\sqrt{ab}+12\sqrt[3]{ac}-2\sqrt{ad}$. Die Summe $A+B$.

$a-b+7\sqrt{ab}-6\sqrt[3]{ac}-6\sqrt{ad}$. Die Differenz $A-B$.

Beweis. Bey $a\sqrt[n]{b}$ iſt $\sqrt[n]{b}$ *amahl*, und bey $c\sqrt[n]{b}$ iſt $\sqrt[n]{b}$ *cmahl* genommen (61. §.): alſo muß $a\sqrt[n]{b}+c\sqrt[n]{b}$ die Wurzel $\sqrt[n]{b}$ $(a+c)$mahl enthalten, daher $=(a+c)\sqrt[n]{b}$ ſeyn; und $a\sqrt[n]{b}-c\sqrt[n]{b}$ muß $\sqrt[n]{b}$ $(a-c)$mahl enthalten; folglich $=(a-c)\sqrt[n]{b}$ ſeyn.

Zuſatz.

Wenn die gegebenen Wurzelgröſſen entweder bey gleichen Wurzelexponenten ungleiche Gröſſen unter ihren Wurzelzeichen, oder auch ungleiche Wurzelexponenten haben; ſo muß man ſie nach (62. §. 3. Zuſ. und 66. §.) reduciren, indem man dadurch gleichartige Wurzelgröſſen bisweilen erhalten kann.

Bey-

Beyſpiele.

$\sqrt{a^4b}+\sqrt{bc^2}=a^2\sqrt{b}+c\sqrt{b}=(a^2+c)\sqrt{b}$;

$\sqrt[3]{128}-5\sqrt[3]{16}=8\sqrt[3]{4.4.4.2}-5\sqrt[3]{2.2.2.2}$

$=8.4\sqrt[3]{2}-5.2\sqrt[3]{2}=32\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}=22\sqrt[3]{2}$.

$2\sqrt[2]{2}+3\sqrt[4]{4}=2\sqrt[4]{2^2}+3\sqrt[4]{4}$ (64. §. 2. Zuſ.)$=$

$=2\sqrt[4]{4}+3\sqrt[4]{4}=5\sqrt[4]{4}=5\sqrt[2]{2^2}=5\sqrt[2]{2}$ (64. §. 2. B.).

Und kürzer $2\sqrt[2]{2}+3\sqrt[4]{4}=2\sqrt[2]{2}+3\sqrt[2]{2}=5\sqrt[2]{2}$.

68. §. Aufgabe.

Die Multiplication mit Wurzelgröſſen zu verrichten.

Auflöſung. Wenn die gegebenen Wurzelgröſſen verſchiedene Wurzelexponenten haben; ſo muß man ſie vor der Multiplication in gleichgültige verwandeln, welche gleiche Wurzelexponenten haben ſollen (66. §.): ſobald aber dieſelben gleiche Wurzelexponenten haben, muß man ihre Coefficienten unter ſich, und die unter ihren Wurzelzeichen befindlichen Gröſſen auch unter ſich multipliciren.

Beyſpiele.

$a\sqrt[n]{b}\times c\sqrt[n]{d}=ac\sqrt[n]{bd}$; $-4\sqrt[3]{5}\times 6\sqrt[3]{9}=-24\sqrt[3]{45}$;

$\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\times\frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{pr}{qs}\sqrt[m]{\frac{ac}{bd}}$; $5\sqrt[2]{7}\times 8=40\sqrt[2]{7}$;

$2\sqrt[3]{5}\times 7\sqrt[2]{3}=2\sqrt[6]{5^2}\times 7\sqrt[6]{3^3}=2\sqrt[6]{25}\times 7\sqrt[6]{27}$

$=14\sqrt[6]{675}$.

Beweis.

Beweis. Es ist $a\sqrt[n]{b} = a \times \sqrt[n]{b}$ und $c\sqrt[n]{d} = c \times \sqrt[n]{d}$ (61. §.): also ist $a\sqrt[n]{b} \times c\sqrt[n]{d} = a \times \sqrt[n]{b} \times c \times \sqrt[n]{d} = a.c.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{bd}$ (14. §. 2. Zus.).

Zusatz.

Wenn die Factoren zusammengesetzte Grössen sind; so multiplicire man jedes Glied des einen Factors mit jedem des andern, und addire hierauf die einzelnen Producte, wofern es angehet.

Beyspiele.

$a\sqrt{5} - 6\sqrt{3} = A$; $8 - \frac{1}{2}\sqrt{7} = B$.

$AB = 8a\sqrt{5} - 48\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{35} + 3\sqrt{21}$.

$\sqrt{3} + \sqrt{2} = A$; $\sqrt{3} - \sqrt{2} = B$: also

$AB = \sqrt{9} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$.

$2 - 3\sqrt[3]{2} = A$; $4 + 5\sqrt[3]{4} = B$: also

$AB = 8 - 12\sqrt[3]{2} + 10\sqrt[3]{4} - 15\sqrt[3]{8} = 10\sqrt[3]{4} - 12\sqrt[3]{2} - 22$.

69. §. Aufgabe.

Die Division mit Wurzelgrössen zu verrichten.

Auflösung. Wenn sie verschiedene Wurzelexponenten haben; so reducire man sie nach (66. §.), und dividire hierauf den Coefficient und die, unter dem Wurzelzeichen des Dividendus befindliche Grösse, durch den Coefficient und die unter dem Wurzelzeichen des Divisors befindliche Grösse.

Beyspiele.

$$a\sqrt[n]{b} : c\sqrt[n]{d} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}; \quad \frac{p}{q}\sqrt[r]{\frac{a}{b}} : \frac{x}{y}\sqrt[t]{\frac{c}{d}} = \frac{py}{qx}\sqrt[s]{\frac{ad}{bc}};$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[5]{\frac{2}{5}} : \frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{3}{20}\sqrt[15]{\frac{6}{10}} = \frac{3}{20}\sqrt[5]{\frac{3}{5}};$$

$$5b : 25\sqrt{c} = \frac{5b}{25\sqrt{c}} = \frac{b}{5\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b^2}}{5\sqrt{c}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{b^2}{c}} = \frac{b}{5}\sqrt{\frac{1}{c}}.$$

$$ab : c\sqrt{b} = \frac{ab}{c\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b^2}}{c\sqrt{b}} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2}{b}} = \frac{a}{c}\sqrt{b}.$$

Beweis. Es ist $a\sqrt[n]{b} = a \times \sqrt[n]{b}$; und $c\sqrt[n]{d} = c \times \sqrt[n]{d}$ (61. §.): also ist $a\sqrt[n]{b} : c\sqrt[n]{d} = \frac{a \times \sqrt[n]{b}}{c \times \sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c} \times \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{d}}$

$= \frac{a}{c} \times \sqrt[n]{\frac{b}{d}}$ (14. §. 1. Zus.) $= \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$.

Zusatz.

Der Fall einer Division mit zusammengesetzten Wurzelgrössen ist zwar selten, doch kann man nun eine solche Division, wie (22. §. Zus.) verrichten.

Beyspiele.

$$\frac{4a + 8\sqrt{ac} - 9b + 12\sqrt{bc}}{2\sqrt{a} - 3\sqrt{b} + 4\sqrt{c}} = 2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}.$$

$$\frac{2\sqrt{ac^2} + 3\sqrt{ac^3}}{\sqrt{abd} - \sqrt{a^2d}} = \frac{5c\sqrt{a}}{(\sqrt{bd} - \sqrt{ad})\sqrt{a}} = \frac{5c}{\sqrt{bd} - \sqrt{ad}}.$$

70. §. Lehrſatz.

Das Quadrat einer Zahl iſt allemahl bejaht, es mag die Zahl ſelbſt bejaht oder verneint ſeyn; hingegen iſt der Cubus einer Zahl allemahl entweder bejaht oder verneint, nachdem die Zahl ſelbſt bejaht oder verneint iſt.

Beweis. 1) Das Quadrat einer bejahten Zahl $+a$ iſt $=+a\times+a=+a^2$, und das Quadrat einer verneinten Zahl $-a$ iſt $-a\times-a=+a^2$ (6. §.): alſo iſt es allemahl bejaht.

2) Der Cubus einer bejahten Zahl $+a$ iſt $+a\times+a\times+a=+a^2\times+a=+a^3$ allemahl bejaht; und der Cubus einer verneinten Zahl $-a$ iſt $-a\times-a\times-a=+a^2\times-a=-a^3$, daher allemahl verneint (6. §.).

1. Zuſatz.

Es iſt $a^{2n}=(a^2)^n$ nach (10. §. 14. Zuſ.): da alſo a^2 allemahl bejaht, und $2n$ jede gerade Zahl iſt, wenn n eine ganze Zahl bedeutet (38. §. Zuſ.); ſo iſt jede gerade Potenz, deren Exponent nämlich eine gerade Zahl iſt, allemahl bejaht, es mag die Zahl, deren Potenz ſie iſt, bejaht oder verneint ſeyn.

2. Zuſatz.

Und $2n+1$ iſt jede ungerade Zahl (38. §. Zuſ.). Da nun $(+a)^{2n+1}=(+a)^{2n}\times+a$ (10. §. 6. Zuſ.), und $(+a)^{2n}$ allemahl bejaht iſt (1. Zuſ.); ſo muß es auch $(+a)^{2n+1}$ ſeyn (38. §. Zuſ.). Hingegen iſt $(-a)^{2n+1}=(-a)^{2n}\times-a$

(10. §.

(10. §. 6. Zuſ.), und $(-a)^{2n}$ allemahl bejaht (1. Zuſ.); ſo iſt $(-a)^{2n+1}$ allemahl verneint (38. §. Zuſ.). Jede ungerade Potenz von einer Zahl iſt allemahl, ſo wie die Zahl ſelbſt, bejaht oder verneint.

3. Zuſatz.

Wenn A eine bejahte Zahl iſt, und man entweder ihre Quadrat-Wurzel $\sqrt{A}$, oder was immer für eine andere $\sqrt[2n]{A}$ von einem geraden Exponenten 2n, zu wiſſen verlanget; ſo kann man allemahl ſagen, daß es für dieſelbe Zahl zwo ſolche Wurzeln giebt, welche nur in dem von einander unterſchieden ſind, daß eine von ihnen bejaht und die andere verneint iſt, das heißt: wenn man $\sqrt[2n]{A} = +a$ ſetzt; ſo kann man auch $\sqrt[2n]{A} = -a$ ſetzen. Weil nämlich A die 2nte Potenz derſelben Wurzel ſeyn ſoll (4. §. Zuſ.) ſo iſt A die 2nte Potenz von $-a$, wenn A eine ſolche Potenz von $+a$ iſt (1. Zuſ.).

Anmerkung.

Man kann z. B. ſagen, daß die Quadratwurzel von 16 ſo gut -4 als $+4$ iſt, weil 16 ſowohl -4×-4 als $+4 \times +4$ giebt: man will indeſſen dadurch nicht behaupten, daß die Quadratwurzel von 16 zugleich -4 und $+4$ iſt, indem der angeführte Satz nur ſo viel ſagen will, daß die Quadratwurzel von 16 entweder -4 oder $+4$ ſeyn muß, welches aber von beyden in einer Rechnung gelten ſoll, dieſes muß aus den beſonderen Umſtänden der Rechnung beſtimmt werden.

4. Zusatz.

Ist hingegen eine verneinte Zahl $-A$ gegeben, und verlanget man die Quadrat-Wurzel, oder was immer für 2nte Wurzel davon; so verlanget man etwas unmögliches: wenn man nämlich diese Wurzel a nennt; so ist $-A$ die 2nte Potenz von a (11. §. Zus.), und nun ist klar, daß die vermeinte Wurzel a weder bejaht noch verneint seyn kann, weil ihre 2nte Potenz allemahl bejaht seyn würde (1. Zus.), da sie doch $-A$ seyn soll; die vermeynte Wurzel a ist daher etwas unmögliches. Wurzeln, welche durch gerade Exponenten bestimmt sind, von verneinten Zahlen sind allemahl unmöglich (radices impossibiles, imaginariae), wie $\sqrt{-A}$; $\sqrt[4]{-A}$; $\sqrt[6]{-A}$ ... $\sqrt[2n]{-A}$.

5. Zusatz.

Die Cubikwurzel aber, und jede andere von einem ungeraden Exponenten, ist durch die gegebene Zahl allemahl bestimmt: sie ist nämlich allemahl eine mögliche bejahte oder verneinte Zahl, nachdem es die gegebene Zahl ist (2. Zus.): so ist z. B. die Cubikwurzel von $+8$ allemahl $+2$, und von -8 allemahl -2.

71. §. Aufgabe.

Die Addition, Subtraction, Multiplication, und Division mit unmöglichen Wurzelgrössen (70. §. 4. Zus.) zu verrichten.

Auflösung. Man verrichte alle diese Arbeiten vollkommen nach (67. 68. 69. §.), nur merke man, daß, wenn

zwo

zwo unmögliche Wurzelgrössen gleichartig sind (61. §.), wie $c\sqrt[2n]{r-a}$ und $d\sqrt[2n]{r-a}$, das Product aus ihnen allemahl unmöglich bleiben muß.

Es scheint nämlich $c\sqrt[2n]{r-a} \times d\sqrt[2n]{r-a} = cd\sqrt[2n]{r(-a)^2} = cd\sqrt[2n]{r+a^2} = cd\sqrt[n]{r+a}$ zu seyn, da doch $c\sqrt[2n]{r-a} \times d\sqrt[2n]{r-a} = cd\sqrt[n]{r-a}$ seyn muß. Denn es ist zwar allemahl $c\sqrt[2n]{r-a} \times d\sqrt[2n]{r-a} = cd\sqrt[2n]{r a^2} = cd\sqrt[n]{(r a^2)}$, wegen (6. §): weil aber $r a^2$ entweder $-a$ oder $+a$ ist (70. §. 3. Zus.); so muß hier bestimmt werden, ob $-a$ oder $+a$ genommen werden soll (das. Anm.). Man sieht aber leicht ein, daß man $+a$ nicht nehmen kann, weil hier $r-a \times r-a$ das Quadrat von $r-a$ seyn soll, und $r-a$ die Quadratwurzel von $-a$ ausdrückt, folglich $-a$ das Quadrat der Wurzel $r-a$ ist (11. §. Zus.).

Beyspiele.

$\sqrt[4]{r-a} \cdot 3\sqrt[4]{r-a} = -a\sqrt[4]{r-a}$; $a\sqrt[4]{r-a} + 3\sqrt[4]{r-a} = 5\sqrt[4]{r-a}$;

$-3\sqrt[4]{r-a} - 5\sqrt[4]{r-a} = -8\sqrt[4]{r-a}$; $3\sqrt{r-a} - 3\sqrt{r-a} = 0$.

$\sqrt{r-a} \times \sqrt{r-a} = -a$; $\sqrt{r-1} \times \sqrt{r-1} = -1$;

$b\sqrt{r-a} \times -c\sqrt{r-a} = -bc \times -a = abc$;

$-b\sqrt{r-a} \times -c\sqrt{r-a} = bc \times -a = -abc$;

$\sqrt{r-b} \times \sqrt{r-c} = r+bc$; $\sqrt{r-a} \times -\sqrt{r-a} = +a$.

$\frac{r-bc}{r-c} = \sqrt{\frac{-bc}{-c}} = r b$; $\frac{r-3}{r-3} = \sqrt{\frac{-3}{-3}} = -r 1 = -1$;

$$\frac{a^2+b^2}{a+\sqrt{r-b^2}} = a - \sqrt{r-b^2}.$$

72. §. Lehrſatz.

Alle gerade Potenzen einer unmöglichen Wurzel, wie $r-a$, wovon das Quadrat eine mögliche Gröſſe $-a$ iſt (71. §.), ſind mögliche, und alle ungerade Potenzen unmögliche Gröſſen.

Beweis. I.) Jeder gerade Exponent kann $2n$, daher jede gerade Potenz von $r-a$ kann $(r-a)^{2n}$, und jede ungerade $(r-a)^{2n+1}$ heiſſen (38. §. Zuſ.).

II.) Nun iſt $(r-a)^{2n}=((r-a)^2)^n=(-a)^n$, und dieſes iſt gewiß allemahl eine mögliche bejahte oder verneinte Gröſſe, nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet (70. §. 1. 2. Zuſ.).

III.) Und es iſt $(r-a)^{2n+1}=(r-a)^{2n}\times(r-a)^1$ (10. §. 6. Zuſ.); da alſo $(r-a)^{2n}=\pm a^n$ aus (II.) ſeyn ſoll; ſo iſt $(r-a)^{2n+1}=\pm a^n\times r-a$ gewiß eine unmögliche Gröſſe, indem dieſes nichts anders, als die unmögliche Wurzel $r-a$, $\pm a^n$mahl genommen, bedeutet; zudem iſt auch $\pm a^n\,r-a$ allemahl $=r-a(\pm a^n)^2$ (62. §.) $=r-a(+a^{2n})$, wegen (70. §. 1. Zuſ.) $=r-a^{2n+1}$, folglich eine unmögliche Gröſſe.

73. §. Lehrſatz.

Wenn ein Bruch $\frac{A}{B}$, der ſich auf keine ganze Zahl bringen läßt, auf was immer für eine Potenz erhoben wird; ſo iſt ſie allemahl ein Bruch von eben der Art.

Beweis.

Beweis. Es mag $\frac{A}{B}$ ein ächter oder unächter Bruch seyn; so ist auch jede Potenz davon im ersten Fall ein ächter, und im zweyten ein unächter Bruch (10. §. 13. Zus.); ein unächter Bruch kann nie eine ganze Zahl geben: also bleibt noch zu beweisen übrig, daß auch jede Potenz eines unächten Bruches $\frac{A}{B}$, der keiner ganzen Zahl gleich ist, keine ganze Zahl geben kann.

I.) Es seyen A und B unter sich Primzahlen; so haben sie kein gemeinschaftliches Maaß, und daher auch keine gemeinschaftliche Factoren (36. §.).

Wenn nun $\frac{A^n}{B^n}$ (10. §. 12. Zus.) eine ganze Zahl m gäbe; so müßte B^n in A^n genau mmahl stecken, folglich wären auch alle einfache Factoren von B^n (36. §.) mmahl in A^n vorhanden; dieses kann aber nicht seyn. Denn in A steckt kein einfacher Factor, welcher in B vorhanden seyn mag, vermöge der Voraussetzung; alle einfache Factoren, aus welchen A bestehet, sind also von den einfachen Factoren des Nenners B unterschieden; folglich weil in A^n jeder Factor von A, und in B^n jeder von B nmahl stecken muß (10. §. 16. Zus.); können die Factoren von B^n in A^n nicht vorkommen (48. §. 4. Zus.).

II.) Wenn A und B nicht unter sich Primzahlen sind; so müssen sie ein gemeinschaftliches größtes Maaß μ haben (46. §.); wenn man nun A und B durch μ dividirt, und

$\frac{A}{\mu}$

$\frac{A}{\mu}=a$; $\frac{B}{\mu}=b$ iſt; ſo iſt $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, und a, b ſind unter ſich Primzahlen (47. §.). Da nun $\frac{A^n}{B^n}=\frac{a^n}{b^n}$ ſeyn muß, und $\frac{a^n}{b^n}$ wegen (I) keine ganze Zahl ſeyn kann; ſo kann auch $\frac{A^n}{B^n}$ keine ganze Zahl ſeyn.

Zuſatz.

Iſt die nte Wurzel einer ganzen Zahl A keine ganze Zahl; ſo kann ſie auch kein angeblicher Bruch ſeyn. Denn wäre ſie ein Bruch $=\frac{a}{b}$; ſo müßte $\sqrt[n]{A}=\frac{a}{b}$, daher $(\sqrt[n]{A})^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n$, oder $A=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ ſeyn, daher gäbe $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ eine ganze Zahl A, welches nicht geſchehen kann, wenn $\frac{a}{b}$ keiner ganzen Zahl gleich iſt.

74. §. Erklärungen.

Die Wurzeln von der Art (73. §. Zuſ.), welche ſich weder durch ganze noch gebrochene Zahlen angeben laſſen, werden Irrationalzahlen genannt; ſo ſind $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ u. d. gl. mehr lauter Irrationalzahlen, die man demnach weder durch die Einheit, noch durch einen gewiſſen Theil von ihr meſſen kann, weil man nicht ſagen kann, daß eine ſolche Zahl entweder die Einheit, oder einen gewiſſen Theil $\frac{a}{b}$ von ihr genau etliche mahl enthält; aus der

Urſache

Urſache werden ſolche Zahlen numeri ſurdi et incommenſurabiles genannt. Zum Unterſchied von ihnen pflegt man diejenigen Zahlen, welche durch die Einheit, oder einen gewiſſen Theil von ihr ſich meſſen laſſen, Rationalzahlen zu nennen.

Anmerkung.

Der Ausdruck, wenn die *n*te Wurzel einer Zahl A keine ganze Zahl iſt; ſo kann ſie auch keine gebrochene Zahl ſeyn, bedeutet alſo nichts anders, als, daß es keine ganze oder gebrochene Zahl giebt, durch welche man die *n*te Wurzel von A ganau angeben könnte; indeſſen iſt dieſe Wurzel eine mögliche Zahl, der man ſich dergeſtalt nähern kann, daß man allemahl im Stande iſt, einen ſo groſſen Theil von ihr anzugeben, in Anſehung deſſen der noch fehlende Theil völlig unbeträchtlich wird, daher iſt eine Irrationalzahl von einer unmöglichen Zahl (70. §. 4. Zuſ.), als welche weder ganz noch zum Theil angeblich iſt, unterſchieden.

75. §. Lehrſatz.

Jede gerade Potenz einer Irrationalzahl, wie $\sqrt{a}$, deren Quadrat $(\sqrt{a})^2 = a$ eine Rationalzahl iſt, muß eine Rationalzahl, und jede ungerade Potenz eine Irrationalzahl ſeyn.

Beweis. 1) Jede gerade Potenz von $\sqrt{a}$ iſt $(\sqrt{a})^{2n}$ aus (38. §. Zuſ.), und es iſt $(\sqrt{a})^{2n} = (a^{\frac{1}{2}})^{2n} = a^{\frac{2n}{2}} = a^n$ (10. §. 14. Zuſ.), und dieſes iſt gewiß eine Rationalzahl ſo wie a eine ſolche Zahl ſeyn ſoll.

2) Hingegen ist jede ungerade Potenz davon $= (\sqrt{a})^{2n+1} = (a^{\frac{1}{2}})^{2n+1} = a^{\frac{1}{2}(2n+1)}$ (10. §. 14. Zusatz) $= a^{n+\frac{1}{2}} = a^n . a^{\frac{1}{2}} = a^n \sqrt{a}$, welches gewiß eine Irrationalzahl seyn muß, wenn $\sqrt{a}$ eine solche Zahl ist (74. §.).

Der VII. Abschnitt.

Von der Erfindung des binomischen Lehrsatzes und seinem Gebrauche.

76. §. Aufgabe.

Man soll die vier ersten Potenzen von einer zweytheilichten Grösse $a+b$ bestimmen, wo a und b ganz unbestimmte Zahlen bedeuten.

Auflösung. Wenn man $a+b$ einmahl mit sich selbst multiplicirt; so giebt das Product die zweyte Potenz $(a+b)^2$; multiplicirt man diese Potenz mit $a+b$ einmahl; so erhält man die dritte Potenz $(a+b)^3$; multiplicirt man endlich diese Potenz mit $a+b$ einmahl; so giebt das Product die vierte Potenz $(a+b)^4$, wegen (10. §. 6. Zus.): die verlangten Potenzen wird man also nach (21. §. Zus.), wie folgt, erhalten:

I. $(a+b)^1 = a+b$.

II. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

III. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

IV. $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

1. Zusatz.

Weil a und b das erste und zweyte Glied jeder zweytheilichten Gröſse a+b ausdrücken; so besteht das Quadrat jeder zweytheilichten Gröſse, wegen (II.), aus den Quadraten beyder Glieder, und dem doppelten Producte aus dem ersten Gliede in das zweyte: der Cubus jeder zweytheilichten Gröſse besteht aber, wegen (III.), aus den Cubis beyder Glieder, und den dreyfachen Producten aus dem Quadrate jedes Gliedes in das andere.

2. Zusatz.

Man kann jede vieltheilichte Gröſse mit einem einzigen Buchstab bezeichnen: also kann man jede vieltheilichte Gröſse durch eine zweytheilichte ausdrücken, folglich auch die zweyte und dritte Potenz jeder vieltheilichten Gröſse, wo sie nöthig seyn mag, nach (1. Zus.) finden.

Beyspiele.

Man soll das Quadrat von 2x+5y+z bestimmen.

Man setze $2x+5y=A$; so ist $2x+5y+z=A+z$,
und nun $(2x+5y+z)^2=(A+z)^2$.

Es ist aber (1. Zus.) $(A+z)^2=A^2+2Az+z^2$,
$A^2=(2x+5y)^2=4x^2+20xy+25y^2$;
$2Az=2(2x+5y)z=4xz+10yz$;
also $(2x+5y+z)^2=4x^2+20xy+4xz+25y^2+10yz+z^2$.

Man

Man ſoll den Cubus von u+x+y+z bestimmen.

Sey u+x=A; y+z=B; u+x+y+z=A+B;

ſo iſt $(u+x+y+z)^3=(A+B)^3$.

Es iſt aber nach (1. Zuſ.)

$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$;

$A^3=(u+x)^3=u^3+3u^2x+3ux^2+x^3$;

$3A^2B=3(y+z)(u+x)^2=3(y+z)(u^2+2ux+x^2)$;

$3AB^2=3(u+x)(y+z)^2=3(u+x)(y^2+2yz+z^2)$;

$B^3=(y+z)^3=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$:

also $(u+x+y+z)^3=u^3+3u^2x+3ux^2+x^3+3(y+z)(u^2+2ux+x^2)$
$+3(u+x)(y^2+2yz+z^2)+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$.

3. Zuſatz.

Wenn man die vier erſten Potenzen I.) II.) III.) IV.) genauer erwäget; ſo wird man finden, daß ihre Theile ſich nach einem gemeinſchaftlichen Geſetze richten, ſo, daß die Theile jeder Potenz aus den Gliedern a, b der zweytheilichten Gröſſe a+b, und aus dem Exponenten eben der Potenz nach einem und eben demſelben Geſetze erhalten werden können; die Theile dieſes Geſetzes ſind folgende:

1) Jede der vier erſten Potenzen von a+b beſtehet aus litteralſchen Producten, wovon die Factoren gewiſſe Potenzen von a und b ſind.

2) Die Producte (n. 1.) ſind mit gewiſſen Zahlen multiplicirt, woraus die Glieder derſelben Potenzen entſtehen, und man kann eben die Zahlen die Coefficienten derſelben

ſelben Glieder nennen: z. B. bey der vierten Potenz (IV.) ſind fünf Glieder a^4; $+4a^3b$; $+6a^2b^2$; $+4ab^3$; $+b^4$ vorhanden, deren Coefficienten 1; 4; 6; 4; 1 ſind.

3) Die litteraliſchen Producte (n. 1.) kann man bey jeder von den erwähnten Potenzen ſo erhalten: im erſten Gliede jeder Potenz kömmt eben die Potenz von a allein vor, und dieſe Potenz wird in jedem nächſt folgenden Gliede um einen Grad niedriger, bis im letzten Gliede $a^0 = 1$ entſtehet; überdem kann man ſich im erſten Gliede $b^0 = 1$ bey jeder Potenz von $a+b$ vorſtellen, und nun kömmt ſchon in ihrem zweyten Gliede b^1, und in jedem nächſtfolgenden Gliede eine um einen Grad höhere Potenz von b vor, bis im letzten Glied eben die Potenz von b entſtehet, welche von a im erſten Gliede vorhanden iſt: zum Beyſpiele kann die vierte Potenz (IV.) von $a+b$ dienen, wovon die litteraliſchen Producte folgende ſind:

$$a^4;\ a^3b;\ a^2b^2;\ ab^3;\ b^4$$

oder $a^4b^0;\ a^3b^1;\ a^2b^2;\ a^1b^3;\ a^0b^4$.

4) Um das Geſetz deutlich einzuſehen, nach welchem die Coefficienten (n. 2.) bey jeder Potenz von $a+b$ erhalten werden können, nehme man die Coefficienten 1, 4, 6, 4, 1 der vierten Potenz (IV.), und erwäge, daß man dieſelben auch ſo ſchreiben kann:

$$4 = \frac{4}{1};$$

$$6 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2};$$

$$4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

Die vierte Potenz $(a+b)^4$ kann man demnach auch auf dieſe Art ſchreiben:

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}a^2b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}ab^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}b^4$$

oder

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4(4-1)}{1 \cdot 2}a^2b^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}ab^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}b^4.$$

Dem zufolge kann man auch die oben angeführte zweyte und dritte Potenz von $a+b$ ſo ausdrücken:

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3(3-1)}{1 \cdot 2}ab^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + \frac{2}{1}ab + \frac{2(2-1)}{1 \cdot 2}b^2.$$

Wenn man demnach die Glieder dieſer Potenzen von demjenigen zu zählen anfängt, worinn die erſte Potenz von b vorkömmt, ſo, daß daſſelbe Glied das erſte, jenes hierauf, welches b^2 enthält, das zweyte u. ſ. f. genannt werde;

ſo

so kann man das Gesetz, nach welchem sich der Coefficient jedes Gliedes einer Potenz von $a+b$ angeben läßt, folgendermaßen ausdrücken.

Der Coefficient jedes Gliedes ist ein Bruch; der Zähler dieses Bruches bestehet aus gewissen Factoren; der erste Factor ist der Exponent der Potenz von $a+b$, und jeder folgende ist um Eins kleiner, der letzte aber allemahl um so viel Einheiten kleiner als der erste, wie viel ihrer die Zahl hat, welche die Stelle des Gliedes, von dessen Coefficienten die Rede ist, anzeiget, ob es nämlich, das zweyte, dritte u. s. f. Glied ist: der Nenner desselben Bruches bestehet aus eben so vielen Factoren als der Zähler; der erste Factor ist allemahl $= 1$, jeder folgende um Eins gröſſer, und der letzte allemahl so groß als die Zahl, welche die Stelle des Gliedes, von dessen Coefficienten die Rede ist, ausdrückt.

4. Zusatz.

Nimmt man also an, daß die Gesetze (3. Zus.) nicht nur für die vier ersten Potenzen von $a+b$, sondern auch für jede Potenz m davon gelten, es mag ihr Exponent m was immer für eine ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl ausdrücken; so wird man die $m$te Potenz $(a+b)^m$ denselben Gesetzen gemäß auf diese Art ausdrücken können.

1) Weil man b^1 zum ersten, b^2 zum zweyten, b^3 zum dritten u. s. f. Gliede rechnet (3. Zus. n. 3.); so ist der Exponent

Exponent von b in jedem Gliede diejenige Zahl, welche ausdrükt, das wievielte selbes Glied ist: wenn man demnach von einem unbestimmten rten Gliede spricht; so gehört b^r zu eben dem Gliede, und so rechnet man b^{r-1} zum $(r-1)$ten, b^{r+1} zum $(r+1)$ten u. s. f. Gliede.

Es ist ferner aus (3. Zus. n. 2.) leicht abzunehmen, daß der Exponent von a in jedem Gliede um so viel Einheiten kleiner ist, als der Exponent der Potenz von $a+b$, zu welcher dasselbe Glied gehört, wie viel ihrer der Exponent von b in eben dem Gliede hat.

Will man also die Glieder der Potenz $(a+b)^m$ nur in Ansehung ihrer litteralischen Producte, dem Gesetze (3. Zus. n. 2.) gemäß, angeben; so werden sie seyn:

$$a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + \ldots$$

1tes. 2tes. 3tes. ....

$$+ a^{m-(r-1)}b^{r-1} + a^{m-r}b^r + a^{m-(r+1)}b^{r+1} + \ldots$$

$(r-1)$tes. rtes. $(r+1)$tes Glied.

2) Vermöge dieser Einleitung kann man nun auch die Coefficienten derselben Glieder nach dem Gesetze (3. Zus. n. 3.) folgendermaßen ausdrücken:

Fürs 1te Glied $\frac{m}{1}$

2te $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$

3te $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$\vdots$

$(r-1)$te $\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)}$

rte $\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))(m-(r-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r}$

$(r+1)$te $\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))(m-(r-1))(m-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r(r+1)}$

3) Wenn man alſo die litteraliſchen Producte (n. 1.) mit den Coefficienten (n. 2.) verbindet; ſo ergiebt ſich die mte Potenz von $a+b$, wie folgt:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-2}b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)}a^{m-(r-1)}b^{r-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))(m-(r-1))a^{m-r}b^r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))(m-(r-1))(m-r)a^{m-(r+1)}b^{r+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r(r+1)}$$

5. Zuſatz.

Der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes von $(a+b)^m$ iſt vom Coefficienten des nächſt vorhergehenden $r$ten Gliedes nur in dem unterſchieden, daß jener den Factor $m-r$ im Zähler, und den Factor $r+1$ im Nenner, mehr hat, als der Coefficient des $r$ten Gliedes (4. Zuſ. n. 2. 3.): wenn demnach R der Coefficient des $r$ten Gliedes heißt; ſo iſt $\frac{R(m-r)}{r+1}$ der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes, daher iſt aus (4. Zuſ.).

das $r$te Glied $= Ra^{m-r}b^r$,

und das $(r+1)$te Glied $= \frac{R(m-r)}{r+1} a^{m-(r+1)}b^{r+1}$.

Es iſt aber $\frac{m-r}{r+1} Ra^{m-(r+1)}b^{r+1} = Ra^{m-r}b^r \times \frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{b}{a}$: man kann daher aus jedem gegebenen $r$ten Gliede der Potenz $(a+b)^m$ das nächſt folgende $(r+1)$te finden, wenn man jenes mit $\frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{b}{a}$ multiplicirt, wo r die Zahl iſt, welche die Stelle des gegebenen Gliedes anzeiget, ſo, daß man das zweyte Glied aus dem erſten, das dritte aus dem zweyten, das vierte aus dem dritten u. ſ. f. erhält, wenn man das erſte mit $\frac{m-1}{1+1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{b}{a}$, das zweyte mit $\frac{m-2}{2+1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m-2}{3} \cdot \frac{b}{a}$, das dritte mit $\frac{m-3}{3+1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m-3}{4} \cdot \frac{b}{a}$ multiplicirt.

6. Zuſ

6. Zuſatz.

Man kann demnach die Formul (4. Zuſ.) der $m$ten Potenz von $a+b$ unter eine einfachere Geſtalt bringen, welche bey vielen Anwendungen bequemer iſt. Es war nämlich $\frac{b}{a}$ im (5. Zuſ.) nichts anders, als der Quotient, welchen das zweyte Glied b der zweytheilichten Gröſſe $a+b$ durch das erſte a dividirt geben ſoll, welchen Quotient man überhaupt mit Q bezeichnen kann: wenn man alſo überdem das erſte Glied einer ſolchen Gröſſe nicht a ſondern P nennt; ſo verwandelt ſich die Formul (4. Zuſ. n. 3.) nach (5. Zuſ.) in die nachſtehende:

$$P^m = \ldots\ldots\ldots A$$

$$+ \frac{m}{1} AQ = \ldots\ldots B$$

$$+ \frac{m-1}{2} BQ = \ldots\ldots C$$

$$+ \frac{m-2}{3} CQ = \ldots\ldots D$$

$$+ \frac{m-3}{4} DQ = \ldots\ldots E$$

$$+ \frac{m-4}{5} EQ = \ldots\ldots F$$

$$+ \frac{m-5}{6} FQ = \ldots\ldots G$$

u. ſ. f.

2) Hingegen iſt jede ungerade Potenz davon $= (\sqrt{a})^{2n+1} = (a^{\frac{1}{2}})^{2n+1} = a^{\frac{1}{2}(2n+1)}$ (10. §. 14. Zuſatz) $= a^{n+\frac{1}{2}} = a^n . a^{\frac{1}{2}} = a^n \sqrt{a}$, welches gewiß eine Irrationalzahl ſeyn muß, wenn $\sqrt{a}$ eine ſolche Zahl iſt (74. §.).

Der VII. Abſchnitt.

Von der Erfindung des binomiſchen Lehrſatzes und ſeinem Gebrauche.

76. §. Aufgabe.

Man ſoll die vier erſten Potenzen von einer zweytheilichten Gröſſe $a+b$ beſtimmen, wo a und b ganz unbeſtimmte Zahlen bedeuten.

Auflöſung. Wenn man $a+b$ einmahl mit ſich ſelbſt multiplicirt; ſo giebt das Product die zweyte Potenz $(a+b)^2$; multiplicirt man dieſe Potenz mit $a+b$ einmahl; ſo erhält man die dritte Potenz $(a+b)^3$; multiplicirt man endlich dieſe Potenz mit $a+b$ einmahl; ſo giebt das Product die vierte Potenz $(a+b)^4$, wegen (10. §. 6. Zuſ.): die verlangten Potenzen wird man alſo nach (21. §. Zuſ.), wie folgt, erhalten:

I. $(a+b)^1 = a+b$.

II. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

III. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

IV. $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

1. Zu-

1. Zusatz.

Weil a und b das erste und zweyte Glied jeder zweytheilichten Größe a+b ausdrücken; so bestehet das Quadrat jeder zweytheilichten Grösse, wegen (II.), aus den Quadraten beyder Glieder, und dem doppelten Producte aus dem ersten Gliede in das zweyte: der Cubus jeder zweytheilichten Grösse bestehet aber, wegen (III.), aus den Cubis beyder Glieder, und den dreyfachen Producten aus dem Quadrate jedes Gliedes in das andere.

2. Zusatz.

Man kann jede vieltheilichte Grösse mit einem einzigen Buchstab bezeichnen: also kann man jede vieltheilichte Grösse durch eine zweytheilichte ausdrücken, folglich auch die zweyte und dritte Potenz jeder vieltheilichten Grösse, wo sie nöthig seyn mag, nach (1. Zus.) finden.

Beyspiele.

Man soll das Quadrat von 2x+5y+z bestimmen.

Man setze $2x+5y=A$; so ist $2x+5y+z=A+z$,
und nun $(2x+5y+z)^2=(A+z)^2$.

Es ist aber (1. Zus.) $(A+z)^2=A^2+2Az+z^2$,
$A^2=(2x+5y)^2=4x^2+20xy+25y^2$;
$2Az=2(2x+5y)z=4xz+10yz$:

also $(2x+5y+z)^2=4x^2+20xy+4xz+25y^2+10yz+z^2$.

Man

Man ſoll den Cubus von $u+x+y+z$ beſtimmen.

Sey $u+x=A$; $y+z=B$; $u+x+y+z=A+B$;

ſo iſt $(u+x+y+z)^3=(A+B)^3$.

Es iſt aber nach (1. Zuſ.)

$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$;

$A^3=(u+x)^3=u^3+3u^2x+3ux^2+x^3$;

$3A^2B=3(y+z)(u+x)^2=3(y+z)(u^2+2ux+x^2)$;

$3AB^2=3(u+x)(y+z)^2=3(u+x)(y^2+2yz+z^2)$;

$B^3=(y+z)^3=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$:

alſo $(u+x+y+z)^3=u^3+3u^2x+3ux^2+x^3+3(y+z)(u^2+2ux+x^2)$
$+3(u+x)(y^2+2yz+z^2)+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$.

3. Zuſatz.

Wenn man die vier erſten Potenzen I.) II.) III.) IV.) genauer erwäget; ſo wird man finden, daß ihre Theile ſich nach einem gemeinſchaftlichen Geſetze richten, ſo, daß die Theile jeder Potenz aus den Gliedern a, b der zweytheilichten Gröſſe $a+b$, und aus dem Exponenten eben der Potenz nach einem und eben demſelben Geſetze erhalten werden können; die Theile dieſes Geſetzes ſind folgende:

1) Jede der vier erſten Potenzen von $a+b$ beſtehet aus litteralſchen Producten, wovon die Factoren gewiſſe Potenzen von a und b ſind.

2) Die Producte (n. 1.) ſind mit gewiſſen Zahlen multiplicirt, woraus die Glieder derſelben Potenzen entſtehen, und man kann eben die Zahlen die Coefficienten der-

ſelben

ſelben Glieder nennen: z. B. bey der vierten Potenz (IV.) ſind fünf Glieder a^4; $+4a^3b$; $+6a^2b^2$; $+4ab^3$; $+b^4$ vorhanden, deren Coefficienten 1; 4; 6; 4; 1 ſind.

3) Die litteraliſchen Producte (n. 1.) kann man bey jeder von den erwähnten Potenzen ſo erhalten: im erſten Gliede jeder Potenz kömmt eben die Potenz von a allein vor, und dieſe Potenz wird in jedem nächſt folgenden Gliede um einen Grad niedriger, bis im letzten Gliede $a^0 = 1$ entſtehet; überdem kann man ſich im erſten Gliede $b^0 = 1$ bey jeder Potenz von $a+b$ vorſtellen, und nun kömmt ſchon in ihrem zweyten Gliede b^1, und in jedem nächſtfolgenden Gliede eine um einen Grad höhere Potenz von b vor, bis im letzten Glied eben die Potenz von b entſtehet, welche von a im erſten Gliede vorhanden iſt: zum Beyſpiele kann die vierte Potenz (IV.) von $a+b$ dienen, wovon die litteraliſchen Producte folgende ſind:

$$a^4;\ a^3b;\ a^2b^2;\ ab^3;\ b^4$$

oder $a^4b^0;\ a^3b^1;\ a^2b^2;\ a^1b^3;\ a^0b^4$.

4) Um das Geſetz deutlich einzuſehen, nach welchem die Coefficienten (n. 2.) bey jeder Potenz von $a+b$ erhalten werden können, nehme man die Coefficienten 1, 4, 6, 4, 1 der vierten Potenz (IV.), und erwäge, daß man dieſelben auch ſo ſchreiben kann:

$$4 = \frac{4}{1};$$

$$6 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2};$$

$$4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

Die vierte Potenz $(a+b)^4$ kann man demnach auch auf dieſe Art ſchreiben:

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1} a^3 b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a b^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4$$

oder

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1} a^3 b + \frac{4(4-1)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a b^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4.$$

Dem zufolge kann man auch die oben angeführte zweyte und dritte Potenz von $a+b$ ſo ausdrücken:

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1} a^2 b + \frac{3(3-1)}{1 \cdot 2} a b^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + \frac{2}{1} a b + \frac{2(2-1)}{1 \cdot 2} b^2.$$

Wenn man demnach die Glieder dieſer Potenzen von demjenigen zu zählen anfängt, worinn die erſte Potenz von b vorkömmt, ſo, daß daſſelbe Glied das erſte, jenes hierauf, welches b^2 enthält, das zweyte u. ſ. f. genannt werde;

ſo

so kann man das Gesetz, nach welchem sich der Coefficient jedes Gliedes einer Potenz von a+b angeben läßt, folgendermaßen ausdrücken.

Der Coefficient jedes Gliedes ist ein Bruch; der Zähler dieses Bruches bestehet aus gewissen Factoren; der erste Factor ist der Exponent der Potenz von a+b, und jeder folgende ist um Eins kleiner, der letzte aber allemahl um so viel Einheiten kleiner als der erste, wie viel ihrer die Zahl hat, welche die Stelle des Gliedes, von dessen Coefficienten die Rede ist, anzeiget, ob es nämlich, das zweyte, dritte u. s. f. Glied ist: der Nenner desselben Bruches bestehet aus eben so vielen Factoren als der Zähler; der erste Factor ist allemahl = 1, jeder folgende um Eins grösser, und der letzte allemahl so groß als die Zahl, welche die Stelle des Gliedes, von dessen Coefficienten die Rede ist, ausdrückt.

4. Zusatz.

Nimmt man also an, daß die Gesetze (3. Zus.) nicht nur für die vier ersten Potenzen von a+b, sondern auch für jede Potenz m davon gelten, es mag ihr Exponent m was immer für eine ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl ausdrücken; so wird man die mte Potenz $(a+b)^m$ denselben Gesetzen gemäß auf diese Art ausdrücken können.

1) Weil man b^1 zum ersten, b^2 zum zweyten, b^3 zum dritten u. s. f. Gliede rechnet (3. Zus. n. 3.); so ist der Exponent

Exponent von b in jedem Gliede diejenige Zahl, welche ausdrükt, das wievielte selbes Glied ist: wenn man demnach von einem unbestimmten $r$ten Gliede spricht; so gehört b^r zu eben dem Gliede, und so rechnet man b^{r-1} zum $(r-1)$ten, b^{r+1} zum $(r+1)$ten u. s. f. Gliede.

Es ist ferner aus (3. Zus. n. 2.) leicht abzunehmen, daß der Exponent von a in jedem Gliede um so viel Einheiten kleiner ist, als der Exponent der Potenz von $a+b$, zu welcher dasselbe Glied gehört, wie viel ihrer der Exponent von b in eben dem Gliede hat.

Will man also die Glieder der Potenz $(a+b)^m$ nur in Ansehung ihrer litteralischen Producte, dem Gesetze (3. Zus. n. 2.) gemäß, angeben; so werden sie seyn:

$$a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + \ldots$$

1tes. 2tes. 3tes. ....

$$+ a^{m-(r-1)}b^{r-1} + a^{m-r}b^r + a^{m-(r+1)}b^{r+1} + \ldots$$

$(r-1)$tes. $r$tes. $(r+1)$tes Glied.

2) Vermöge dieser Einleitung kann man nun auch die Coefficienten derselben Glieder nach dem Gesetze (3. Zus. n. 3.) folgendermaßen ausdrücken:

Fürs 1te Glied $\frac{m}{1}$

2te $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$

3te $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$\vdots$

$(r-1)$te $\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)}$

rte $\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))(m-(r-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r}$

$(r+1)$te $\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))(m-(r-1))(m-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r(r+1)}$

3) Wenn man also die litteralischen Producte (n. 1.) mit den Coefficienten (n. 2.) verbindet; so ergiebt sich die mte Potenz von $a+b$, wie folgt:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-2}b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)}a^{m-(r-1)}b^{r-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))(m-(r-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r}a^{m-r}b^r$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(r-2))(m-(r-1))(m-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r(r+1)}a^{m-(r+1)}b^{r+1}$$

5. Zuſatz.

Der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes von $(a+b)^m$ iſt vom Coefficienten des nächſt vorhergehenden $r$ten Gliedes nur in dem unterſchieden, daß jener den Factor $m-r$ im Zähler, und den Factor $r+1$ im Nenner, mehr hat, als der Coeffcient des $r$ten Gliedes (4. Zuſ. n. 2. 3.): wenn demnach R der Coefficient des $r$ten Gliedes heißt; ſo iſt $\frac{R(m-r)}{r+1}$ der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes, daher iſt aus (4. Zuſ.).

das $r$te Glied $= Ra^{m-r}b^r$,

und das $(r+1)$te Glied $= \frac{R(m-r)}{r+1} a^{m-(r+1)}b^{r+1}$.

Es iſt aber $\frac{m-r}{r+1} Ra^{m-(r+1)}b^{r+1} = Ra^{m-r}b^r \times \frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{b}{a}$: man kann daher aus jedem gegebenen $r$ten Gliede der Potenz $(a+b)^m$ das nächſt folgende $(r+1)$te finden, wenn man jenes mit $\frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{b}{a}$ multiplicirt, wo r die Zahl iſt, welche die Stelle des gegebenen Gliedes anzeiget, ſo, daß man das zweyte Glied aus dem erſten, das dritte aus dem zweyten, das vierte aus dem dritten u. ſ. f. erhält, wenn man das erſte mit $\frac{m-1}{1+1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{b}{a}$, das zweyte mit $\frac{m-2}{2+1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m-2}{3} \cdot \frac{b}{a}$, das dritte mit $\frac{m-3}{3+1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m-3}{4} \cdot \frac{b}{a}$ multiplicirt.

6. Zusatz.

Man kann demnach die Formul (4. Zus.) der $m$ten Potenz von $a+b$ unter eine einfachere Gestalt bringen, welche bey vielen Anwendungen bequemer ist. Es war nämlich $\frac{b}{a}$ im (5. Zus.) nichts anders, als der Quotient, welchen das zweyte Glied b der zweytheilichten Grösse $a+b$ durch das erste a dividirt geben soll, welchen Quotient man überhaupt mit Q bezeichnen kann: wenn man also überdem das erste Glied einer solchen Grösse nicht a sondern P nennt; so verwandelt sich die Formul (4. Zus. n. 3.) nach (5. Zus.) in die nachstehende:

$$P^m = \ldots\ldots\ldots A$$

$$+ \frac{m}{1} AQ = \ldots\ldots B$$

$$+ \frac{m-1}{2} BQ = \ldots\ldots C$$

$$+ \frac{m-2}{3} CQ = \ldots\ldots D$$

$$+ \frac{m-3}{4} DQ = \ldots\ldots E$$

$$+ \frac{m-4}{5} EQ = \ldots\ldots F$$

$$+ \frac{m-5}{6} FQ = \ldots\ldots G$$

u. s. f.

7. Zusatz.

Weil aber die Formul (6. Zus.) auch für einen gebrochenen Exponent m gelten soll (4. Zus.); so nehme man an, es sey $m = \frac{u}{v}$, und setze diesen Werth statt m überall in (6. Zus.), um die folgende Formul zu erhalten, welche bey einem gebrochenen Exponenten in der Ausübung bequemer ist.

$$P^{\frac{u}{v}} = \ldots\ldots\ldots A$$

$$+ \frac{u}{v} AQ = \ldots\ldots\ldots B$$

$$+ \frac{u-v}{2v} BQ = \ldots\ldots\ldots C$$

$$+ \frac{u-2v}{3v} CQ = \ldots\ldots\ldots D$$

$$+ \frac{u-3v}{4v} DQ = \ldots\ldots\ldots E$$

$$+ \frac{u-4v}{5v} EQ = \ldots\ldots\ldots F$$

u. s. f.

8. Zusatz.

Das zweyte Glied b ist in (4. Zus.) bejaht angenommen worden; für den Fall nun, wo man die mte Potenz einer zweytheilichten Grösse a — b verlangte, bliebe die Formul (4. Zus.) ungeändert, nur müßte man alle ungerade Potenzen von b nun verneint nehmen, und die geraden bejaht lassen (70. §. 1. 2. Zus.).

9. Zus

9. Zusatz.

Wenn der Exponent m der verlangten Potenz von einer zweytheilichten Grösse a+b eine bejahte ganze Zahl ist; so muß die Anzahl der Glieder dieser Potenz (4. Zus.), völlig bestimmt, und um Eins grösser seyn, als der Exponent m der Potenz selbst ist, welche demnach aus m+1 Gliedern bestehen wird. Denn wenn m eine ganze bejahte Zahl bedeutet, so kann die Zahl r in (4. Zus.) so groß als m werden, und dann ist $m-r=0$, folglich ist das $(r+1)$te, oder nun $(m+1)$te Glied auch $=0$, und so muß auch jedes folgende Glied $=0$ seyn (5. Zus.): die Potenz hat also nur diejenigen Glieder, welche vor dem $(r+1)$ten, oder $(m+1)$ten gehen, daher hat sie m Glieder, die höchste Potenz von a nicht mit gerechnet (4. Zus. n. 3.), und m+1 Glieder, wenn man auch diese Potenz mit rechnen will. Und weil nun für $r=m$ aus dem $r$ten Gliede (4. Zus. n. 3.) der Potenz $(a+b)^m$ ihr letztes Glied erhalten wird, und für $r=m$ dasselbe $r$te Glied sich in b^m verwandelt; so ist dieses das letzte Glied der Potenz $(a+b)^m$, wenn m eine ganze bejahte Zahl bedeutet.

10. Zusatz.

Ist aber der Exponent m bey $(a+b)^m$ entweder eine gebrochene bejahte, oder eine verneinte ganze oder gebrochene Zahl; so ist die Anzahl der Glieder von $(a+b)^m$ unbestimmt, so, daß es für sie kein letztes Glied giebt. Denn wenn die Potenz aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern

bestehen soll; so ist nöthig, daß man bey wirklicher Bestimmung dieser Glieder (5. Zus.) auf einen Coefficient komme, der $= o$ ist, welches aber bey dieser Voraussetzung nicht geschehen kann. Man setze nämlich, es soll $m - r = o$ oder der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes, daher auch das $(r+1)$te Glied selbst (5. Zus.) gleich Null seyn. Wenn $m = \frac{u}{v}$ eine gebrochene bejahte Zahl ist; so hat man $\frac{u}{v} - r = o$, folglich $\frac{u}{v} = r$, da doch r allemahl eine ganze Zahl bedeuten soll, die nämlich die Stelle der Glieder anzeigt: ist aber $m = -n$ eine ganze oder gebrochene verneinte Zahl; so wäre $-n - r = o$, daher $-n = r$, und $-n+n = r+n$, oder $o = r+n$, welches ungereimt ist.

11. Zusatz.

Wenn man $a+b$ auf die $(n-1)$te Potenz erheben will; so muß man $n-1$ statt m überall in (4. Zus.) nehmen: wenn man aber nur die litteralischen Producte von dieser Potenz haben will; so hat man sie aus (4. Zus. n. 1.), nämlich.

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

Multiplicirt man dieses mit $a-b$; so ist das Product $=$

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}$$
$$- a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - \ldots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n,$$

und dieses ist offenbar $= a^n - b^n$.

Nimmt

Nimmt man aber nur die litteralischen Producte der $(n-1)$ten Potenz von $a-b$ aus (4. Zus. n. 1.); so wird man haben

$$a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \ldots \pm ab^{n-2} \mp b^{n-1}.$$

Multiplicirt man dieses mit $a+b$; so ist das Product =

$$a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 + \ldots \pm a^2b^{n-2} \mp ab^{n-1}$$
$$+ a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 - \ldots \mp a^2b^{n-2} \pm ab^{n-1} \mp b^n,$$

und dieses ist offenbar $= a^n \mp b^n$, wo das obere Zeichen (—) für den Fall gielt, wenn n eine gerade Zahl bedeutet, weil alsdann $n-1$ eine ungerade Zahl ist, folglich (—) bey $\mp b^{n-1}$ Statt finden muß (70. §. 2. Zus.); das untere Zeichen (+) muß aber für eine ungerade Zahl n gelten, weil dann $n-1$ gerad ist, daher (+) bey $\mp b^{n-1}$ gelten muß (70. §. 1. Zus.).

12. Zusatz.

Wenn daher r was immer für eine ganze, und $2r$ was immer für eine gerade, $2r+1$ aber ungerade Zahl bedeutet; so hat man allemahl aus (11. Zus.):

$$a^{2r} - b^{2r} = (a^{2r-1} \pm a^{2r-2}b + a^{2r-3}b^2 \pm a^{2r-4}b^3 + \ldots\ldots$$
$$\pm b^{2r-1})\ (a \mp b);$$

$$a^{2r+1} \pm b^{2r+1} = (a^{2r} \mp a^{2r-1}b + a^{2r-2}b^2 \mp a^{2r-3}b^3 + \ldots\ldots$$
$$+ b^{2r})(a \pm b).$$

Z. B. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$a^4 - b^4 = (a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)$;

$= (a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)$.

$a^3+b^3 = (a^2-ab+b^2)(a+b)$.

$a^3-b^3 = (a^2+ab+b^2)(a-b)$.

$a^5+b^5 = (a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)$.

$a^5-b^5 = (a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)$.

Anmerkung des Herausgebers.

Die Formul (4. Zuſ.) drückt den ſogenannten binomiſchen Lehrſatz (*theorema binomiale*) aus, welcher bisweilen auch der Neutoniſche Lehrſatz (*theorema neutonianum*) heißt, indem die Erfindung deſſelben dem weltberühmten Mathematiker Neuton von den mehreſten Schriftſtellern zugeeignet wird: Herr Joh. Bernoulli machet ihm indeſſen dieſe Erfindung ſtreitig (a), und giebt Paſcal für den erſten Erfinder aus: nach den Nachrichten aber, welche im Leipziger Magazine gegeben werden (b), ſoll Herr Hutton auf die Entdeckung gekommen ſeyn, daß weder Neuton noch Paſcal, ſondern Heinrich Briggs der Erfinder des berühmten binomiſchen Lehrſatzes geweſen iſt: es konnte leicht geſchehen, daß jeder von dieſen groſſen Männern für ſich auf denſelben Satz verfallen iſt, da denn jeder von ihnen der Erfinder davon ſeyn würde, und es bliebe nur noch auszumachen, wer der erſte Erfinder war. Dem ſey indeſſen, wie ihm wolle; ſo bleibt doch dieſe Erfindung immer von groſſer Wichtigkeit, welches auch die Haupturſache

geweſen

gewesen seyn mag, daß die berühmtesten Mathematikverständige sich zu allen Zeiten bemühet haben, einen vollkommenen Beweis dafür zu geben, als welchen die ersten Erfinder nicht gegeben hatten. Herr Hofrath Kästner ist wohl der erste gewesen, welcher einen überzeugendsten und zugleich einfachen Beweis für den Fall gegeben hat, wenn der Exponent m (4. Zus.) eine ganze bejahte Zahl bedeutet (c); mit Zuziehung der Differential-Rechnung hat er hierauf die Richtigkeit der Formul (4. Zus.) auch für die übrigen Exponenten trefflich dargethan (d): die Erfindung jenes Beweises beruhet auf dem Grundsatze (54. §.), und man kann denselben, wenn man will, so führen: Man nehme an, daß die Gesetze (3. Zus.) für die *m*te Potenz von a+b gelten, und drücke daher $(a+b)^m$ nach (4. Zus.) aus; hierauf multiplicire man die so ausgedrückte Potenz $(a+b)^m$ mit a+b einmahl; so wird man die um einen Grad höhere Potenz $(a+b)^{m+1}$ von a+b finden, man wird zugleich erfahren, daß diese Potenz sich nach eben den Gesetzen (3. Zus.) richtet. Das heißt, man wird finden, daß die Gesetze (3. Zus.) für die um einen Grad höhere Potenz m+1 gelten müssen, wenn sie für die *m*te gelten: da also dieselben, wegen (3. Zus.), für die 2te, 3te und 4te Potenz von a+b gewiß gelten; so müssen sie auch für die 5te, 6te, 7te, und jede nächst höhere gelten.

Ich habe unter den Papieren des sel. Verfassers der Materialien, die ich nun in Ordnung zu bringen unternommen habe, einen Versuch gefunden, den binomischen Lehrsatz

für alle Exponenten, ohne Zuziehung der Differential-Rechnung, auf eine Art zu beweisen, die derjenigen ähnlich ist, deren sich Herr Hofrath Kästner bey der Differential-Rechnung bedient hat: diesen Beweis will ich demnach im folgenden Abschnitte beybringen, indem mir kein anderer bekannt ist, welcher bey gleicher Allgemeinheit überzeugender wäre; zuvor will ich noch mit dem Hrn. Verfasser den Gebrauch der vorhergehenden Theorie erläutern, welches für einen angehenden Analyst gar nicht überflüßig ist.

(a) *Ioan. Bernoulli Opera omn.* Tom. IV. p. 173.

(b) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. 1tes Stück. S. 123. aufs Jahr 1787.

(c) *Demonstratio theorematis binomialis.* Lipsiae 1745. hierauf in der Analysis endlicher Grössen. 116—141. §.

(d) Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen. 46. §.

77. §. Aufgabe.

Man soll eine verlangte Potenz, deren Exponent eine ganze bejahte Zahl ist, von einer gegebenen zweytheilichten Grösse bestimmen.

Auflösung. Das erste Glied der gegebenen zweytheilichten Grösse setze man $= P$, den Quotient aber, welchen das zweyte Glied durch das erste dividirt giebt, $= Q$, und den Exponent der verlangten Potenz $= m$: für diese Werthe von P, Q, m suche man endlich die Glieder der Potenz nach (76. §. 6. Zus.).

Bey-

Beyſpiel.

Man ſoll die fünfte Potenz von $\frac{1}{2}x + 2y$, nämlich $\left(\frac{1}{2}x+2y\right)^5$ beſtimmen.

Hier iſt $P = \frac{1}{2}x$; $Q = 2y : \frac{1}{2}x = \frac{4y}{x}$; und $m = 5$; alſo iſt nach (76. §. 6. Zuſ.)

$$P^m = \left(\frac{1}{2}x\right)^5 = \frac{1}{32}x^5 \text{ . . . . . A}$$

$$\frac{m}{1}\ AQ = 5 \cdot \frac{1}{32}x^5 \cdot \frac{4y}{x} = \frac{5}{8}x^4y \text{ . . . . B}$$

$$\frac{m-1}{2}\ BQ = \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{8}x^4y \cdot \frac{4y}{x} = 5x^3y^2 \text{ . . . . C}$$

$$\frac{m-2}{3}\ CQ = \frac{3}{3} \cdot 5x^3y^2 \cdot \frac{4y}{x} = 20x^2y^3 \text{ . . . . D}$$

$$\frac{m-3}{4}\ DQ = \frac{2}{4} \cdot 20x^2y^3 \cdot \frac{4y}{x} = 40xy^4 \text{ . . . . E}$$

$$\frac{m-4}{5}\ EQ = \frac{1}{5} \cdot 40xy^4 \cdot \frac{4y}{x} = 32y^5 \text{ . . . . F}$$

$$\frac{m-5}{6}\ FQ = \frac{0}{6} \cdot 32y^5 \cdot \frac{4y}{x} = 0.$$

Alſo iſt $\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^5$

$$= \frac{1}{32}x^5 + \frac{5}{8}x^4y + 5x^3y^2 + 20x^2y^3 + 40xy^4 + 32y^5.$$

78. §.

78. §. Aufgabe.

Eine Potenz, welche einen Bruch zu ihrem Exponent hat, von einer gegebenen zweytheilichten Grösse zu bestimmen.

Auflösung. Man wird diese Potenz nach (76. §. 7. Zus.) am bequemsten finden, wenn man die Werthe von P und Q, wie (77. §.) bestimmet, und überdem den Zähler des gebrochenen Exponenten, er mag bejaht oder verneint seyn, $= u$, den Nenner aber $= v$ setzt.

Beyspiele.

Man soll $(1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}} = (1+x)\sqrt[10]{(1-x)}$ **angeben.**

Hier muß man $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ suchen, und es sodann mit $1+x$ multipliciren: um nun $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ nach (76. §. 7. Zus.) anzugeben, setze man $P = 1$; $Q = \frac{-x}{1} = -x$; $u = 1$; $v = 10$. Für diese Werthe findet man nun die ersten Glieder von $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ auf die folgende Art, und man kann noch soviel man will Glieder davon auf gleiche Art bestimmen.

$$P^{\frac{u}{v}} = 1^{\frac{1}{10}} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad A$$

$$\frac{u}{v} AQ = \frac{1}{10} \times 1 \times -x = -\frac{1}{10} x \quad \ldots \quad B$$

$$\frac{u-v}{2v} BQ = \frac{1-10}{2 \cdot 10} \times -\frac{1}{10} x \times -x = \frac{-9x^2}{20.10} \ldots C$$

$$\frac{u-2v}{3v} CQ = \frac{1-20}{3 \cdot 10} \times \frac{-9x^2}{20.10} \times -x = \frac{-171x^3}{30.20.10} \ldots D$$

$$\frac{u-3v}{4v} DQ = \frac{1-30}{4 \cdot 10} \times \frac{-171x^3}{30.20.10} \times -x = \frac{-4959x^4}{40.30.20.10}$$

u. s. f.

Daher ist

$$(1-x)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10} x - \frac{9x^2}{200} - \frac{171x^3}{6000} - \frac{4959x^4}{240000} - \ldots$$

Multiplicirt man nun dieses mit $1+x$; so findet man

$$(1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10} x - \frac{9x^2}{200} - \frac{171x^3}{6000} - \frac{4959x^4}{240000} \ldots$$

$$+ x - \frac{1}{10} x^2 - \frac{9x^3}{200} - \frac{171x^4}{6000} - \ldots$$

$$= 1 + \frac{9}{10} x - \frac{29}{200} x^2 - \frac{147}{2000} x^3 - \frac{3933}{80000} x^4 - \ldots$$

Man soll $a(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{(ax-x^2)}}$ bestimmen.

Hier muß seyn $P = ax$; $Q = \frac{-x^2}{ax} = -\frac{x}{a}$; $u = -1$; $v = 2$: also ist nach (76. §. 7. Zus.)

$P^{\frac{u}{v}}$

$$P^{\frac{u}{v}} = (ax)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots \quad A$$

$$\frac{u}{v} AQ = \frac{-1}{2} \times \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \times -\frac{x}{a} = \frac{a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{2a} \quad \ldots \quad B$$

$$\frac{u-v}{2v} BQ = \frac{-1-2}{4} \times \frac{a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{2a} \times -\frac{x}{a} = \frac{3a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{8a^2} \ldots C$$

$$\frac{u-2v}{3v} CQ = \frac{-1-4}{6} \times \frac{3a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{8a^2} \times -\frac{x}{a} = \frac{5a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{16a^3} \ldots D$$

$$\frac{u-3v}{4v} DQ = \frac{-1-6}{8} \times \frac{5a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{16a^3} \times -\frac{x}{a} = \frac{35a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{128a^4} \ldots E$$

u. ſ. f.

Daher iſt

$$(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{2a} + \frac{3a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{8a^2} + \frac{5a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{16a^3}$$

$$+ \frac{35a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{128a^4} + \ldots\ldots$$

und $a(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{5}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}}$

$$+ \frac{35x^{\frac{7}{2}}}{128a^{\frac{7}{2}}} + \ldots\ldots$$

79. §.

79. §. Aufgabe.

Eine Formul anzugeben, welche dienen ſoll, jede Irrationalwurzel einer vorgelegten Zahl durch eine ſchnelle Näherung zu beſtimmen.

Auflöſung. 1) Die gegebene Zahl ſey a, und die verlangte Wurzel davon $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$: wenn dieſe Wurzel keine ganze Zahl iſt; ſo kann ſie auch kein Bruch ſeyn (73. §. Zuſ.), das heißt, man kann die Wurzel $\sqrt[m]{a}$ durch keine gebrochene Zahl genau angeben. Ich ſetze indeſſen voraus, daß man im Stande iſt, einige von den erſten Ziffern der Wurzel $\sqrt[m]{a}$ zu beſtimmen, ſo, daß ſie eine Zahl b ausmachen; ich ſetze ferner voraus, man könne b ſo beſtimmen, daß der noch fehlende Theil, den ich x nennen will, ſchon ein kleiner Bruch ſeyn muß, und nun kömmt alles darauf an, daß man eine Formul angebe, welche einen beträchtlichen Theil von x genau, und ſchnell genug geben mag.

2) Dem zufolge ſetze man $\sqrt[m]{a} = b + x$, wie es wegen der Vorausſetzung (n. 1.) ſeyn muß; ſo hat man $(\sqrt[m]{a})^m = (b+x)^m$, oder $a = (b+x)^m$: alſo iſt nach (76. §. 6. Zuſ.)

$$a = b^m + m b^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} b^{m-2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^{m-3} x^3 + \ldots.$$

3) Weil

VI. $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{20}\left(2\sqrt[3]{2}+2+\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)}{\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)\left(2\sqrt[3]{2}+2+\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)}$

$= \frac{2\sqrt[3]{40}+2\sqrt[3]{20}+\frac{2\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{2}}}{2} = 2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{10}.$

Der VIII. Abschnitt.

Allgemeiner Beweis des binomischen Lehrsatzes, und Anwendung derselben Beweisart auf die Erfindung der unbestimmten Potenz jeder ohne Ende fortlaufenden Function

$1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+ \ldots\ldots$

81. §. Lehrsatz.

Wenn man alle Glieder einer vieltheilichten Grösse $\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+\ldots\ldots+kx^s+lx^t$ mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirt (das erste Glied $\alpha=\alpha x^0$ nicht ausgenommen), und die neue, dadurch zu erhaltende Function von x mit der doppelten gegebenen, oder mit $2(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+lx^t)$ vervielfältiget; so wird das Product derjenigen vieltheilichten Function von x gleich seyn, welche man erhalten würde, wenn man alle Glieder des Quadrats

drats von $\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+lx^t$ mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte.

Beweis. 1) Ich nenne E die Reihe der Exponenten m, n, p ..... s, t, welche den Gliedern der gegebenen Function zugehören, und das, was herauskommen muß, wenn man dieſelben Glieder mit den zugehörigen Exponenten multiplicirt, bezeichne ich mit

$$(\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+\ldots+kx^s+lx^t).E.$$

Wäre z. B. nur $\alpha+ax^m\ bx^n$ gegeben; ſo wäre $(\alpha+ax^m+bx^n).E=\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n=max^m+nbx^n$.

2) Erhebt man aber $\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+\ldots+kx^s+lx^t$ zum Quadrat; ſo will ich ebenfalls mit e die Reihe der Exponenten bezeichnen, welche den Gliedern deſſelben Quadrats zugehören, und die Function, welche aus eben dem Quadrate entſtünde, wenn man ſeine Glieder mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte, ſoll $(\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+\ldots kx^s+lx^t)^2.e$ bedeuten.

3) Um alſo den Satz zu beweiſen, muß ich darthun, daß, alles in den Bedeutungen (n. 1. 2.) genommen, die nachſtehende Gleichung Statt findet.

$$(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+lx^t)^2.e=(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+lx^t).E.(\alpha+ax^m\ldots+lx^t).$$

4) Dieſes wird aber ſeine Richtigkeit haben, wenn man darthut, daß die Gleichung (n. 3.) für eine zweytheilichte Function $\alpha+ax^m$ und dreytheilichte $\alpha+ax^m+bx^n$ wirklich gielt, und daß dieſelbe für jede $(r+1)$theilichte

Function gelten müßte, wofern sie von einer $r$theilichten wahr wäre: man würde nämlich durch (54. §.) berechtigt seyn, von der zweytheilichten und dreytheilichten Function auf jede vieltheilichte zu schließen.

Nun gielt die Gleichung (n. 3.) gewiß für die zwey- und dreytheilichte Function, wie dieses folgende Rechnungen zeigen:

Für die zweytheilichte Function $\alpha+ax^m$

$$(\alpha+ax^m)^2=\alpha^2+2\alpha ax^m+a^2x^{2m}:$$

also nach (n. 2.) $(\alpha+ax^m)^2.e=\alpha^2.0+2\alpha ax^m.m+a^2x^{2m}.2m$

$$=2m\alpha ax^m+2ma^2x^{2m}$$

$$=2amx^m(\alpha+ax^m)=(\alpha.0+ax^m.m)\,2\,(\alpha+ax^m)$$

$$=(\alpha+ax^m).E\,2(\alpha+ax^m),\text{ wegen (n. 1.).}$$

Für die dreytheilichte Function $\alpha+ax^m+bx^n$

$$(\alpha+ax^m+bx^n)^2=\alpha^2+2\alpha ax^m+2\alpha bx^n+a^2x^{2m}$$
$$+2abx^{m+n}+b^2x^{2n};$$

also nach (n. 2.) $(\alpha+ax^m+bx^n)^2.e$

$$=\alpha^2.0+2\alpha ax^m.m+2\alpha bx^n.n$$
$$+a^2x^{2m}.2m+2abx^{m+n}.(m+n)+b^2x^{2n}.2n$$
$$=(\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n)2(\alpha+ax^m+bx^n)$$
$$=(\alpha+ax^m+bx^n).E\,2\,(\alpha+ax^m+bx^n)\text{ wegen (n. 1.)}$$

Wenn ferner $\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s=A$ eine $r$theilichte Function ist; so muß $A+lx^t=\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s+lx^t$ eine $(r+1)$theilichte Function seyn,

seyn, und ihr Quadrat ist $A^2+2Alx^t+l^2x^{2t}$: man muß aber sehen, was herauskommen würde, wenn man alle Glieder dieses Quadrats mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte.

I.) Wenn die Gleichung (n. 3.) von der ertheilichten Function wahr ist, weil das Quadrat dieser Function A^2 seyn soll; so wird man durch die Multiplication seiner Glieder, mit den zugehörigen Exponenten von x, wegen (n. 3. 1.) folgendes erhalten:

$(\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n+\ldots+kx^s.s)2(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s)$.

II.) Der zweyte Theil des Quadrats $(A+lx^t)^2$ war $2Alx^t$, oder $2Alx^t=2lx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s)$: wenn man also das, was zwischen den Klammern stehet, mit x^t multiplicirte: so würde das erste Glied den Exponent t, das zweyte m+t, das dritte n+t u. s. f. haben, bis zum letzten, dessen Exponent s+t wäre: wenn man also die Glieder von $2Alx^t$ mit den zugehörigen Exponenten von x vervielfältigte; so erhielte man folgendes:

$$2lx^t\big(t(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s)+\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n+\ldots+kx^s.s\big)$$
$$=2ltx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s)+2lx^t(\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n+\ldots+kx^s.s).$$

III.) Der dritte Theil vom Quadrate $A+lx^t$, war l^2x^{2t}, und dieser mit dem zugehörigen Exponenten von x multiplicirt, giebt $2tl^2x^{2t}=2ltx^t.lx^t$.

IV.

IV.) Aus I.) II.) III.) hat man also alles, was das Quadrat $A^2+2Alx^t+l^2x^{2t}$ der $(r+1)$theilichten Function von x gäbe, wenn die Gleichung (n. 3.) für die $r$theilichte Function wahr wäre, wie dieses in I.) vorausgesetzt worden ist: wenn man nämlich die Glieder desselben Quadrats mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte; so gäbe das Quadrat wegen I.) II.) III.) folgendes;

$$(\alpha,0+ax^m,m+bx^n,n+\cdots+kx^s,s)2(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots+kx^s)$$
$$+2ltx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots+kx^s)+2lx^t(\alpha,0+ax^m,m$$
$$+bx^n,n+\cdots+kx^s,s)$$
$$+2ltx^t,lx^t=$$
$$=(\alpha,0+ax^m,m+bx^n,n+\cdots+kx^s,s)2(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots$$
$$+kx^s+lx^t)$$
$$+2ltx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots+kx^s+lx^t)$$
$$=(\alpha,0+ax^m,m+bx^n,n+\cdots+kx^s,s+lx^t,t)2(\alpha+ax^m$$
$$+bx^n+\cdots+kx^s+lx^t)$$
$$=(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots+kx^s+lx^t),E\,2(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots$$
$$+kx^s+lx^t) \text{ wegen (n. 1.).}$$

Die Gleichung (n. 3.) muß also für die $(r+1)$theilichte Function richtig seyn, sobald man annimmt, daß sie für die $r$theilichte gielt.

Anmerkung des Herausgebers.

Um das, was der Herr Verfasser aus diesem Lehrsatze folgert, deutlich und kurz auszuführen, werde ich in der Folge die Reihen der Exponenten, wie oben in (n. 1. 2.) allemahl mit einem einzigen Buchstab E bezeichnen: wenn demnach

demnach Z, Y, X was immer für Functionen von x sind; so sollen Ausdrücke, wie Z.E; Y.E; X.E, nichts anders als diejenigen Functionen bedeuten, welche man erhalten würde, wenn man die Glieder der Functionen Z, Y, X mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte, wie es oben in (n. 1.) geschah; auch $Z^{m}.E$, $Z^{\frac{m}{n}}.E$ sind diejenigen Functionen, welche entstünden, wenn man die Glieder der Potenzen Z^{m}, $Z^{\frac{m}{n}}$ von der Function Z mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte; und $Z^{m}.EX$ ist das Product aus $Z^{m}.E$ in die Function X; und ZX.E ist die Function, welche herauskäme, wenn man die Glieder des Products ZX aus den Functionen Z und X mit den zugehörigen Exponenten von x vervielfältigte.

1. Zusatz.

Wenn Z und X zwo Functionen von x sind, wie die beym Lehrsatz war; so ist sowohl die Summe Z+X als die Differenz Z—X eine Function von eben der Art: also ist $(Z+X)^{2}.E = (Z+X).E\,2\,(Z+X)$; und $(Z-X)^{2}.E = (Z-X).E\,2\,(Z-X)$.

2. Zusatz.

Es ist aber einerley, ob man die Glieder der Summe Z+X oder Differenz Z—X in (1. Zus.) mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirt, oder die Glieder jeder Function Z und X mit den zugehörigen Exponenten von x zuvor multiplicirt, und dann das was X giebt, zu

dem

A, was Z giebt, addirt, oder davon abziehet: also ist aus (1. Zus.):

$$(Z+X)^2.E = (Z.E + X.E)\,2(Z+X);$$
$$(Z-X)^2.E = (Z.E - X.E)\,2(Z-X);$$

3. Zusatz.

Es ist ferner $4ZX = (Z+X)^2 - (Z-X)^2$, folglich $ZX = \frac{1}{4}(Z+X)^2 - \frac{1}{4}(Z-X)^2$: will man demnach $ZX.E$ wissen; so muß man $\frac{1}{4}(Z+X)^2.E - \frac{1}{4}(Z-X)^2.E$ suchen, in der Bedeutung (Anmerk.). Es ist also wegen (2. Zus.) allemahl;

$$ZX.E = \tfrac{1}{4}(Z.E+X.E)\,2(Z+X) - \tfrac{1}{4}(Z.E-X.E)\,2(Z-X)$$
$$= \tfrac{1}{4}(Z.E\,4X + X.E\,4Z) = Z.EX + X.EZ.$$

Das heißt: Wenn man die Glieder des Products aus zwoen Functionen von x, wie die beym Lehrsatz war, mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirt; so erhält man eine solche Function von x, welche man erhielte, wenn man die Glieder jeder einzeln genommenen Function mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte, und was herauskäme mit der andern Function vervielfältigte, alles hierauf in eine Summe brächte.

82. §. Lehrsatz.

Wenn $Z = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$ ist, und m eine ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl bedeutet; so ist doch allemahl in der Bedeutung (81. §. Anm.) $Z^m.E = mZ.EZ^{m-1}$.

Beweis.

Beweis. 1) Wenn m eine ganze bejahte Zahl iſt, weil $Z^2.E = 2Z.EZ = 2Z.EZ^{2-1}$ ſeyn muß (81. §.); ſo wird der Satz für jeden wie immer groſſen Exponent m gelten müſſen, wenn man darthut, daß, wenn er für einen gewiſſen Exponent n wahr wäre, derſelbe auch für den um Eins gröſſeren Exponent n+1 wahr ſeyn müßte (54. §.), dieſes kann man aber ſo beweiſen:

Es iſt $Z^{n+1} = Z^n.Z$: alſo $Z^{n+1}.E = Z^nZ.E$;

daher $Z^{n+1}.E = Z^n.EZ + Z.EZ^n$ (81. §. 3. Zuſ.).

Iſt demnach $Z^n.E = nZ.EZ^{n-1}$; ſo muß ſeyn

$$Z^{n+1}.E = nZ.EZ^{n-1}Z + Z.EZ^n$$
$$= nZ.EZ^n + Z.EZ^n = (n+1)Z.EZ^{(n+1)-1}$$

a) Es ſey m eine gebrochene ganze Zahl, z. B. $m = \frac{u}{v}$; ſo muß man beweiſen, daß $Z^{\frac{u}{v}}.E = \frac{u}{v}Z.EZ^{\frac{u}{v}-1}$ ſeyn muß.

Es iſt $Z^{\frac{u}{v}} = \sqrt[v]{Z^u}$ ſo gut eine Function von x, wie Z eine ſeyn ſoll, und wenn man auch wirklich nicht annähme, daß ſie von eben der Form ſeyn muß, von welcher Z iſt (26. §.); ſo iſt doch leicht einzuſehen, daß ſie von 1 anfangen muß, es mögen übrigens die Exponenten von x in den übrigen Gliedern was immer für eine ſeyn, indem auch der Satz in (n. 1.) wegen (81. §. und 3. Zuſ.) nicht nur für $Z = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \cdots$ ſondern auch für was immer für andere Exponenten gelten wird.

Man

VI. $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{20}\left(2\sqrt[3]{2}+2+\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)}{\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)\left(2\sqrt[3]{2}+2+\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)}$

$= \frac{2\sqrt[3]{40}+2\sqrt[3]{20}+\frac{2\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{2}}}{2} = 2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{10}.$

Der VIII. Abschnitt.

Allgemeiner Beweis des binomischen Lehrsatzes, und Anwendung derselben Beweisart auf die Erfindung der unbestimmten Potenz jeder ohne Ende fortlaufenden Function

$1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+ \cdots\cdots$

81. §. Lehrsatz.

Wenn man alle Glieder einer vieltheilichten Grösse $\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+\cdots\cdots+kx^s+lx^t$ mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirt (das erste Glied $\alpha=\alpha x^0$ nicht ausgenommen), und die neue, dadurch zu erhaltende Function von x mit der doppelten gegebenen, oder mit $2(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots+lx^t)$ vervielfältiget; so wird das Product derjenigen vieltheilichten Function von x gleich seyn, welche man erhalten würde, wenn man alle Glieder des Quadrats

drats von $\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+lx^t$ mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte.

Beweis. 1) Ich nenne E die Reihe der Exponenten m, n, p ---- s, t, welche den Gliedern der gegebenen Function zugehören, und das, was herauskommen muß, wenn man dieſelben Glieder mit den zugehörigen Exponenten multiplicirt, bezeichne ich mit

$$(\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+\ldots+kx^s+lx^t).E.$$

Wäre z. B. nur $\alpha+ax^m$ bx^n gegeben; ſo wäre $(\alpha+ax^m+bx^n).E=\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n=max^m+nbx^n$.

2) Erhebt man aber $\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+\ldots+kx^s+lx^t$ zum Quadrat; ſo will ich ebenfalls mit e die Reihe der Exponenten bezeichnen, welche den Gliedern deſſelben Quadrats zugehören, und die Function, welche aus eben dem Quadrate entſtünde, wenn man ſeine Glieder mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte, ſoll $(\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+\ldots kx^s+lx^t)^2.e$ bedeuten.

3) Um alſo den Satz zu beweiſen, muß ich darthun, daß, alles in den Bedeutungen (n. 1. 2.) genommen, die nachſtehende Gleichung Statt findet.

$$(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+lx^t)^2.e=(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+lx^t).E\ 2(\alpha+ax^m\ldots+lx^t).$$

4) Dieſes wird aber ſeine Richtigkeit haben, wenn man darthut, daß die Gleichung (n. 3.) für eine zweytheilichte Function $\alpha+ax^m$ und dreytheilichte $\alpha+ax^m+bx^n$ wirklich gielt, und daß dieſelbe für jede $(r+1)$theilichte

Function gelten müßte, wofern sie von einer $r$theilichten wahr wäre: man würde nämlich durch (54. §.) berechtiget seyn, von der zweytheilichten und dreytheilichten Function auf jede vieltheilichte zu schließen.

Nun gielt die Gleichung (n. 3.) gewiß für die zwey- und dreytheilichte Function, wie dieses folgende Rechnungen zeigen:

Für die zweytheilichte Function $\alpha+ax^m$

$$(\alpha+ax^m)^2=\alpha^2+2\alpha ax^m+a^2x^{2m};$$

also nach (n. 2.) $(\alpha+ax^m)^2.e=\alpha^2.0+2\alpha ax^m.m+a^2x^{2m}.2m$

$$=2m\alpha ax^m+2ma^2x^{2m}$$

$$=2amx^m(\alpha+ax^m)=(\alpha.0+ax^m.m)\,2(\alpha+ax^m)$$

$$=(\alpha+ax^m).E\,2(\alpha+ax^m),\text{ wegen (n. 1.).}$$

Für die dreytheilichte Function $\alpha+ax^m+bx^n$

$$(\alpha+ax^m+bx^n)^2=\alpha^2+2\alpha ax^m+2\alpha bx^n+a^2x^{2m}+2abx^{m+n}+b^2x^{2n};$$

also nach (n. 2.) $(\alpha+ax^m+bx^n)^2.e$

$$=\alpha^2.0+2\alpha ax^m.m+2\alpha bx^n.n+a^2x^{2m}.2m+2abx^{m+n}.(m+n)+b^2x^{2n}.2n$$

$$=(\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n)2(\alpha+ax^m+bx^n)$$

$$=(\alpha+ax^m+bx^n).E\,2(\alpha+ax^m+bx^n)\text{ wegen (n. 1.)}$$

Wenn ferner $\alpha+ax^m+bx^n+\ldots kx^s=A$ eine $r$theilichte Function ist; so muß $A+lx^t=\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s+lx^t$ eine $(r+1)$theilichte Function seyn,

seyn, und ihr Quadrat ist $A^2+2Alx^t+l^2x^{2t}$: man muß aber sehen, was herauskommen würde, wenn man alle Glieder dieses Quadrats mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte.

I.) Wenn die Gleichung (n. 3.) von der rtheilichten Function wahr ist, weil das Quadrat dieser Function A^2 seyn soll; so wird man durch die Multiplication seiner Glieder, mit den zugehörigen Exponenten von x, wegen (n. 3. 1.) folgendes erhalten:

$(\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n+\ldots+kx^s.s)2(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s)$.

II.) Der zweyte Theil des Quadrats $(A+lx^t)^2$ war $2Alx^t$, oder $2Alx^t=2lx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s)$: wenn man also das, was zwischen den Klammern stehet, mit x^t multiplicirte: so würde das erste Glied den Exponent t, das zweyte m+t, das dritte n+t u. s. f. haben, bis zum letzten, dessen Exponent s+t wäre: wenn man also die Glieder von $2Alx^t$ mit den zugehörigen Exponenten von x vervielfältigte; so erhielte man folgendes:

$$2lx^t\big(t(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s)+\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n+\ldots+kx^s.s\big)$$
$$=2ltx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots+kx^s)+2lx^t(\alpha.0+ax^m.m+bx^n.n+\ldots+kx^s.s).$$

III.) Der dritte Theil vom Quadrate $A+lx^t$, war l^2x^{2t}, und dieser mit dem zugehörigen Exponenten von x multiplicirt, giebt $2tl^2x^{2t}=2ltx^t.lx^t$.

IV.

IV.) Aus I.) II.) III.) hat man alſo alles, was das Quadrat $A^2+2Alx^t+l^2x^{2t}$ der $(r+1)$theilichten Function von x gäbe, wenn die Gleichung (n. 3.) für die $r$theilichte Function wahr wäre, wie dieſes in I.) vorausgeſetzt worden iſt: wenn man nämlich die Glieder deſſelben Quadrats mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte; ſo gäbe das Quadrat wegen I.) II.) III.) folgendes;

$$(\alpha,0+ax^m,m+bx^n,n+\cdots+kx^s,s)2(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots+kx^s)$$
$$+2ltx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots+kx^s)+2lx^t(\alpha,0+ax^m,m$$
$$+bx^n,n+\cdots+kx^s,s)$$
$$+2ltx^t,lx^t=$$
$$=(\alpha,0+ax^m,m+bx^n,n+\cdots+kx^s,s)2(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots$$
$$+kx^s+lx^t)$$
$$+2ltx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots+kx^s+lx^t)$$
$$=(\alpha,0+ax^m,m+bx^n,n+\cdots+kx^s,s+lx^t,t)2(\alpha+ax^m$$
$$+bx^n+\cdots+kx^s+lx^t)$$
$$=(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots+kx^s+lx^t).E\,2(\alpha+ax^m+bx^n+\cdots$$
$$+kx^s+lx^t)\text{ wegen (n. 1.).}$$

Die Gleichung (n. 3.) muß alſo für die $(r+1)$theilichte Function richtig ſeyn, ſobald man annimmt, daß ſie für die $r$theilichte gielt.

Anmerkung des Herausgebers.

Um das, was der Herr Verfaſſer aus dieſem Lehrſatze folgert, deutlich und kurz auszuführen, werde ich in der Folge die Reihen der Exponenten, wie oben in (n. 1. 2.) allemahl mit einem einzigen Buchſtab E bezeichnen: wenn

demnach

demnach Z, Y, X was immer für Functionen von x ſind; ſo ſollen Ausdrücke, wie Z.E; Y.E; X.E, nichts anders als diejenigen Functionen bedeuten, welche man erhalten würde, wenn man die Glieder der Functionen Z, Y, X mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte, wie es oben in (n. 1.) geſchah; auch $Z^{m}.E$, $Z^{\frac{m}{n}}.E$ ſind diejenigen Functionen, welche entſtünden, wenn man die Glieder der Potenzen Z^{m}, $Z^{\frac{m}{n}}$ von der Function Z mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte; und $Z^{m}.EX$ iſt das Product aus $Z^{m}.E$ in die Function X; und ZX.E iſt die Function, welche herauskäme, wenn man die Glieder des Products ZX aus den Functionen Z und X mit den zugehörigen Exponenten von x vervielfältigte.

1. Zuſatz.

Wenn Z und X zwo Functionen von x ſind, wie die beym Lehrſatz war; ſo iſt ſowohl die Summe Z+X als die Differenz Z—X eine Function von eben der Art: alſo iſt $(Z+X)^{a}.E = (Z+X).E\,a\,(Z+X)$; und $(Z-X)^{a}.E = (Z-X).E\,a\,(Z-X)$.

2. Zuſatz.

Es iſt aber einerley, ob man die Glieder der Summe Z+X oder Differenz Z—X in (1. Zuſ.) mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirt, oder die Glieder jeder Function Z und X mit den zugehörigen Exponenten von x zuvor multiplicirt, und dann das was X giebt, zu dem

hem, was Z giebt, addirt, oder davon abziehet: also ist aus (1. Zus.):

$$(Z+X)^2.E = (Z.E + X.E)\,2(Z+X);$$
$$(Z-X)^2.E = (Z.E - X.E)\,2(Z-X);$$

3. Zusatz.

Es ist ferner $4ZX = (Z+X)^2 - (Z-X)^2$, folglich $ZX = \frac{1}{4}(Z+X)^2 - \frac{1}{4}(Z-X)^2$: will man demnach ZX.E wissen; so muß man $\frac{1}{4}(Z+X)^2.E - \frac{1}{4}(Z-X)^2.E$ suchen, in der Bedeutung (Anmerk.). Es ist also wegen (2. Zus.) allemahl;

$$ZX.E = \tfrac{1}{4}(Z.E+X.E)\,2(Z+X) - \tfrac{1}{4}(Z.E-X.E)\,2(Z-X)$$
$$= \tfrac{1}{4}(Z.E\,4X + X.E\,4Z) = Z.EX + X.EZ.$$

Das heißt: Wenn man die Glieder des Products aus zwoen Functionen von x, wie die beym Lehrsatz war, mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirt; so erhält man eine solche Function von x, welche man erhielte, wenn man die Glieder jeder einzeln genommenen Function mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte, und was herauskäme mit der andern Function vervielfältigte, alles hierauf in eine Summe brächte.

82. §. Lehrsatz.

Wenn $Z = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$ ist, und m eine ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl bedeutet; so ist doch allemahl in der Bedeutung (81. §. Anm.) $Z^m.E = mZ.EZ^{m-1}$.

Beweis.

Beweis. 1) Wenn m eine ganze bejahte Zahl iſt, weil $Z^2.E = 2Z.EZ = 2Z.EZ^{2-1}$ ſeyn muß (81. §.); ſo wird der Satz für jeden wie immer groſſen Exponent m gelten müſſen, wenn man darthut, daß, wenn er für einen gewiſſen Exponent n wahr wäre, derſelbe auch für den um Eins gröſſeren Exponent $n+1$ wahr ſeyn müßte (54. §.), dieſes kann man aber ſo beweiſen:

Es iſt $Z^{n+1} = Z^n.Z$: alſo $Z^{n+1}.E = Z^nZ.E$;
daher $Z^{n+1}.E = Z^n.EZ + Z.EZ^n$ (81. §. 3. Zuſ.).
Iſt demnach $Z^n.E = nZ.EZ^{n-1}$; ſo muß ſeyn

$$Z^{n+1}.E = nZ.EZ^{n-1}Z + Z.EZ^n$$
$$= nZ.EZ^n + Z.EZ^n = (n+1)Z.EZ^{(n+1)-1}$$

a) Es ſey m eine gebrochene ganze Zahl, z. B. $m = \frac{u}{v}$; ſo muß man beweiſen, daß $Z^{\frac{u}{v}}.E = \frac{u}{v}Z.EZ^{\frac{u}{v}-1}$ ſeyn muß.

Es iſt $Z^{\frac{u}{v}} = \sqrt[v]{Z^u}$ ſo gut eine Function von x, wie Z eine ſeyn ſoll, und wenn man auch wirklich nicht annähme, daß ſie von eben der Form ſeyn muß, von welcher Z iſt (26. §.); ſo iſt doch leicht einzuſehen, daß ſie von 1 anfangen muß, es mögen übrigens die Exponenten von x in den übrigen Gliedern was immer für eine ſeyn, indem auch der Satz in (n. 1.) wegen (81. §. und 3. Zuſ.) nicht nur für $Z = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \cdots$ ſondern auch für was immer für andere Exponenten gelten wird.

Man

Man kann also die Function von x, welche $Z^{\frac{u}{v}}$ geben würde, mit y bezeichnen, daher $y = Z^{\frac{u}{v}}$ setzen und dann ist $y^v = (Z^{\frac{u}{v}})^v = Z^{\frac{uv}{v}} = Z^u$, folglich drückt nun y^v eben die Function von x aus, welche Z^u bedeutet, und so ist in der Bedeutung (81. §. Anm.) $y^v . E = Z^u . E$.

Da nun v und u ganze bejahte Zahlen sind; so hat man aus (n. 1.)

$$y^v . E = vy . E y^{v-1}; \quad Z^u . E = uZ . EZ^{u-1};$$

also $vy . Ey^{v-1} = uZ . EZ^{u-1}$, und

$$y . E = \frac{u}{v} \cdot \frac{Z . EZ^{u-1}}{y^{v-1}} \ldots$$

Es soll aber y eben die Function von x ausdrücken, welche $Z^{\frac{u}{v}}$ ausdrückt, daher ist $y . E = Z^{\frac{u}{v}} . E$.

Aus $y = Z^{\frac{u}{v}}$, und $y^v = Z^u$ erhält man ferner $\frac{y^v}{y} = \frac{Z^u}{Z^{\frac{u}{v}}}$, oder $y^{v-1} = Z^{u-\frac{u}{v}}$: setzt man daher diese Werthe von $y . E$ und y^{v-1} in der letzten Gleichung $y . E = \frac{u}{v} \cdot \frac{Z . EZ^{u-1}}{y^{v-1}}$; so findet man das gesuchte, nämlich:

$$Z^{\frac{u}{v}} . E = \frac{u}{v} \cdot \frac{Z . EZ^{u-1}}{Z^{u-\frac{u}{v}}} = \frac{u}{v} Z . EZ^{u-1-u+\frac{u}{v}};$$

oder $Z^{\frac{u}{v}} . E = \frac{u}{v} Z . EZ^{\frac{u}{v}-1}$.

3) Sey

3) Sey endlich m eine verneinte Zahl $= -n$, sie mag übrigens ganz oder gebrochen seyn; so wird seyn $Z^{-n}.E = -nZ.EZ^{-n-1}$.

Auch $Z^{-n} = \frac{1}{Z^n}$ muß eine gewisse Function von x seyn, wie (81. §.), und es ist $Z^{-n}.Z^{2n} = Z^n$: also ist in der Bedeutung (81. §. Anmerk.):

$Z^n.E = Z^{-n}Z^{2n}.E = Z^{-n}.EZ^{2n} + Z^{2n}.EZ^{-n}$

(81. §. 3. Zus.).

Es mag aber n eine ganze oder gebrochene Zahl seyn; so ist doch allemahl wegen (n. 1. 2.)

$Z^n.E = nZ.EZ^{n-1}$; $Z^{2n}.E = 2nZ.EZ^{2n-1}$;

also $nZ.EZ^{n-1} = Z^{-n}.EZ^{2n} + 2nZ.EZ^{2n-1}Z^{-n}$

oder $nZ.EZ^{n-1} = Z^{-n}.EZ^{2n} + 2nZ.EZ^{n-1}$

oder $nZ.E = Z^{-n}.EZ^{n+1} + 2nZ.E$

daher $Z^{-n}.EZ^{n+1} = nZ.E - 2nZ.E = -nZ.E$,

folglich $Z^{-n}.E = \frac{-nZ.E}{Z^{n+1}} = -nZ.EZ^{-n-1}$.

83. §. Lehrsatz.

Wenn eine Function von x, wie $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots + Px^r$ allemahl gleich Null wird, man mag der Grösse x was immer für einen Werth geben, auch $x = 0$ setzen; so müssen A, B, C, D, E ... P Grössen, jede Grösse für sich, gleich Null seyn.

Beweis. 1) Weil $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+Px^r+Qx^{r+1}+\ldots+Zx^m=o$ seyn soll; so ist $Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+Px^r+Qx^{r+1}+\ldots+Zx^m=-A$. Da also $-A$ von x gar nicht abhängt, sondern eine bestimmte Grösse $=o$, oder was immer für eine andere seyn soll, es mag x was immer für einen Werth erhalten; so muß auch $Bx+Cx^2+\ldots+Px^r+Qx^{r+1}+\ldots+Zx^m$ einen völlig bestimmten Werth $=o$, oder einen anderen $=-A$, allemahl haben, was immer für einen Werth auch x erhalten mag.

2) Wenn man $x=o$ setzt; so ist $Bx=o$; $Cx^2=o$ .... $Px^r=o$; $Qx^{r+1}=o$ .... $Zx^m=o$, daher aus (n. 1.) $A+o+o+o\ldots+o+o\ldots+o=o$, folglich $A=o$. Für $x=o$ ist also allemahl $A=o$, und $Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+Px^r+Qx^{r+1}+\ldots+Zx^m=o$, welches, wenn man alles mit x dividirt, $B+Cx+Dx^2+\ldots+Px^{r-1}+Qx^r+\ldots+Zx^{m-1}=o$ giebt.

3) Es muß aber $A=o$ auch für jeden andern Werth von x, z. B. für $x=n$, seyn, wenn $A+Bx+Cx^2+\ldots+Px^r+Qx^{r+1}+\ldots+Zx^m=o$ für jeden Werth von x ist. Weil nämlich A von x gar nicht abhängt, sondern schon in sich völlig bestimmt ist (n. 1.); so muß nothwendig A für $x=o$ oder $x=n$, und für was immer für einen andern Werth von x einerley seyn: da also $A=o$ für $x=o$ seyn muß (n. 2.); so ist auch $A=o$ für $x=n$ und jeden andern Werth von x.

4) Es

4) Es ist allemahl $B+Cx+Dx^2+\ldots+Px^{r-1}+Qx^r+\ldots+Zx^{m-1}=o$, man mag $x=o$ oder $x=n$ setzen, und es mag n was immer für ein Werth seyn (n. 2. 3.): also ist auch $B=o$ für jeden Werth von x, indem nun für B das gielt, was für A in (n. 1. 2. 3.) galt.

Ist aber $B=o$ für jeden Werth von x; so ist auch $o+Cx+Dx^2+\ldots+Zx^{m-1}=o$, oder $Cx+Dx^2+\ldots+Zx^{m-1}=o$ für jeden Werth von x, und dieses, wenn man alles durch x dividirt, giebt nun $C+Dx+\ldots+Zx^{m-2}=o$ für jeden Werth von x, daher auch $C=o$ für jeden Werth von x, wie dieses für A und B richtig war.

5) Wenn man annimmt, daß in $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+Px^r+Qx^{r+1}+\ldots+Zx^m=o$ einige von den Grössen A, B, C ... bis zum Coefficient P einer unbestimmten rten Potenz von x gleich Null sind; so hat man $o+o+o+o+\ldots+o+Qx^{r+1}+Rx^{r+2}+\ldots+Zx^m=o$, oder $Qx^{r+1}+Rx^{r+2}+\ldots+Zx^m=o$, und wenn alles durch x^{r+1} dividirt wird, $Q+Rx+\ldots+Zx^{m-r-1}=o$ für jeden Werth von x: also $Q=o$, wie $A=o$ in (n. 1. 2. 3.).

Das heißt: wenn einige von den Grössen A, B, C ... bis zum Coefficient einer gewissen rten Potenz von x gleich Null sind; so muß auch der Coefficient der nächst höheren $(r+1)$ten Potenz von x gleich Null seyn: da also alle Grössen bis zum Coefficient C der zweyten Potenz von x gewiß gleich Null seyn müssen (n. 4.); so ist auch der Coefficient D der dritten, und so auch der Coefficient jeder nächst

höheren Potenz von x gleich Null, daher $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0 \ldots P=0$, $Q=0 \ldots Z=0$ (54. §.).

Zusatz.

Wenn also zwo solche Functionen einander gleich sind; so müssen auch die einerley Potenzen von x zugehörigen Coefficienten derselben Functionen einander gleich seyn: nämlich aus

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+Px^n=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots+px^n+qx^{n+1}+rx^{n+2}+\ldots+zx^m$$

folgt

$$\left.\begin{matrix}A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+Px^n\\ -a-bx-cx^2-dx^3-\ldots-px^n-qx^{n+1}-rx^{n+2}\ldots-zx^m\end{matrix}\right)=0$$

oder

$$\left.\begin{matrix}A+B)x+C)x^2+D)x^3\ldots+P)x^n-qx^{n+1}-rx^{n+2}\ldots-zx^m\\ -a-b)\quad -c)\quad -d)\quad\ldots\quad -p)\end{matrix}\right)=0,$$

daher

$$A-a=0;\ B-b=0;\ C-c=0;\ D-d=0\ldots$$
$$P-p=0;\ -q=0;\ -r=0\ldots\ldots-z=0,$$

folglich

$$A=a;\ B=b;\ C=c;\ D=d\ldots P=p;\ q=0;$$
$$r=0\ldots z=0.$$

84. §. Aufgabe.

Die *m*te Potenz von $a+b$ zu finden, es mag *m* eine ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl bedeuten.

Auflö-

Auflösung. 1) Es ist $a+b=\left(1+\frac{b}{a}\right)a$: also ist $(a+b)^m=\left(1+\frac{b}{a}\right)^m.a^m$ wegen (10. §. 16. Zus.): setzt man demnach $\frac{b}{a}=x$; so hat man $(a+b)^m=(1+x)^m.a^m$.

Man muß also die *m*te Potenz von $1+x$ suchen, und sie mit a^m multipliciren, wenn man $(a+b)^m$ haben will.

2) Man setze $(1+x)^m=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots+Px^{r-1}+Qx^r+Rx^{r+1}+\ldots=Z$, und nun kömmt alles darauf an, daß man die Coefficienten A, B, C, D ... P, Q, R so bestimme, daß diese Gleichung für sie Statt haben mag (26. §.).

3) Es sey $1+x=y$, daher $(1+x)^m=y^m=Z$; so ist in der Bedeutung (81. §. Anm.) $y^m.E=Z.E.$ Es ist aber $y^m.E=my.Ey^{m-1}$ (82. §.): also ist auch

$$my.Ey^{m-1}=Z.E.$$

Aber $y^{m-1}=\frac{y^m}{y}=\frac{Z}{y}$: also ist

$$\frac{my.EZ}{y}=Z.E, \text{ und } my.EZ=Z.Ey;$$

folglich auch $\frac{my.EZ}{x}=\frac{Z.Ey}{x}$.

4) Nun verfahre man damit auf diese Art.

I.) $y=1+x$; daher $y.E=1.o+x.1=x$ (81. §. Anm.); und $my.E=mx$, folglich $\frac{my.E}{x}=m$.

II.) $Z = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots + Px^{r-1} + Qx^r + Rx^{r+1} + \ldots$ aus (n. 2.):

also aus I.) $\frac{my.EZ}{x} = m + mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 + \ldots + mPx^{r-1} + mQx^r + mRx^{r+1} + \ldots$

III.) In der Bedeutung (81. §. Anm.) hat man ferner aus II.):

$Z.E = 1.0 + Ax.1 + Bx^2.2 + Cx^3.3 + Dx^4.4 + \ldots + Px^{r-1}.(r-1) + Qx^r.r + Rx^{r+1}.(r+1) + \ldots$

$= Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + \ldots + (r-1)Px^{r-1} + rQx^r + (r+1)Rx^{r+1} + \ldots;$

$\frac{Z.E}{x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots + (r-1)Px^{r-2} + rQx^{r-1} + (r+1)Rx^r + \ldots$

IV.) Wegen $y = 1 + x$ hat man endlich aus III.)

$\frac{Z.Ey}{x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots + (r-1)Px^{r-2} + rQx^{r-1} + (r+1)Rx^r + \ldots$

$+ Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + \ldots + (r-1)Px^{r-1} + rQx^r + \ldots$

$\frac{Z.Ey}{x} = A + (A + 2B)x + (2B + 3C)x^2 + (3C + 4D)x^3 + \ldots$

$+ (rQ + (r-1)P)x^{r-1} + ((r+1)R + rQ)x^r + \ldots$

V.) Weil a und b bey $(a+b)^m$ völlig unbestimmte Zahlen seyn müssen; so ist auch $(1+x)^m.a^m = (a+b)^m$ in (n. 1.) völlig unbestimmt, so, daß dieses auch für den Fall gelten muß, wenn man $b = 0$, daher $(a+b)^m = (a+0)^m = a^m$ setzt;

ſetzt; denn es iſt in dieſem Fall $x = \frac{b}{a}$ aus (n. 1.) $= \frac{0}{a} = 0$, daher $(1+x)^m . a^m = 1^m . a^m = a^m$. Eben ſo gielt die Gleichung $(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + \ldots$ in (n. 2.) für jeden Werth von x, auch für $x = 0$, indem alsdann $Ax = 0$; $Bx^2 = 0$; $Cx^3 = 0 \ldots$ daher $(1+x)^m = 1$ wird, wie es wirklich ſeyn muß.

Die letzte Gleichung in (n. 3.) gielt demnach allemahl, es mag x was immer für einen Werth bey $y = 1+x$ haben, daher ſind auch für jeden Werth von x die Functionen in II.) und IV.) einander gleich: alſo iſt wegen (83. §. Zuſ.)

$A = m;$		$A = m;$
$2B + A = mA;$		$B = \frac{m-1}{2} \cdot A;$
$3C + 2B = mB;$		$C = \frac{m-2}{3} B;$
$4D + 3C = mC;$	alſo	$D = \frac{m-3}{4} C;$
⋮		⋮
$rQ + (r-1)P = mP;$		$Q = \frac{m-(r-1)}{r} \cdot P$
$(r+1)R + rQ = mQ.$		$R = \frac{m-r}{r+1} Q.$

Nimmt man daher dieſe Coefficienten in $(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + \ldots$ wegen (n. 2.); ſo hat man

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \ldots$$

$$+ Q x^r + \frac{m-r}{r+1} Q x^{r+1} + \ldots$$

Es war aber $x = \frac{b}{a}$: alſo iſt

$$(1+x)^m = 1 + m\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{b^4}{a^4} + \ldots$$

$$+ Q\frac{b^r}{a^r} + \frac{m-r}{r+1} Q \frac{b^{r+1}}{a^{r+1}} + \ldots$$

Wenn man endlich dieſes mit a^m multiplicirt; ſo erhält man wegen (n. 1.):

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4}b^4 + \ldots$$

$$+ Qa^{m-r}b^r + \frac{m-r}{r+1} Q a^{m-(r+1)} b^{r+1} + \ldots$$

Die

Die Formul (76. §. 4. Zuſ.) iſt demnach für alle Exponenten richtig, indem auch hier jedes $(r+1)$te Glied $\frac{m-r}{r+1} Qa^{m-(r+1)} b^{r+1}$ aus dem $r$ten Gliede $Qa^{m-r}b^r$ vollkommen, wie dorten (76. §. 5. Zuſ.) erhalten wird.

85. §. Aufgabe.

Es iſt eine ohne Ende fortlaufende Function $y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{----}$ gegeben; man ſoll jede unbeſtimmte Potenz y^m von ihr angeben.

Auflöſung. 1) Man nehme an, es ſey für jeden Werth von x die $m$te Potenz von

$$y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{----}$$

$$y^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{----} = Z \text{ (26. §.)}$$

So iſt vollkommen wie (84. §. n. 3.) für jeden Werth von x, auch für $x = 0$.

$$\frac{my.EZ}{x} = \frac{Z.Ey}{x}.$$

2) Nun iſt in der Bedeutung (81. §. Anm.)

$$y.E = \alpha x + 2\beta x^2 + 3\gamma x^3 + 4\delta x^4 + 5\varepsilon x^5 + \text{---};$$

daher

$$\frac{my.E}{x} = m\alpha + 2m\beta x + 3m\gamma x^2 + 4m\delta x^3 + 5m\varepsilon x^4 + \text{---};$$

und wenn man dieſes mit $Z = 1 + Ax + Bx^2 \text{----}$ in (n. 1.) multiplicirt; ſo hat man

$$\frac{my.EZ}{x} = m\alpha + 2m\beta x + 3m\gamma x^2 + 4m\delta x^3 + 5m\varepsilon x^4 + \ldots\ldots$$
$$+ m\alpha Ax + 2m\beta Ax^2 + 3m\gamma Ax^3 + 4m\delta Ax^4 + \ldots$$
$$+ m\alpha Bx^2 + 2m\beta Bx^3 + 3m\gamma Bx^4 + \ldots$$
$$+ m\alpha Cx^3 + 2m\beta Cx^4 + \ldots$$
$$+ m\alpha Dx^4 + \ldots$$

3) Ferner iſt aus (n. 1.) in der Bedeutung (81. §. Anmerk.)

$$\frac{Z.E}{x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots\ldots;$$

und wenn man nun dieſes mit

$$y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \ldots\ldots$$

multiplicirt; ſo hat man

$$\frac{Z.Ey}{x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots\ldots$$
$$+ \alpha Ax + 2\alpha Bx^2 + 3\alpha Cx^3 + 4\alpha Dx^4 + \ldots\ldots$$
$$+ \beta Ax^2 + 2\beta Bx^3 + 3\beta Cx^4 + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma Ax^3 + 2\gamma Bx^4 + \ldots\ldots$$
$$+ \delta Ax^4 + \ldots\ldots$$

4) Aus (n. 1.) folgt nun, daß die Functionen von x in (n. 2. 3.) für jeden Werth von x gleich ſeyn müſſen: alſo erhält man daraus wegen (83. §. Zuſ.) folgendes:

I. $m\alpha = A$;

II. $2m\beta + m\alpha A = 2B + \alpha A$;

III. $3m\gamma + 2m\beta A + m\alpha B = 3C + 2\alpha B + \beta A$;

IV. $4m\delta + 3m\gamma A + 2m\beta B + m\alpha C = 4D + 3\alpha C + 2\beta B + \gamma A$;

V. $5m\varepsilon + 4m\delta A + 3m\gamma B + 2m\beta C + m\alpha D = 5E + 4\alpha D + 3\beta C + 2\gamma B + \delta A$.

Man

Man kann nun aus I.) den Werth von A, aus II.) den Werth von B, aus III.) den Werth von C, aus IV.) den Werth von D, und aus V.) den von E, wie folgt bestimmen.

$$A = m\alpha.$$

$$B = \frac{(m-1)A\alpha + 2m\beta}{2}.$$

$$C = \frac{(m-2)B\alpha + (2m-1)A\beta + 3m\gamma}{3}.$$

$$D = \frac{(m-3)C\alpha + (2m-2)B\beta + (3m-1)A\gamma + 4m\delta}{4}.$$

$$E = \frac{(m-4)D\alpha + (2m-3)C\beta + (3m-2)B\gamma + (4m-1)A\delta + 5m\varepsilon}{5}.$$

5) Dieses sind also die Coefficienten des ersten, zweyten, dritten, vierten und fünften Gliedes der *m*ten Potenz von y, wegen (n. 1.), wenn man die Glieder derselben von demjenigen an zu zählen anfängt, welches die erste Potenz von x enthält; man kann aber, wenn man will, den Werth von A statt A in B, und nun die Werthe von A und B statt A, B in C, ferner die Werthe von A, B, C statt A, B, C in D, endlich die Werthe von A, B, C, D statt A, B, C, D in E setzen, um eben die Coefficienten A, B, C, D, E durch die gegebenen α, β, γ, δ, ε und den Exponent m der verlangten Potenz auszudrücken.

6) Weil aber die *m*te Potenz der unbestimmten Function $y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots$ ohne Ende fortgehen kann; so bleibt noch zu untersuchen übrig, auf was für eine

Art

Aer man auch die folgenden Coefficienten von so viel man will Gliedern der Potenz y^m bestimmen kann? Man muß demnach noch untersuchen, ob es nicht ein gewisses Gesetz giebt, wornach sich der Coefficient jedes folgenden Gliedes der verlangten Potenz y^m aus den Coefficienten der vorhergehenden Glieder (n. 4.) bestimmen läßt.

7) Wenn man die in (n. 4.) bestimmten Coefficienten erwäget; so findet man dabey folgende Gesetze.

a) Der Coefficient jedes Gliedes der verlangten Potenz y^m ist durch alle Coefficienten der vorhergehenden Glieder von y^m bestimmt: er ist ein Bruch, dessen Zähler aus so vielen Theilen bestehet, als der Nenner Einheiten hat.

b) Der Nenner bey a) ist allemahl die Zahl, welche anzeiget, von des wie vielten Gliedes Coefficienten die Rede ist.

c) In jedem Theile des Zählers in a), wenn man seine Theile von der Linken gegen die Rechte zu zählet, ist der Exponent m der verlangten Potenz von y mit derjenigen Zahl multiplicirt, welche die Stelle desselben Theiles im Zähler anzeiget, und vom Producte ist die Zahl abgezogen, um welche jene Zahl vom Nenner a) übertroffen wird, hierauf ist der Rest mit dem Coefficienten desjenigen Gliedes von der Function $y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$, dessen Stelle durch die in m multiplicirte Zahl, angezeigt ist, und mit dem Coefficienten desjenigen Gliedes der Potenz $y^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ multiplicirt, dessen Stelle die von m abgezogene Zahl anzeiget.

Z. B.

Z. B. In (n. 4.) ist E der Coefficient des fünften Gliedes Ex^5 der verlangten Potenz y^m; er ist durch die Coefficienten A, B, C, D der vorhergehenden Glieder bestimmt, und ein Bruch, dessen Zähler aus fünf Theilen bestehet, der Nenner aber 5 ist, wie dieses die Gesetze a) b) haben wollen.

Um nun auch das Gesetz c) beym Coefficienten E zu prüfen, betrachte man z. B. den dritten Theil $(3m-2)B\gamma$ des Zählers dieses Coefficienten: hier ist m mit 3 multiplicirt, und 2 vom Producte abgezogen, wie es c) verlangt: es ist ferner der Rest $3m-2$ mit dem Coefficienten γ des dritten Gliedes von $y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \cdots$ und mit dem Coefficienten B des zweyten Gliedes von $y^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots$ multiplicirt, wie dieses ebenfalls nach c) geschehen muß.

8) Wenn also die Gesetze (n. 7.) nicht nur für die Coefficienten der fünf ersten Glieder der verlangten Potenz y^m, wie sie von ihnen wegen (n. 4.) wahr sind, sondern auch für die Coefficienten aller darauf folgenden Glieder von y^m wahr wären; so wäre keine sonderliche Arbeit, die Coefficienten von so vielen Gliedern der verlangten Potenz y^m zu bestimmen, wie viel man ihrer immer haben wollte, und es käme nun alles darauf an, daß man untersuche, den Coefficient eines völlig unbestimmten Gliedes von y^m deutlich anzugeben, welches so geschehen kann.

I.) Man bezeichne die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ der gegebenen Function $y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots$

mit

mit λ^{I}, λ^{II}, λ^{III}, λ^{IV}, λ^{V} - - - - λ^{r}, λ^{r+1}, ſo, daß I, II, III, IV, V, - - - r, r+1 nichts anders anzeigen, als zu welchen Gliedern der Function y ſolche Coefficienten gehören; ſo z. B. r+1 zeigt an, daß λ^{r+1} der Coefficient des (r+1)ten Gliedes von y, daher der (r+1)ten Potenz x^{r+1} von x iſt.

II.) Eben ſo bezeichne man die Coefficienten A, B, C, D, E - - - der Potenz $y^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{- - -}$ mit L^{I}, L^{II}, L^{III}, L^{IV}, L^{V} - - - L^{r}, L^{r+1} u. ſ. f.

III.) Aus I.) und II.) iſt demnach ganz allgemein

$$y = 1 + \lambda^{I}x + \lambda^{II}x^2 + \lambda^{III}x^3 + \text{- - -} + \lambda^{r}x^{r} + \lambda^{r+1}x^{r+1} + \text{- - -}$$
$$\text{- - -} + \lambda^{n-r+1}x^{n-r+1} + \text{- - -} + \lambda^{n-1}x^{n-1} + \lambda^{n}x^{n} + \lambda^{n+1}x^{n+1} + \text{- - -}$$

$$y^m = Z = 1 + L^{I}x + L^{II}x^2 + L^{III}x^3 + \text{- - -} + L^{r}x^{r} + L^{r+1}x^{r+1} + \text{- - -}$$
$$\text{- - -} + L^{n-r+1}x^{n-r+1} + \text{- - -} + L^{n-1}x^{n-1} + L^{n}x^{n} + L^{n+1}x^{n+1} + \text{- - -}$$

IV.) Will man nun den Coefficient L^n des nten Gliedes $L^n x^n$ von y^m haben; ſo weiß man ſchon, daß dieſer Coefficient n zum Nenner, und einen aus n Theilen beſtehenden Zähler haben muß, wegen (n. 7. a, b), ſo, daß jeder unbeſtimmte rte Theil dieſes Zählers, wegen (n. 7. c), genau durch $(rm-(n-r))L^{n-r}\lambda^{r}$ ausgedrückt wird, woraus der erſte, zweyte, dritte, vierte u. ſ. f. Theil deſſelben Zählers herauskömmt, wenn man ſtatt r die Zahlen 1, 2, 3, 4 u. ſ. f. bey rm — (n — r) und I, II, III, IV u. ſ. f. bey L^{n-r} und λ^{r} wegen I.) II.) III.) nimmt, wobey man den verlangten Coefficient L^n, wie folgt beſchaffen findet.

$L^n =$

$$L^n = \frac{(m-(n-1))L^{n-1}\lambda^{I} + (2m-(n-2))L^{n-2}\lambda^{II}}{n}$$
$$+\frac{(3m-(n-3))L^{n-3}\lambda^{III} + (4m-(n-4))L^{n-4}\lambda^{IV}}{n}$$
$$+\frac{\cdots + (rm-(n-r))L^{n-r}\lambda^{r} + \cdots\cdots\cdots}{n}$$

9) Es muß aber dargethan werden, daß die Formul (n. 8. IV.) den Coefficient des *n*ten Gliedes von y^m richtig ausdrückt, daß daher die Geſetze (n. 7. a, b, c) für alle Coefficienten von y^m gelten: zu dieſer Abſicht wird nun hinreichen, wenn man beweiſet, daß bey der Vorausſetzung der Formul (n. 8. IV), welche die Geſetze (n. 7. a, b, c) beym Coefficienten des *n*ten Gliedes von y^m ausdrückt, der Coefficient des $(n+1)$ten Gliedes von y^m durch eine Formul ausgedrückt werden muß, welche eben denſelben Geſetzen angemeſſen iſt: denn ſo wird gewiß ſeyn, daß dieſe Geſetze nicht nur für die Coefficienten der fünf erſten Glieder von y^m, ſondern auch für den Coefficient jedes darauf folgenden Gliedes, daher für jeden *n*ten (n. 8. IV.) gelten müſſen (54. §.).

10) Dem zufolge hat man aus (n. 8. III.) in der Bedeutung (81. §. Anm.)

I.) $$\frac{\frac{1}{n}my \cdot E}{x} = m\lambda^{I} + 2m\lambda^{II}x + \cdots + rm\lambda^{r}x^{r-1}$$
$$+(r+1)m\lambda^{r+1}x^{r} + \cdots$$
$$\cdots + (n-r+1)m\lambda^{n-r+1}x^{n-r} + \cdots\cdots$$
$$\cdots + (n-1)m\lambda^{n-1}x^{n-2} + nm\lambda^{n}x^{n-1}$$
$$+(n+1)m\lambda^{n+1}x^{n} + \cdots\cdots$$

II.)

II.) $\frac{Z.E}{x} = L^{I} + 2L^{II}x + \cdots + rL^{r}x^{r-1} + (r+1)L^{r+1}x^{r} + \cdots$
$\cdots + (n-r+1)L^{n-r+1}x^{n-r} + \cdots\cdots$
$\cdots + (n-1)L^{n-1}x^{n-2} + nL^{n}x^{n-1}$
$+ (n+1)L^{n+1}x^{n} + \cdots\cdots$

III.) Wollte man nun das Product $\frac{my.EZ}{x}$ wiſſen; ſo müßte man Z in (n. 8. ~~IV.~~ III.) mit jedem Gliede von $\frac{my.E}{x}$ in I.) multipliciren: will man aber nur diejenigen Glieder deſſelben Products haben, in welchen x^{n} ſtecken muß; ſo bedenke man, daß bey $\frac{my.E}{x}$ in I.) die Exponenten der Gröſſe x von n an immer kleiner werden, wenn man die Glieder von $(n+1)m\lambda^{n+1}x^{n}$ bis zum erſten $m\lambda^{I}$ rechnet, ſo, daß die denſelben Gliedern zugehörigen Exponenten n, n — 1, n — 2, n — 3 · · · · n — r, n — r — 1, n — r — 2 · · · · r, r — 1, r — 2 · · · · · 3, 2, 1, 0 ſind; in (n. 8. IV.) bey Z aber, wenn man hier die Exponenten vom erſten Gliede an betrachtet, gehen dieſelben in der Reihe 0, 1, 2, 3 · · · · r, r + 1, r + 2 · · · · n — r, n — r + 1, n — r + 2 · · · · n — 3, n — 2, n — 1, n · · · fort. Man wird alſo diejenigen Glieder des Products $\frac{my.EZ}{x}$ aus (n. 8. IV.) und obiger Function I.), in welchen die *nte* Potenz x^{n} von x vorhanden ſeyn muß, dadurch leicht finden, wenn man die Glieder der Function $\frac{my.E}{x}$ in I.) von

(n+1)

$(n+1)\,m\lambda^{n+1}$ an, bis zum Gliede $m\lambda^{1}$ in einer Reihe, wie IV) hinſchreibet, und unter ihnen die Glieder der Function Z in (n. 8. III) von λ an bis $L^{n}x^{n}$, wie in IV) ordnet, hierauf die unter einander ſtehenden Glieder beyder Functionen auch in einander multiplicirt, wie dieſes das Product V) zeigt.

IV) $(n+1)m\lambda^{n+1}x^{n}+nm\lambda^{n}x^{n-1}+(n-1)m\lambda^{n-1}x^{n-2}+\ldots$
$\quad 1 \quad + \quad L^{I}x \quad + \quad L^{II}x^{2}+\ldots$
$\ldots+(n-r+1)m\lambda^{n-r+1}x^{n-r}+\ldots$
$\ldots + L^{r}x^{r}+\ldots$
$\ldots+(r+1)m\lambda^{r+1}x^{r}+rm\lambda^{r}x^{r-1}+\ldots$
$\ldots + L^{n-r}x^{n-r}+L^{n-r+1}x^{n-r+1}+\ldots$
$\ldots+2m\lambda^{II}x+m\lambda^{I}$
$\ldots+L^{n-1}x^{n-1}+L^{n}x^{n}.$

V) $(n+1)m\lambda^{n+1}x^{n}+nmL^{I}\lambda^{n}x^{n}+(n-1)mL^{II}\lambda^{n-1}x^{n}+\ldots$
$\ldots+(n-r+1)mL^{r}\lambda^{n-r+1}x^{n}+\ldots+(r+1)mL^{n-r}\lambda^{r+1}x^{n}$
$+rmL^{n-r+1}\lambda^{r}x^{n}+\ldots+2mL^{n-1}\lambda^{II}x^{n}+mL^{n}\lambda^{I}x^{n}$

VI) Will man ferner das Product $\frac{Z.Ey}{x}$ ſuchen; ſo muß man $\frac{Z.E}{x}$ in II) mit jedem Gliede von y in (n. 8. III.) multipliciren: und wenn man nur diejenigen Glieder dieſes Produces wiſſen will, welche die *nte* Potenz x^{n} von x enthalten müſſen; ſo wird man ſie auf eine Art, wie (III. IV. V.) erhalten; ſie werden nämlich ſeyn:

$$(n+1)L^{n+1}x^n+nL^n\lambda^Ix^n+(n-1)L^{n-1}\lambda^{II}x^n+\ldots\ldots$$
$$\ldots+(n-r+1)L^{n-r+1}\lambda^rx^n+\ldots+(r+1)L^{r+1}\lambda^{n-r}x^n$$
$$+rL^r\lambda^{n-r+1}x^n+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+2L^{II}\lambda^{n-1}x^n+L^I\lambda^nx^n.$$

VII.) Nennt man S die Summe der Coefficienten von x^n in V), und s die Summe der Coefficienten von x^n in VI); so ist Sx^n in V) und sx^n in VI), daher ist wegen (n. 1.), wie (n. 4.), $S=s$ und $S-s=0$. Das heißt: man kann die Coefficienten von x^n in VI) von den Coefficienten in V) abziehen, und die Differenz $=0$ setzen, und es ist daher:

$$(m-n)L^n\lambda^I+(2m-(n-1))L^{n-1}\lambda^{II}+\ldots$$
$$+(rm-(n-r+1))L^{n-r+1}\lambda^r+\ldots\ldots$$
$$+((n-1)m-2)L^{II}\lambda^{n-1}+(nm-1)L^I\lambda^n$$
$$+(n+1)m\lambda^{n+1}-(n+1)L^{n+1}=0:$$

also ist der Coefficient des $(n+1)$ten Gliedes $L^{n+1}x^{n+1}$ von y^m in (n. 8. III.).

$$L^{n+1}=\frac{(m-n)L^n\lambda^I+(2m-(n-1))L^{n-1}\lambda^{II}+\ldots}{n+1}$$
$$+\frac{(rm-(n-r+1))L^{n-r+1}\lambda^r+\ldots\ldots}{n+1}$$
$$+\frac{((n-1)m-2)L^{II}\lambda^{n-1}+(nm-1)L^I\lambda^n+(n+1)m\lambda^{n+1}}{n+1}.$$

Und dieser Coefficient ist eben so den Gesetzen (n. 7. a, b, c) angemessen, wie es der Coefficient L^n des nten Gliedes L^nx^n von y^m in (n. 8. IV) war.

1. Zusatz.

Die Anwendung hievon auf einzelne Fälle wird so gemacht: man suche z. B. die *m*te Potenz einer dreytheilichten Function $1+\alpha x+\beta x^2$.

Hier ist in der Bedeutung der gegebenen Auflösung (n. 8.) $\lambda^{I}=\alpha$; $\lambda^{II}=\beta$; $\lambda^{III}=0$ und so auch $\lambda^{IV}=0$, $\lambda^{V}=0$ u. s. f.

Ferner soll seyn $(1+\alpha x+\beta x^2)^m = 1+L^{I}x+L^{II}x^2+L^{III}x^3+\ldots+L^{n}x^n+L^{n+1}x^{n+1}+\ldots\ldots$ und nun ist der Coefficient L^{n+1} des $(n+1)$ten Gliedes dieser Potenz, wegen (n. 10. VII.) der gegebenen Auflösung,

$$L^{n+1}=\frac{(m-n)L^{n}\alpha+(2m-n+1)L^{n-1}\beta}{n+1}.$$

Und aus diesem unbestimmten Coefficienten findet man nach der Ordnung die Coefficienten $L^{I}, L^{II}, L^{III}, L^{IV}, L^{V}$ u. s. f. von so vielen Gliedern der verlangten Potenz $(1+\alpha x+\beta x^2)^m$, als man ihrer haben will, wenn man $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$ u. s. f. nimmt. Denn es wird seyn:

$$L^{I}=m\alpha.$$

$$L^{II}=\frac{(m-1)L^{I}\alpha+2m\beta}{2}.$$

$$L^{III}=\frac{(m-2)L^{II}\alpha+(2m-1)L^{I}\beta}{3}.$$

$$L^{IV}=\frac{(m-3)L^{III}\alpha+(2m-2)L^{II}\beta}{4}.$$

$$L^{V}=\frac{(m-4)L^{IV}\alpha+(\frac{2}{3}m-3)L^{III}\beta}{5}.$$

u. s. f.

Man kann auch diese Coefficienten nun noch mehr bestimmen, wenn man den Werth von L^I in L^{II}, und diese Werthe in L^{III} u. s. f. nimmt. Wäre hingegen die verlangte Potenz $(1+\alpha x+\beta x^2)^m$ bestimmt, z. B. $m=3$; so würde man die Potenz $(1+\alpha x+\beta x^2)^3$ so vollkommen angeben.

Man setze nämlich in den oben bestimmten Coefficienten $m=3$, und suche noch so viele Coefficienten L^{VI}, L^{VII}, L^{VIII} . . . bis einer von ihnen $=0$ wird; so wird man finden:

$$L^I = 3\alpha.$$

$$L^{II} = \frac{2L^I\alpha+6\beta}{2} = 3\alpha^2+3\beta.$$

$$L^{III} = \frac{L^{II}\alpha+5L^I\beta}{3} = \alpha^3+6\alpha\beta.$$

$$L^{IV} = \frac{4L^{III}\beta}{4} = L^{II}\beta = 3\alpha^2\beta+3\beta^2.$$

$$L^V = \frac{-L^{IV}\alpha+3L^{III}\beta}{5} = 3\alpha\beta^2$$

$$L^{VI} = \frac{-2L^V\alpha+2L^{IV}\beta}{6} = \beta^3$$

$$L^{VII} = \frac{-3L^{VI}\alpha+L^V\beta}{7} = \frac{-3\alpha\beta^3+3\alpha\beta^3}{7} = 0.$$

Demnach ist $(1+\alpha x+\beta x^2)^3 = 1+L^Ix+L^{II}x^2+L^{III}x^3+L^{IV}x^4+L^Vx^5+L^{VI}x^6 = 1+3\alpha x+(3\alpha^2+3\beta)x^2+(\alpha^3+6\alpha\beta)x^3+(3\alpha^2\beta+3\beta^2)x^4+3\alpha\beta^2x^5+\beta^3x^6$.

2. Zusatz.

Wenn eine Function unter der Form $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\cdots$ oder $x+\alpha x^2+\beta x^3+\gamma x^4+\cdots$ gegeben wird, und man die $m$te Potenz von ihr wissen will; so setze man

$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots)^m=\left(1+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}x^2+\frac{\delta}{\alpha}x^3+\cdots\right)^m\alpha^m$

und $(x+\alpha x^2+\beta x^3+\cdots)^m=(1+\alpha x+\beta x^2+\cdots)^m.x^m$, und suche hierauf, wie oben, die $m$te Potenz des zusammengesetzten Factors $1+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}x^2+\frac{\delta}{\alpha}x^3+\cdots$ oder $1+\alpha x+\beta x^2+\cdots$.

Die allgemeinste Form einer solchen Function ist $Z=Ax^m+Bx^{m+d}+Cx^{m+2d}+Dx^{m+3d}+Ex^{m+4d}+\cdots$; wollte man nun die ersten Glieder einer unbestimmten Potenz k davon wissen; so würde man dieselben auf diese Art finden können;

1) Es ist $Z=\left(1+\frac{B}{A}x^d+\frac{C}{A}x^{2d}+\frac{D}{A}x^{3d}+\cdots\right)Ax^m$.

2) Setzet man $\frac{B}{A}=\alpha$; $\frac{C}{A}=\beta$; $\frac{D}{A}=\gamma\cdots$, und $x^d=y$, daher $\sqrt[d]{y}=y^{\frac{1}{d}}=x$; so ist

$$Z=(1+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\cdots)Ay^{\frac{m}{d}},$$

und $Z^k=(1+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\cdots)^kAy^{\frac{mk}{d}}$.

3) Es kömmt demnach alles darauf an, daß man die ersten Glieder der Potenz $(1+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\cdots)^k$ nach der Auflösung der vorigen Aufgabe bestimme, hierauf

alle mit $Ay^{\frac{mk}{d}}$ multiplicire, und endlich die Werthe von $\alpha, \beta, \gamma \cdots y$ aus (n. 2.) zurückstelle.

Anmerkung des Herausgebers.

Mit der Auflösung der letzten Aufgabe haben sich viele Mathematikverständige beschäftiget, wovon umständliche Nachrichten Hr. Hindenburg ertheilt hat[a]: so allgemein und deutlich aber hat dieselbe kein Mathematiker aufgelöst, als es Hr. Hofrath Kästner gethan[b], und nun ist die hier angeführte Auflösung von des Hrn. Hofrath seiner nur in dem unterschieden, daß hier statt der Differentialrechnung eine andere gebraucht worden ist, welche durch jene mag veranlaßt worden seyn.

(a) Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges, ac formulae. Goett. 1779.

(b) Zuerst in einer kleinen, zu Göttingen An. 1759. herausgegebenen Schrift: infinitinomii ad potentiam indefinitam elevati formula: hierauf in seiner Analysis des Unendlichen. 56. §.

Ich glaube auch nicht, daß ein angehender Analyst bey einer solchen Beweisart den geringsten Anstoß finden wird, indem ein jeder leicht einsehen kann, aus welchen Gründen sich die Voraussetzungen (84. §. Auflös. n. 2. und 8. §. Auflös. n. 1.) rechtfertigen lassen.

Es ist nämlich gestattet $(1+\alpha x+\beta x^2+\cdots)^m = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+\cdots$ zu setzen, wenn nur A, B, C, D... Coefficienten völlig unbestimmt sind; hierauf läßt sich fragen: ob es nicht solche Zahlen A, B, C... wirklich

wirklich giebt, wobey eine ſolche Gleichung Statt findet: wenn man alſo aus dieſer Gleichung und andern unläugbaren Gründen die Werthe von den, unbeſtimmt angenommenen, Coefficienten A, B, C - - - durch die gegebenen α, β, γ - - - zu beſtimmen ſuchet, und bey dieſer Unterſuchung nichts Ungereimtes, ſondern mögliche Werthe für A, B, C - - - findet; ſo iſt dieſes ein offenbarer Beweis, daß man eine Function von der Form $1+Ax+Bx^2+\ldots$ gefunden hat, welche die *m*te Potenz von $1+\alpha x+\beta x^2+\ldots$ auszudrücken vermag, und dieſes war der Fall bey den vorhergehenden Unterſuchungen. Denn wenn eine ſolche Gleichung ungereimt wäre; ſo würde wohl auch die darauf gebaute Rechnung, welche die derſelben Gleichung angemeſſene Werthe von A, B, C - - - geben ſollte, aufs Ungereimte führen müſſen. Die Urſache aber, warum man die *m*te Potenz von $1+\alpha x+\beta x^2+\delta x^3+\ldots$ durch eine Function von der Form $1+Ax+Bx^2+\ldots$ auszudrücken geſucht hat, da man doch auch andere Functionen bey eben ſo unbeſtimmten Coefficienten zu der Abſicht hätte wählen können, iſt, weil man Urſache hatte zu vermuthen, daß die *m*te Potenz von $1+\alpha x+\beta x^2+\ldots$ eine Function von eben der Form ſeyn möchte (26. §.), und nun hat man dieſelbe Muthmaßung dadurch zur Gewißheit gebracht, weil man gefunden hat, daß es gewiſſe Werthe von A, B, C, D - - - wirklich giebt, für welche die Gleichung $(1+\alpha x+\beta x^2+\ldots)^m = 1+Ax+Bx^2+\ldots$ Statt findet.

Der IX. Abschnitt.

Von den quadratischen Gleichungen, und unbestimmten Aufgaben.

86. §. Lehrsatz.

Wenn in einer Gleichung Wurzelgrössen vorhanden sind; so kann man sie allemahl in eine andere verwandeln, welche keine Wurzelgrösse enthalten soll.

Beweis. Wenn das Wurzelzeichen (61. §.) nur einmahl in der Gleichung vorhanden ist; so kann man das Glied, wo selbes vorkömmt, allein auf der einen Seite des Gleichheitszeichens lassen, und alle übrigen Glieder auf die andere Seite bringen (30. §.): da also nun, was auf jeder Seite stehet, auf diejenige Potenz erhoben werden kann, welche der Wurzelexponent anzeiget; so wird dadurch die auf einer Seite befindliche Wurzelgrösse wegfallen müssen. Denn wenn man auf diese Art $\sqrt[n]{a} = b$ erhielte; so wäre auch $(\sqrt[n]{a})^n = b^n$ wegen (14. §. I.), und nun $a = b^n$ wegen (14. §. II.).

Beyspiel.

$5a + b\sqrt[3]{(x+c)} = 3b - d$ giebt auch

$b\sqrt[3]{(x+c)} = 3b - d - 5a$, und

$\sqrt[3]{(x+c)} = \frac{3b - d - 5a}{b}$; also

$(\sqrt[3]{(x+c)}$

$(\sqrt[3]{(x+c)})^3 = \frac{(3b-d-5a)^2}{b^2}$, oder

$x+c = \frac{(3b-d-5a)^3}{b^3}$.

Kömmt hingegen das Wurzelzeichen mehrmahl in einer Gleichung vor; so kann man eine solche Arbeit wiederholen, und eine Wurzelgröſſe nach der andern wegſchaffen.

Beyſpiele.

I. $3a-\sqrt[3]{(1-\sqrt{(c+x)})}=b$ giebt

$3a-b=\sqrt[3]{(1-\sqrt{(c+x)})}$: alſo iſt

$(3a-b)^3=1-\sqrt{(c+x)}$. Daher auch

$(3a-b)^3-1=-\sqrt{(c+x)}$: alſo

$((3a-b)^3-1)^2=(-\sqrt{(c+x)})^2$, oder

$((3a-b)^3-1)^2=c+x$.

II. $\sqrt[3]{(a+x)}-\sqrt{(2x+b)}=3a-b$ giebt

$\sqrt[3]{(a+x)}=3a-b+\sqrt{(2x+b)}$: alſo

$a+x=(3a-b+\sqrt{(2x+b)})^3$,

oder $a+x=(3a-b)^3+3(3a-b)^2\sqrt{(2x+b)}$
$+3(3a-b)(2x+b)+(2x+b)\sqrt{(2x+b)}$,

oder $a+x=(3a-b)^3+(3(3a-b)^2+2x+b)\sqrt{(2x+b)}$
$+3(3a-b)(2x+b)$,

daher $a+x-(3a-b)^3-3(3a-b)(2x+b)=(3(3a-b)^2$
$+2x+b)\sqrt{(2x+b)}$,

und $\frac{a+x-(3a-b)^3-3(3a-b)(2x+b)}{3(3a-b)^2+2x+b}=\sqrt{(2x+b)}$:

$$\text{alſo } \frac{(a+x-(3a-b)^3-3(3a-b)(2x+b))^2}{(3(3a-b)^2+2x+b)^2} = 2x+b.$$

Zuſatz.

Man kann alſo jede Gleichung ſo verändern, daß die unbekannte Gröſſe weder unter einem Wurzelzeichen, noch im Nenner eines Bruches ſtehe: denn ein ſolches Wurzelzeichen kann man allemahl wegſchaffen; und einen ſolchen Bruch allemahl aufheben (31. §. 1. Zuſ.).

87. §. Erklärungen.

Wenn man eine Gleichung von der Beſchaffenheit (86. §. Zuſ.) hat, und ſie die zweyte Potenz, aber keine höhere, von der unbekannten Gröſſe enthält; ſo wird dieſelbe eine quadratiſche Gleichung genannt: wenn auſſer dem Quadrat der unbekannten Gröſſe, noch die unbekannte Gröſſe ſelbſt in der Gleichung vorhanden iſt; ſo heißt ſie eine unreine quadratiſche Gleichung: wenn hingegen die zweyte Potenz der unbekannten Gröſſe allein ohne die erſte Potenz in der Gleichung vorhanden iſt; ſo iſt ſie eine reine quadratiſche Gleichung. So iſt z. B. $2ax^2+bx-c=d$ eine unreine, und $2ax^2-c=d$ eine reine quadratiſche Gleichung.

88. §. Aufgabe.

Den Werth der unbekannten Gröſſe aus einer vorgelegten quadratiſchen Gleichung zu beſtimmen.

Auflöſung. 1) Es kann in einer quadratiſchen Gleichung auſſer der zweyten Potenz noch die erſte Potenz der unbekannten Gröſſe vorkommen (87. §.).

2) Man

2) Man bringe nun die Glieder, in welchen diese Potenzen der unbekannten Grösse befindlich sind, auf eine Seite, und diejenigen, welche aus lauter bekannten Grössen bestehen, auf die andere Seite des Gleichheitszeichens (30. §.).

3) Wenn das Quadrat der unbekannten Grösse mit bekannten Grössen multiplicirt oder dividirt ist; so muß man es von ihnen nach (31. §. 1. 3. Zus.) befreyen: und wenn das Quadrat negativ ist, welches nicht seyn kann (76. §.); so muß man die Zeichen aller Glieder in entgegengesetzte verwandeln, um es positiv zu machen (30. §. 2. Zus.).

Beyspiel.

$$8ax^2+3bc=5bx^2-5cx+6ax+12d;$$
$$8ax^2-5bx^2+5cx-6ax=12d-3bc;$$
$$x^2(8a-5b)+(5c-6a)x=12d-3bc;$$
$$x^2+\frac{5c-6a}{8a-5b}\cdot x=\frac{12d-3bc}{8a-5b}.$$

4) Man kann aber überhaupt jede bekannte Grösse, wie hier $\frac{5c-6a}{8a-5b}$ eine ist, womit die erste Potenz x der unbekannten Grösse multiplicirt seyn mag, mit einem einzigen Buchstab p, und die ganze bekannte Grösse, welche auf der andern Seite des Gleichheitszeichens sich befinden mag, wie hier $\frac{12d-3bc}{8a-5b}$ ist, mit q bezeichnen: also kann man durch $x^2+px=q$ jede quadratische Gleichung ausdrücken.

5) Da

5) Da nun zu gleichen Gröſſen gleiche addirt werden können; ſo hat man aus (n. 4.):

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2.$$

Alſo $\sqrt{\left(x^2+px+\frac{1}{4}p^2\right)}=\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)}$ (14. §. I.)

aber $\sqrt{\left(x^2+px+\frac{1}{4}p^2\right)}=\pm\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)}$ (70. §. 3. Z.)

Es iſt aber $\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=x^2+px+\frac{1}{4}p^2$ (76. §. 1. Z.);

daher $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{\left(x^2+px+\frac{1}{4}p^2\right)}$ (11. §.):

alſo $x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)}$,

und nun $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)}$.

6) Weil in einer reinen quadratiſchen Gleichung die erſte Potenz x der unbekannten Gröſſe gar nicht vorkömmt (87. §.); ſo wird $x^2+px=q$ jede reine quadratiſche Gleichung ausdrücken (n. 4.), wenn man $p=o$ ſetzt, indem alsdann auch $px=o$ wird: alſo findet man den Werth der unbekannten Gröſſe x aus einer reinen quadratiſchen Gleichung $x^2=q$, wenn man in (n. 5.) auch $p=o$ nimmt, da dann $x=\pm\sqrt{q}$ wird.

Beyspiele.

1. Die Summe zwoer Zahlen und die Summe ihrer Quadrate sind gegeben; man soll die Zahlen selbst finden.

Man nenne $2a$ die gegebene Summe zwoer Zahlen, und die gegebene Summe ihrer Quadrate sey $=b$: es sey ferner der Unterschied derselben Zahlen, als eine unbekannte Zahl $=2x$; so ist nach (32. §. 4. Zus.)

die grössere unbekannte Zahl $=a+x$,

die kleinere unbekannte Zahl $=a-x$,

Da also die Summe ihrer Quadrate $=b$ seyn soll; so hat man die Gleichung

$(a+x)^2+(a-x)^2=b$, oder (76. §. 1. Zus.)

$a^2+2ax+x^2+a^2-2ax+x^2=b$,

daher $2a^2+2x^2=b$; $2x^2=b-2a^2$; $x^2=\frac{1}{2}b-a^2$;

also $x=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}b-a^2\right)}$.

Man nehme z. B. $2a=7$, und $b=25$; so ist $a=\frac{7}{2}$; $a^2=\frac{49}{4}$; $\frac{1}{2}b=\frac{25}{2}$; also ist

$$x=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}b-a^2\right)}=\pm\sqrt{\left(\frac{25}{2}-\frac{49}{4}\right)}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{50}{4}-\frac{49}{4}\right)}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}.$$

Das

Das heißt: der eine Werth von x ist $+\frac{1}{2}$, und der andere $-\frac{1}{2}$: es war aber die gröſſere unbekannte Zahl $a+x$, folglich ist sie $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$: die kleinere Zahl war $a-x$, sie ist daher $=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3$.

Die Prüfung, ob die vorgelegte Aufgabe richtig aufgelöst sey, geschieht nach (32. §. 3. Zus.) so: die Summe der Zahlen soll, vermöge der gegebenen Bedingung, 7 und die Summe ihrer Quadrate 25 betragen: da also $4+3=7$, und $4^2+3^2=16+9=25$ ist; so sind 3 und 4 die Zahlen, welche in der Aufgabe verlangt wurden.

Anmerkung.

Hätte man die eine Zahl x und die andere y genannt, weil ihre Summe 2a, und die Summe ihrer Quadrate b heißen soll; so würde man die Zahlen durch die nachstehende Rechnung gefunden haben.

I) $x+y=2a$; II) $x^2+y^2=b$;

III) aus I) $x=2a-y$; IV) $x^2=(2a-y)^2$;

also aus II. IV) $(2a-y)^2+y^2=b$; oder

$4a^2-4ay+y^2+y^2=b$; oder $4a^2-4ay+2y^2=b$;

daher $2y^2-4ay=b-4a^2$; und $y^2-2ay=\frac{1}{2}b-2a^2$,

Ver-

Vergleichet man dieſe Gleichung mit der allgemeinen $x^2 + px = q$, wobey $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(q + \frac{1}{4}p^2\right)}$ war; ſo iſt

$$p = -2a, \text{ daher } p^2 = 4a^2; \quad \frac{1}{2}p = -a;$$

$$-\frac{1}{2}p = a; \quad \frac{1}{4}p^2 = a^2; \quad q = \frac{1}{2}b - 2a^2;$$

alſo

$$y = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(q + \frac{1}{4}p^2\right)} = a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b - 2a^2 + a^2\right)}$$

$$= a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b - a^2\right)}.$$

Für $2a = 7$, daher $a = \frac{7}{2}$, $a^2 = \frac{49}{4}$, und $b = 25$, wie oben, wäre

$$y = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{2} - \frac{49}{4}\right)} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Folglich iſt $y = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$, oder $y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$.

Da alſo die andere Zahl $x = 2a - y$ ſeyn muß; ſo iſt ſie $x = 7 - 4 = 3$ für $y = 4$, und $x = 7 - 3 = 4$, für $y = 3$; daher iſt allemahl die eine Zahl $= 4$ und die andere $= 3$, wie oben.

Vergleichet man dieſe Auflöſung mit der vorhergehenden; ſo wird man finden, daß dieſe weitläuftiger iſt als jene, dieſe gab eine unreine quadratiſche Gleichung ſtatt einer reinen, welche jene Auflöſung gegeben hat: die Urſache, warum

dieſes

dieſes geſchah, beſtehet offenbar in dem, weil man bey dieſer Auflöſung zwo unbekannte Gröſſen x und y ohne Noth in die Rechnung gebracht hat. Man hätte freylich auch bey der erſten Auflöſung eine unreine quadratiſche Gleichung erhalten, wenn man eine von den unbekannten Zahlen mit x, und daher die andere mit $2a - x$ bezeichnet hätte, indem $2a$ die Summe derſelben ausdrückt: denn um eine Gleichung zu erhalten, hätte man die Summe der Quadrate dieſer Zahlen $= b$ ſetzen müſſen, welches $x^2 + (2.a - x)^2 = b$, oder $x^2 + 4a^2 - 4ax + x^2 = b$, oder $2x^2 - 4ax = b - 4a^2$ würde gegeben haben. Weil es aber aus (32. §. 4. Zuſ.) bekannt war, daß die Zahlen durch ihre Summe und Differenz völlig beſtimmt ſind, und hier die Summe verlangter Zahlen als bekannt vorausgeſetzt wurde, nämlich $= 2a$; ſo war hinreichend ihre Differenz, wie oben bey der erſten Auflöſung $= 2x$ zu ſuchen, und ſo erhellet, wie man vermittelſt beſonderer Kunſtgriffe die Auflöſung einer Aufgabe erleichtern kann, welches bey verſchiedenen Fällen von groſſer Wichtigkeit iſt. Ein neues Beyſpiel davon giebt die folgende Aufgabe.

II. Das Product aus zweyen Zahlen ſammt der Summe ihrer Quadrate iſt gegeben; man ſoll die Zahlen ſelbſt beſtimmen.

Die eine Zahl heiſſe x, und die andere y; das gegebene Product ſey a, und die Summe der Quadrate $= b$; ſo hat man:

1)

I) $xy = a$; II) $x^2 + y^2 = b$;

III) aus I) $y = \frac{a}{x}$; daher $y^2 = \frac{a^2}{x^2}$: also

aus II) $x^2 + \frac{a^2}{x^2} = b$; und nun $x^4 + a^2 = bx^2$;

daher $x^4 - bx^2 = -a^2$. IV).

Es sey aber $z = x^2$, daher $\sqrt{z} = x$, und $z^2 = (x^2)^2 = x^4$; so wird aus IV) $z^2 - bz = -a^2$.

Und diese Gleichung mit der allgemeinen $x^2 + px = q$, wobey $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(q + \frac{1}{4}p^2\right)}$ ist, verglichen giebt

$p = -b$; $p^2 = b^2$; $\frac{1}{2}p = -\frac{1}{2}b$; $-\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}b$; $q = -a^2$:

also $z = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(-a^2 + \frac{1}{4}b^2\right)} = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - 4a^2)}$.

Z. B. Das Product der verlangten Zahlen sey $a = 1175$, und die Summe ihrer Quadrate $b = 2834$; so hat man

$z = \frac{1}{2} \cdot 2834 \pm \frac{1}{2}\sqrt{((2834)^2 - 4(1175)^2)} = 1417 \pm 792$:

also ist $z = 1417 + 792 = 2209$, oder $z = 1417 - 792 = 625$.

Es war nun $x = \sqrt{z}$: also ist $x = \sqrt{2209} = 47$, oder $x = \sqrt{625} = 25$. Es war ferner in III) $y = \frac{a}{x}$: also ist $y = \frac{1175}{47} = 25$, oder $y = \frac{1175}{25} = 47$, das heißt: die eine von den verlangten Zahlen ist allemahl $= 25$, und die andere $= 47$.

Man hätte aber die vierte Potenz von x hier leicht ersparen können, wenn man nämlich nicht die Zahlen selbst, sondern ihre Summe und Differenz unmittelbar gesucht hätte, wie es aus der nachstehenden Rechnung erhellet.

Die Summe der Zahlen $= 2x$;

Die Differenz der Zahlen $= 2y$;

also (32. §. 4. Zus.) die grössere Zahl $= x + y$;

und die kleinere Zahl $= \ldots\ldots x - y$;

das Product aus ihnen $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$;

die Summe ihrer Quadrate $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$;

also ist I) $x^2 - y^2 = a$; II) $2x^2 + 2y^2 = b$;

III) aus I) $x^2 = a + y^2$; und nun aus II) $2a + 2y^2 + 2y^2 = b$;

Daher $2a + 4y^2 = b$, und $4y^2 = b - 2a$; $y^2 = \frac{b-2a}{4}$;

$$y = \frac{\sqrt{(b-2a)}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{(b-2a)}}{2} = \frac{\sqrt{(2834-2.1175)}}{2} = 11;$$

und nun aus III) $x^2 = a + y^2 = 1175 + 121 = 1296$;

daher $x = \sqrt{1296} = 36$.

Also die grössere Zahl $x + y = 36 + 11 = 47$;

und die kleinere Zahl $x - y = 36 - 11 = 25$.

89. §. Erklärungen.

Wenn eine mathematische Aufgabe so viele und solche Bedingungen angiebt, woraus sich so viele Gleichungen zwischen den bekannten und unbekannten Grössen herleiten lassen, als unbekannte Grössen verlangt werden, und aus diesen Gleichungen sich endlich eine bestimmen läßt, welche

nur

nur eine unbekannte Grösse enthält (33. §. 1. Zus.); so ist der Werth dieser unbekannten Grösse durch die Finalgleichung, welche sie enthält, vollkommen bestimmt, und durch ihn sind auch die Werthe der übrigen unbekannten Grössen völlig bestimmt (das. 2. Zus.), so, daß die Aufgabe nur auf eine Art aufgelöst werden kann, welche nämlich für jede unbekannte Grösse nur einen gewissen Werth giebt: eine Aufgabe von dieser Beschaffenheit heißt eine **bestimmte Aufgabe**. Geschieht es aber, daß die Bedingungen der Aufgabe nicht so viele Gleichungen geben, als unbekannte Grössen verlangt werden; so wird man aus diesen Gleichungen zwar eine Finalgleichung finden können, die aber mehrere unbekannte Grössen enthalten wird: in diesem Fall ist die Aufgabe **unbestimmt**, sie ist mehrerer Auflösungen fähig, weil man sich gezwungen findet, die Werthe einiger unbekannten Grössen willkührlich zu bestimmen, womit die Werthe der übrigen zusammenhängen. Es kann ferner geschehen, daß eine Aufgabe durch ihre Bedingungen mehr Gleichungen giebt, als unbekannte Grössen verlangt werden, und dann ist die Aufgabe **mehr als bestimmt** (problema plus quam determinatum), und unmöglich, wenn einige von den Bedingungen, woraus man dieselben Gleichungen herleitet, nicht auf eine und eben dieselbe Grösse sich beziehen: die Auflösung einer solchen Aufgabe führt allemahl aufs Ungereimte, oder auf unmögliche Zahlen, wie z. B. die Zahlen (70. §. 4. Zus.) seyn sollen.

Anmerkung.

Man ſuche z. B. zwo Zahlen x und y, welche in einander multiplicirt 24 zum Product, und zuſammen addirt 11 zur Summe geben. Es iſt offenbar, daß man aus den gegebenen Bedingungen dieſer Aufgabe zwo Gleichungen $xy = 24$ und $x + y = 11$ herleiten kann, wodurch die Werthe von x und y völlig beſtimmt ſind, ſo, daß es für jede unbekannte Gröſſe x und y nur einen Werth, daher auch nur eine Auflöſung der vorgelegten Aufgabe giebt.

Wollte man eine Zahl x wiſſen, deren Quadrat ſo groß als die doppelte Zahl ſelbſt ſeyn ſoll; ſo hätte man ebenfalls eine Gleichung $x^2 = 2x$ dafür, wodurch $x = 2$ ſo beſtimmt iſt, daß es für x bey dieſer Bedingung der Aufgabe keinen andern Werth geben kann.

Hätte man aber dazu noch die Bedingung geſetzt, es ſoll zugleich der Cubus derſelben Zahl ſo viel als die vierfache Zahl ſelbſt betragen; ſo würde dieſe neue Bedingung eine neue Gleichung $x^3 = 4x$ gegeben haben: die Aufgabe wäre nun mehr als beſtimmt geweſen, indem zur Beſtimmung der Zahl x eine Gleichung hinreichend, daher die andere überflüſſig iſt; doch giebt die zweyte Gleichung $x^3 = 4x$ eben das, was die erſte gegeben hat, nämlich $x^2 = 4$, und $x = \pm\sqrt{4} = 2$, und ſo geſchah hier, daß die gegebenen Bedingungen auf eine beſtimmte Zahl ſich bezogen haben, und die Aufgabe ſelbſt nichts unmögliches enthalten hat. Wenn man aber ſtatt der zweyten Bedingung dieſe gegeben hätte, daß die Hälfte und ein Drittel der Zahl x zuſammen

so viel als die Quadratwurzel von x betragen mögen; so würde man ausser der ersten Gleichung $x^2 = 2x$, welche $x = 2$ giebt, noch die Gleichung $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = \sqrt{x}$, welche $\frac{5}{6}x = \sqrt{x}$, oder $\frac{25}{36}x^2 = x$, daher $\frac{25}{36}x = 1$, und $x = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$ giebt, erhalten haben, und daraus würde offenbar $2 = 1\frac{11}{25}$ folgen. Die Ungereimtheit beweiset, daß die Bedingungen der Aufgabe sich auf zwo verschiedene Zahlen beziehen, da doch nur eine Zahl x verlangt wird, daß demnach dieselben Bedingungen in Ansehung einer und eben derselben Zahl x nicht erfüllt werden können.

Man suche endlich zwo Zahlen x und y, welche zusammen addirt 30 zur Summe geben; so hat man vermöge dieser Bedingung die Gleichung $x + y = 30$, welche allein zur Bestimmung derselben Zahlen dienen muß. Man kann nun zwar den Werth einer von diesen Zahlen durch $x = 30 - y$ ausdrücken, weil aber y eben so, wie x, unbekannt ist; so kann man daraus für den Werth von x nichts bestimmt schließen: es ist vielmehr einleuchtend, daß man den Werth einer Zahl y allemahl willkührlich bestimmen, und dadurch die gegebene Bedingung erfüllen kann: man kann z. B. sagen eine unter den verlangten Zahlen sey $y = 4$, und dann ist die andere $x = 30 - 4 = 26$; oder die eine Zahl sey $y = 5$, und dann ist die andere $x = 30 - 5 = 25$, und

so kann man für y immer einen neuen Werth festsetzen, und für jeden neuen Werth von y einen neuen Werth für x so bestimmen, daß allemahl $x = 30 - y$, oder $x + y = 30$ bleiben möge. Da also die Aufgabe nichts mehr verlanget, als daß die Summe der verlangten Zahlen 30 betragen mag, und diese Bedingung durch unzählbare Zahlen erfüllt werden kann, so ist diese Aufgabe unbestimmt, und unzählbarer Auflösungen fähig: denn wenn man für y die Zahlen 1, 2, 3 ---- 29 nimmt; so wird x die Werthe 29, 28, 27 - - - - 3, 2, 1 erlangen: man kann aber auch $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ u. s. f. für y nehmen, und dann erlanget x andere neue Werthe: man kann auch für y jede von den verneinten Zahlen $-1, -2, -3, -4$ - - - u. s. f. nehmen, und dadurch ganz neue Werthe für x herausbringen: denn setzt man $y = -4$; so verwandelt sich $x = 30 - y$ in $x = 30 - (-4) = 30 + 4 = 34$, und es ist noch allemahl $x + y = 34 + (-4) = 34 - 4 = 30$.

Doch aber pflegt man bey der Auflösung einer unbestimmten Aufgabe noch die Bedingung vorauszusetzen, daß die Brüche, oder wenigstens verneinte Zahlen vermieden werden sollen, und dann kömmt alles darauf an, daß man in jedem Fall untersuche, ob es sich wirklich thun läßt: folgende Untersuchungen werden einigermaßen den Weg zeigen, auf dem man es zu bewerkstelligen suchen kann.

90. §.

90. §. Aufgabe.

Die Umstände zu bestimmen, in welchen die vier nachstehende Gleichungen in ganzen bejahten Zahlen aufgelöst werden können, vorausgesezt, daß A, B, C ganze bejahte Zahlen bedeuten.

I. $y = A \pm Bx$; II. $y = \frac{A}{C} \pm Bx$;

III. $y = \frac{Bx}{A}$; IV. $y = \frac{Bx \pm C}{A}$.

Auflösung. I) Die erste Gleichung ist $y = A + Bx$, oder $y = A - Bx$: was erfodert wird, wenn verneinte Zahlen vermieden werden sollen, kann man daher so bestimmen.

1) Aus $y = A + Bx$ erhellet, daß y allemahl einen bejahten Werth erlangen muß, wenn x einen bejahten Werth erhält: zur Vermeidung verneinter Zahlen bey dieser Gleichung ist demnach nichts weiter nöthig, als daß man der unbekannten Grösse x einen bejahten Werth gebe.

2) Bey $y = A - Bx$ wäre $A - Bx = y$ eine verneinte Zahl, wenn man $Bx > A$ machte: sollen demnach verneinte Zahlen vermieden werden; so muß man $Bx < A$, daher $x < \frac{A}{B}$ machen.

3) Und hieraus erhellet, wie man bey den übrigen Gleichungen verneinte Zahlen vermeiden kann: wenn nämlich die zweyte Gleichung $y = \frac{A}{C} + Bx$ ist; so muß man

sich bey ihrer Auflösung wie (n. 1.) verhalten: ist sie aber $y = \frac{A}{C} - Bx$; so muß man, wie (n. 2.), $Bx < \frac{A}{C}$, daher $x < \frac{A}{BC}$ machen. Bey der dritten Gleichung werden verneinte Zahlen nach (n. 1.) vermieden, und so auch bey der vierten, wenn sie $y = \frac{Bx + C}{A}$ ist: ist sie aber $y = \frac{Bx - C}{A}$; so wird y bejaht werden, wenn man für x einen bejahten Werth so nimmt, daß $Bx > C$, daher $x > \frac{C}{B}$ sey.

II. Was nun die Vermeidung der Brüche anbelangt, ist klar, daß man bey der ersten Gleichung $y = A \pm Bx$ allemahl eine ganze Zahl für y erhalten muß, wenn man für x eine ganze Zahl nimmt, indem alsdann auch das Product Bx aus zwoen ganzen Zahlen eine ganze Zahl, folglich auch $A \pm Bx$ die Summe oder Differenz zwoer ganzen Zahlen eine ganze Zahl werden muß.

Bey der zweyten Gleichung $y = \frac{A}{C} \pm Bx$ ist $\frac{A}{C}$ entweder ein wahrer Bruch, der sich auf eine ganze Zahl nicht reduciren läßt, oder es ist A durch C theilbar, folglich $\frac{A}{C}$ einer ganzen Zahl gleich: im ersten Fall kann man für x was immer für eine ganze Zahl nehmen; so wird doch allemahl y ein Bruch seyn müssen (39. §.): im zweyten Fall aber wird y, wie bey der ersten Gleichung, eine ganze Zahl seyn, wenn x eine solche Zahl ist.

Bey

Bey der dritten Gleichung $y = \frac{Bx}{A}$ kann man Brüche allemahl vermeiden, denn entweder ist B durch A theilbar oder nicht: ist B durch A theilbar; so giebt $\frac{B}{A}$ eine ganze Zahl, und man kann daher für x was immer für eine ganze Zahl nehmen; so wird doch allemahl das Product $\frac{Bx}{A}$ eine ganze Zahl seyn, und diese ist y: ist aber B durch A nicht theilbar; so kann man für x entweder A oder ein Vielfaches von A, z. B. $x = nA$ nehmen, da dann $y = \frac{BnA}{A} = Bn$ eine ganze Zahl wird (37. §. Zus. 43. §.).

III. Den größten Schwierigkeiten ist die Vermeidung der Brüche bey der vierten Gleichung $y = \frac{Bx \pm C}{A}$ unterworfen.

1) Vorausgesetzt, daß $A > B$ ist, und man sowohl A als C durch B theilbar findet, ist allemahl möglich die Auflösung der Gleichung in ganzen Zahlen anzugeben. Wenn man nämlich B, C, und A durch B wirklich dividirt, und $\frac{B}{B} = 1$; $\frac{C}{B} = c$; $\frac{A}{B} = a$ setzt; so ist $y = \frac{x \pm c}{a}$, und nun kömmt alles darauf an, daß man für x eine solche Zahl nimmt, für welche die Summe $x + c$ oder Differenz $x - c$ durch a theilbar sey, und dieses kann allemahl geschehen: weil nämlich in diesem Fall $x + c$ oder $x - c$ ein Vielfaches von a werden soll; so kann man $x + c = na$

oder $x - c = na$ ſetzen, und dann iſt $x = na - c$, oder $x = na + c$, folglich wird man x dadurch beſtimmen, daß man a mit einer ganzen Zahl n multiplicirt, und vom Product $c = \frac{C}{B}$ abziehet, oder c zum Producte addirt, da dann n den Werth von y giebt, weil $y = \frac{na}{a} = n$ wird.

2) Wenn die Vorausſetzung (n. 1.) nicht Statt findet; ſo dividire man B, C, A durch ihr gröſtes gemeinſchaftliches Maaß, damit A, B, C unter ſich Primzahlen werden (46. §. Zuſ.); wenn nun B und A nicht auch unter ſich Primzahlen ſind; ſo kann die Gleichung $y = \frac{Bx \pm C}{A}$ nicht ganze Zahlen für x und y geben. Denn wenn man vorausſetzt, daß die Diviſion ſchon geſchehen iſt, daher A, B, C unter ſich Primzahlen, nicht aber auch A und B unter ſich Primzahlen ſind; ſo können zwar A, B, C kein gemeinſchaftliches Maaß haben (36. §.), aber A und B müſſen eines μ haben: wenn aber y für eine gewiſſe ganze Zahl $x = a$ auch eine ganze Zahl $= b$ werden ſoll; ſo muß $\frac{Ba \pm C}{A} = b$, daher $Ba \pm C = bA$ ſeyn, folglich, weil bA und Ba durch μ theilbar ſind (43. §.), muß auch C durch μ theilbar ſeyn (41. §. 2. 5. Zuſ.), da doch A, B, C kein gemeinſchaftliches Maaß μ haben ſollen.

3) Sind aber auch A und B unter ſich Primzahlen; ſo kann die Auflöſung der Gleichung $y = \frac{Bx \pm C}{A}$ allemahl

in

in ganzen Zahlen geschehen. Um dieses zu beweisen, und zugleich zu zeigen, wie es geschehen kann, setze ich voraus, daß $A > B$ ist: denn man kann bey ungleichen Zahlen A und B allemahl auf einen solchen Nenner kommen: gesetzt, es sey $A < B$; so verwandle man die Gleichung $y = \frac{Bx + C}{A}$ in $x = \frac{Ay + C}{B}$, wo nun der Nenner grösser ist, als der Coefficient von y.

I) Man verfahre nun mit den Zahlen A, B nach (59. §.), als wenn man die daselbst genannten Vielfachen $\gamma . B$ und $\delta . A$ wissen wollte, suche aber aus den herausgebrachten Quotienten nur den Coefficient γ von der kleineren Zahl B, welcher daselbst den Zähler von $\frac{\gamma}{\delta}$ abgiebt: multiplicire hiernächst den Coefficient γ mit C, und das Product γC dividire durch A; so wird die Division einen Quotient Q und einen Rest R geben.

II) Ist $y = \frac{Bx + C}{A}$ gegeben; so muß man drey Fälle unterscheiden, wenn man den Werth von x bestimmen will, welcher eine ganze Zahl für y giebt.

a) Wenn die Anzahl der Quotienten, woraus γ in (I) nach (59. §.) zusammengesetzt ist, gerade gefunden wird; so muß man in der Bedeutung (I) $x = A - R$ machen, damit y eine ganze Zahl werde.

b) Wenn aber dieselbe Anzahl ungerad ist; so muß $x = R$ seyn, wenn y eine ganze Zahl werden soll.

III.)

III) Iſt aber $y = \frac{Bx - C}{A}$ gegeben; ſo muß man ebenfalls zween Fälle unterſcheiden.

a) Wenn die Anzahl der Quotienten (II) gerad iſt; ſo ſetze man $x = R$, und dafür wird y eine ganze Zahl.

b) Iſt aber dieſelbe Anzahl ungerad; ſo ſetze man $x = A - R$, damit y eine ganze Zahl werde.

c) Beweis. Bey den Vorausſetzungen (II. a.) und (III. a.) iſt $\gamma B > \partial A$, daher $\gamma B - \partial A = 1$ (59. §. Zuſ.), und nun $\gamma B - x = \partial A$, folglich $\gamma BC - C = \partial AC$, und $\frac{\gamma BC - C}{A} = \partial C$ eine ganze Zahl.

d) Und wegen (I) iſt allemahl $R = \gamma C - AQ$.

e) Wegen (II. a.) wäre daher

$$y = \frac{B(A - R) + C}{A} = \frac{B(A - \gamma C + AQ) + C}{A}$$

oder $y = \frac{BA - \gamma BC + ABQ + C}{A} = B + BQ - \left(\frac{\gamma BC - C}{A}\right)$,

oder aus (c) $y = B + BQ - \partial C$ eine ganze Zahl.

f) Und bey der Vorausſetzung (III. a.) wäre

$$y = \frac{BR - C}{A} = \frac{B(\gamma C - AQ) - C}{A},$$

oder $y = \frac{\gamma BC - C}{A} - BQ = \partial C - BQ$ aus (c) eine ganze Zahl.

g) Hingegen iſt bey den Vorausſetzungen (II. III. b) allemahl $\gamma B < \partial A$, daher $\partial A - \gamma B = 1$ (59. §. Zuſ.):

alſo

also $\delta A = \gamma B + 1$, und $\delta AC = \gamma BC + C$, folglich auch $\frac{\gamma BC + C}{A} = \delta C$ eine ganze Zahl.

b) Nun aber soll in (II. b) $y = \frac{BR + C}{A}$ seyn: also ist aus (d) $y = \frac{B(\gamma C - AQ) + C}{A}$, oder $y = \frac{\gamma BC + C}{A} - BQ$, oder aus (g) $y = \delta C - BQ$ eine ganze Zahl.

i) Und in (III. b) soll seyn $y = \frac{B(A - R) - C}{A}$: also aus (d) $y = \frac{B(A - \gamma C + AQ) - C}{A}$, oder $y = B + BQ - \frac{(\gamma BC + C)}{A}$, oder aus (g) $y = B + BQ - \delta C$ eine ganze Zahl.

Beyspiele.

Ein Eimer des Weines A kostet 12 Gulden, ein Eimer des Weines B 10 Gulden, und einer des Weines C 6 Gulden; man will diese Weine so vermischen, daß man 60 Eimer bekommen, und jeden Eimer um 9 Gulden verkaufen könne; es fragt sich nun: wie viel Eimer von jedem Weine dazu genommen werden müssen?

Wenn man die dazu nöthigen Eimer von Weinen A, B, C mit x, y, z bezeichnet; so müssen diese Eimer zusammen 60 machen, und alle zusammen um den gegebenen mittleren Preis = 9 Gulden verkauft, das geben, was

sie

sie geben würden, wenn man sie, einzeln genommen, um ihre eigenen Preise verkaufte: also muß seyn.

I. $x+y+z=60$;

II. $12x+10y+6z=60.9=540$;

oder III. $6x+5y+3z=270$.

IV. $x=60-y-z$;

V. $360-6y-6z+5y+3z=270$ aus (III. IV.)

oder VI. $360-y-3z=270$; VII. $90-3z=y$

VIII. $x=60-90+3z-z$ aus (IV. VII.)

oder IX. $x=2z-30$.

Soll nun y in VII) eine ganze bejahte Zahl seyn; so muß man $z<\frac{90}{3}$ oder $z<30$ machen: und soll auch x in IX) eine bejahte Zahl seyn; so muß man $z>\frac{30}{2}$ oder $z>15$ nehmen: man kann demnach für z jede Zahl zwischen 15 und 30 nehmen.

Man setze z. B. $z=20$; so ist in VII) $90-60=y$ $=30$; und in IX) $x=40-30=10$. Nimmt man für z eine von den nachstehenden Zahlen; so werden dafür y und x die darauf folgenden Werthe haben, und so kann die Aufgabe in ganzen Zahlen 14 Auflösungen haben.

$z=16;17;18;19;20;21;22;23;24;25;26;27;28;29.$

$y=42;39;36;33;30;27;24;21;18;15;12;9;6;3.$

$x=2;4;6;8;10;12;14;16;18;20;22;24;26;28.$

Daß durch alle diese Werthe die gegebenen Bedingungen erfüllt werden, ist leicht einzusehen: wenn ich z. B. $x=22$ nehme,

nehme; so muß $y = 27$ und $x = 12$ seyn, und es ist $x+y+z = 12+27+21 = 60$, ferner $12x+10y+6z = 12.12+10.27+6.21 = 144+270+126 = 540$, welches die Bedingungen haben wollen.

Zwo ganze Zahlen x und y von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man x mit 101 und y mit 301 multiplicirt, und jenes Product von diesem abziehet, der Rest $= 201$ sey.

Es soll seyn $301y - 101x = 201$: also $301y = 101x+201$, und $y = \frac{101x+201}{301}$.

Da nun diese Gleichung zur allgemeinen $y = \frac{Bx+C}{A}$ gehört; so ist $B = 101$, $C = 201$, und $A = 301$, nun aber muß man einen ganzen Werth für x suchen, welcher ebenfalls einen ganzen Werth für y geben mag. Daß dieses möglich ist, erhellet aus der Auflösung der vorigen Aufgabe (n. 3.), indem 101 und 301 unter sich Primzahlen sind: man verfahre also folgendermaßen:

I.				II. Quotienten.	Die Zähler. (59. §.)
101	301	2			
	202				
Rest 99	101	1		2.	2
	99				
Rest 2	99	49		1.	2+1=3
	98				
Rest 1				49	49.3+2=149.

Daher ist in der Bedeutung der vorigen Aufgabe (n. 3. I.) $y = 149$; also ist $yC = 149.201 = 29949$; folglich

folglich $\frac{\gamma C}{A} = \frac{29949}{301} = 99 + \frac{150}{301}$: also ist $R = 150$, alles in der Bedeutung der vorigen Aufgabe (n. 3. I.). Wegen (n. 3. II. b) muß demnach $x = R = 150$ seyn, und hieraus findet man $y = \frac{101 \cdot 150 + 201}{301} = 51$.

Anmerkung des Herausgebers.

Die hier ausgeführte Untersuchung über die Umstände, in welchen es möglich seyn soll, die Gleichung $y = \frac{Bx \pm C}{A}$ in ganzen Zahlen aufzulösen, ist nun derjenigen gleich, welche schon Maclaurin [a], und aus ihm Hr. Scherffer [b] angegeben, aber nicht so scharf, wie es hier geschah, bewiesen hat, indem sowohl der eine als der andere sich begnüget hatte, die dazu nöthigen Sätze durch bloße Induction zu beweisen. Bey ihnen kann man auch umständlichere Untersuchungen über die Gränzen lesen, wozwischen die willkührlichen Werthe einiger unbekannten Grössen liegen müssen, und über die Anzahl der Auflösungen, derer eine unbestimmte Gleichung fähig ist. Daß es auch quadratische unbestimmte Gleichungen geben kann, ist leicht vorauszusehen, und es kömmt bey der Auflösung solcher Gleichungen gemeiniglich darauf an, daß man die Umstände bestimme, in welchen die Auflösung in Rationalzahlen (74. §.) geschehen kann; einiges hievon wird man beym Herrn Hofrath Kästner [c], auch beym Maclaurin selbst (am angeführten Ort), noch mehr aber beym Jacob de Billy in seinem Diophanto

redivi-

redivivo, Preſtet, Ozanam und anderen Schriftſtellern finden.

(a) Traité d'Algebre, et de la Maniere de l'appliquer. A Paris. 1753.

(b) Inſtitutionum Analyticarum P. I. C. VI.

(c) Anfangsgr. der Analyſis endlicher Gröſſen. 179-190. §.

Der X. Abſchnitt.

Von den allgemeinſten Eigenſchaften höherer Gleichungen, und den vorzüglichſten Veränderungen, welche ſich damit machen laſſen.

91. §. Erklärungen.

Es iſt hier nur von ſolchen Gleichungen die Rede, welche auſſer bekannten Gröſſen nur eine unbekannte enthalten, und beſtimmte Gleichungen heißen, es mag übrigens die darinn vorhandene unbekannte Gröſſe auf was immer für eine Potenz erhoben ſeyn. Wenn in einer Gleichung die unbekannte Gröſſe irgend in einem Gliede unter dem Wurzelzeichen ($\sqrt{}$) ſich befindet; ſo heißt ſie eine irrationale Gleichung; eine rationale Gleichung iſt hingegen diejenige, wo die unbekannte Gröſſe nirgends unter einem Wurzelzeichen ſtehet: z. B. $8a - 3\sqrt{bx^3+cx} = d$ iſt eine irrationale, und $8a - 3bx^3 + cx - \sqrt{5d} = 89 - 3$ eine rationale Gleichung.

Zusatz.

Weil jede irrationale Gleichung in eine rationale verwandelt werden kann (86. §); so ist verstattet, alle Untersuchungen auf rationale Gleichungen einzuschränken.

92. §. Erklärungen.

Rationale Gleichungen (91. §.) werden in verschiedene Ordnungen eingetheilt, welche von den höchsten Potenzen der darinn vorhandenen unbekannten Grössen abhängen. Wenn nämlich eine solche Gleichung die unbekannte Grösse nirgends im Nenner eines gebrochenen Gliedes hat (31. §. 1. Zus.), und die höchste Potenz derselben Grösse, die zweyte, dritte, vierte, fünfte, und überhaupt mte Potenz ist; so heißt auch die Gleichung selbst von der zweyten, dritten, vierten, fünften ---- mten Ordnung; die Gleichungen von der zweyten, dritten und vierten Ordnung pflegt man auch quadratische, cubische und biquadratische Gleichungen zu nennen. Alle diese Gleichungen werden auch höhere, oder zusammengesetzte Gleichungen genannt, wovon die Ursache unten erhellen wird, und dann heißt diejenige Gleichung, welche nur die erste Potenz der unbekannten Grösse enthält, eine einfache Gleichung.

Zusatz.

Man kann jede höhere Gleichung so verwandeln, daß alle Glieder auf einer Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommen, und die o sich allein auf der andern Seite befinde (30. §. 3. Zus.); und die Glieder selbst kann man so neben einander

einander ſetzen, daß die höchſte Potenz zuerſt zur linken Hand ſtehe, und darauf die nächſt niedrigeren Potenzen der unbekannten Gröſſe folgen; und wenn die höchſte Potenz mit einer bekannten Gröſſe multiplicirt oder dividirt iſt; ſo kann man ſie davon allemahl befreyen (31. §. 1. 3. Zuſ.); und wenn ſie vielleicht verneint iſt; ſo kann ſie bejaht werden. (30. §. 2. Zuſ.).

Beyſpiele.

I. $\frac{ax}{b} + \frac{c}{m+x} = \frac{a}{x} - b$

oder $\frac{ax}{b} + \frac{c}{m+x} + b - \frac{a}{x} = 0.$

oder $\frac{am}{b}x + \frac{a}{b}x^2 + c + bm + bx - \frac{am}{x} - a = 0$

oder $\frac{am}{b}x^2 + \frac{a}{b}x^3 + cx + bmx + bx^2 - am - ax = 0$

oder $\left(\frac{am}{b} + b\right)x^2 + (bm + c - a)x + \frac{a}{b}x^3 - am = 0$

oder $\left(m + \frac{b^2}{a}\right)x^2 + \left(\frac{b^2}{a}m + \frac{bc}{a} - b\right)x + x^3 - bm = 0$

oder $x^3 + \left(m + \frac{b^2}{a}\right)x^2 + \left(\frac{b^2}{a}m + \frac{bc}{a} - b\right)x - bm = 0.$

II. $ax^2 - \frac{b}{x} = a + x^3$; oder $ax^2 - \frac{b}{x} - a - x^3 = 0$;

oder $-ax^2+\frac{b}{x}+a+x^3=0$; oder $-ax^3+b+ax+x^4=0$;

oder $x^4-ax^3+ax+b=0$.

93. §. Erklärungen.

Eine nach (92. §. Zuſ.) reducirte Gleichung heißt eine wohl geordnete Gleichung; der Exponent der höchſten Potenz von der darinn befindlichen unbekannten Gröſſe, von welcher die Ordnung abhängt, zu der die Gleichung gehört (92. §.), heißt der Exponent der Ordnung; die Glieder einer Gleichung werden von der höchſten Potenz der unbekannten Gröſſe angerechnet, ſo, daß ſie zum erſten, die nächſt niedrigere Potenz aber zum zweyten, u. ſ. f. Glieder gehört; wenn eine von den niedrigern Potenzen fehlet, wie die zweyte Potenz x^2 in (92. §. Zuſ. II. Beyſp.); ſo fehlet auch das Glied der Gleichung, zu welcher eine ſolche Potenz gehört, und man pflegt das fehlende Glied mit einem Sternchen (*) anzuzeigen.

Z. B. Bey der geordneten Gleichung $x^4+2ax^3+5bx^2-6x+8=0$ iſt 4 der Exponent der Ordnung; x^4 iſt das erſte; $2ax^3$ das zweyte, $5bx^2$ das dritte, $-6x$ das vierte, und $+8$ das fünfte Glied; $2a$ iſt der Coefficient des zweyten, $5b$ des dritten, -6 des vierten Gliedes.

Bey $x^5*-2bx^3*+dx-24=0$, welche Gleichung man auch ſo ſchreiben könnte $x^5\pm 0x^4-2bx^3\pm 0x^2+dx-24=0$, fehlen zwey Glieder, nämlich das zweyte und das vierte Glied.

1. Zusatz.

Die Gleichung $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Px^{m-r+1} + Qx^{m-r} + Rx^{m-r-1} + \ldots + U = 0$ drückt jede mögliche wohl geordnete Gleichung aus; sie heißt von einer unbestimmten mten Ordnung; die Coefficienten A, B, C, D . . . P, Q, R . . . U sind völlig unbestimmt, so daß einige davon auch gleich Null seyn können, weil es nämlich geschehen kann, daß einige Glieder abgehen: wenn man den Coefficient A des zweyten Gliedes Ax^{m-1} den ersten, B des dritten Gliedes den zweyten u. s. f. Coefficient nennt; so kann die bey jedem Gliede von m abgezogene Zahl anzeigen, ob der Coefficient desselben Gliedes der erste, zweyte, dritte, vierte u. s. f. ist: Bey Cx^{m-3} zeigt 3 an, daß C der dritte Coefficient, und Cx^{m-3} das vierte Glied ist; bey $Px^{m-r+1} = Px^{m-(r-1)}$ ist P der $(r-1)$te Coefficient, und Px^{m-r+1} das rte Glied; bey Qx^{m-r} ist Q der rte Coefficient, und Qx^{m-r} das $(r+1)$te Glied.

2. Zusatz.

Das letzte Glied einer wohl geordneten Gleichung kann die unbekannte Grösse gar nicht enthalten: denn wenn es dieselbe wirklich enthielte; so könnte man die ganze Gleichung dadurch dividiren, und daraus würde sich zeigen, daß die Gleichung eigentlich zu einer um einen Grad niedrigeren Ordnung gehört. So scheint $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Ux = 0$ zur mten Ordnung zu gehören; wenn man aber alle Glieder durch x dividirt; so verwandelt sich die Gleichung

in $x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+\ldots+U=0$, und dieſe gehört zur $(m-1)$ten Ordnung.

3. Zuſatz.

Zu einer Gleichung von der Ordnung m (1. Zuſ.) gehören m verſchiedene Potenzen $x^m; x^{m-1}; x^{m-2}\ldots x^3; x^2; x$ von x, und überdem ein Glied, wo x gar nicht vorhanden ſeyn kann (2. Zuſ.), oder wo $x^0=1$ ſteckt: zu jeder Gleichung gehören alſo um Eins mehr Glieder, als der Exponent ihrer Ordnung Einheiten hat: zur Gleichung von mter Ordnung gehören $m+1$ Glieder; und eine Gleichung von der zweyten, dritten, vierten u. ſ. f. Ordnung, ſoll drey, vier, fünf u. ſ. f. Glieder haben.

94. §. Erklärung.

Die Wurzel einer wohl geordneten Gleichung (93. §.), wie $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+U=0$ heißt derjenige Werth von der unbekannten Gröſſe x, welcher, wenn man ihn ſtatt x überall in der Function Z ſetzte, machen würde, daß die Glieder derſelben einander aufhöben, und alle zuſammen $=0$ wären.

Z. B. Sey eine Gleichung von der vierten Ordnung $Z=x^4+x^3-\frac{5}{2}x^2-x+6=0$. Nun ſetze man in ihr $\sqrt{-1}$, oder $-\sqrt{-1}$, oder 2, oder -3 ſtatt x; ſo wird ſeyn.

für $x=\sqrt{-1}$; $Z=1\mp\sqrt{-1}-\frac{5}{2}+\sqrt{-1}\mp 6=0$;

für $x=-\sqrt{-1}$; $Z=1+\sqrt{-1}+\frac{5}{2}\mp\sqrt{-1}\mp 6=0$;

für $x=2$; $Z=16+8-\frac{20}{2}+2\mp 6=0$;

für $x=-3$; $Z=81-27-\frac{45}{2}+3+6=0$;

Das

Das heißt: man mag $\sqrt{-1}$, oder $-\sqrt{-1}$, oder 2, oder -3 ſtatt x in der Function $Z=x^4+x^3-\frac{7}{2}x^2+x+6=0$ ſetzen; ſo wird doch dafür allemahl $Z=0$ werden, daher iſt jede der Zahlen $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, 2, -3 eine Wurzel der angeführten Gleichung $Z=0$.

1. Zuſatz.

Wenn $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+U=0$ ſeyn ſoll; ſo muß dieſes für einen gewiſſen Werth $x=a$ geſchehen: für jede Gleichung, ſie mag zu was immer für einer Ordnung gehören, giebt es alſo gewiß eine Wurzel. Ob aber eine Gleichung mehr Wurzeln habe, und wie viel ſie ihrer eigentlich haben muß, dieſes ſoll erſt unterſucht werden: doch erhellet ſchon aus dem angeführten Beyſpiele, daß eine Gleichung mehrere Wurzeln haben kann, und daß dieſe mögliche oder unmögliche, bejahte oder verneinte Zahlen ſeyn können.

2. Zuſatz.

Man kann jede Gleichung von der zweyten Ordnung durch $x^2+Ax+B=0$ ausdrücken, woraus $x^2+Ax=-B$, und $x=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{\left(-B+\frac{1}{4}A^2\right)}$ folgt (88. §.): da alſo $x^2+Ax+B=0$ für eben den Werth von x ſeyn muß, für welchen $x^2+Ax=-B$ iſt; ſo iſt ſowohl $-\frac{1}{2}A+\sqrt{\left(-B+\frac{1}{4}A^2\right)}$ als $-\frac{1}{2}A-\sqrt{\left(-B+\frac{1}{4}A^2\right)}$ eine Wurzel von $x^2+Ax+B=0$.

3. Zuſatz.

Für $\infty B = \frac{1}{4}A^2$ wäre jede Wurzel $= -\frac{1}{2}A$, folglich wären die Wurzeln (2. Zuſ.) einander gleich: iſt aber $\infty B < \frac{1}{4}A^2$; ſo iſt $\sqrt{\left(-B+\frac{1}{4}A^2\right)}$ eine mögliche Gröſſe, und die zwoen Wurzeln (2. Zuſ.) ungleich, aber beyde möglich: iſt hingegen $\infty B > \frac{1}{4}A^2$; ſo iſt $-B+\frac{1}{4}A^2$ etwas verneintes, daher $\sqrt{\left(-B+\frac{1}{4}A^2\right)}$ eine unmögliche Gröſſe (70. §. 4. Zuſ.), folglich ſind die Wurzeln (2. Zuſ.) ungleich, und beyde unmöglich.

95. §. Aufgabe.

Den Quotient auszudrücken, welchen die nachſtehende Function Z durch $x-\alpha$ dividirt geben muß.

$$Z = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \ldots\ldots$$
$$+ Nx^{m-n+2} + Px^{m-n+1} + Qx^{m-n} + Rx^{m-n-1} + \ldots\ldots + U.$$

Auflöſung. 1) Aus der Art, wie dieſe Diviſion geſchehen müßte (22. §. Zuſ.), erhellet genugſam, daß der verlangte Quotient folgende Form haben muß, wobey noch alles darauf ankömmt, daß man die Coefficienten davon a, b, c .... p, q, r, s .... durch die gegebenen A, B, C .... N, P, Q, R .... ausdrücke.

$$\frac{Z}{x-\alpha} = x^{m-1} + ax^{m-2} + bx^{m-3} + cx^{m-4} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + px^{m-n+2} + qx^{m-n+1} + rx^{m-n} + sx^{m-n-1} + \ldots\ldots$$

2) Hier-

a) Hieraus findet man die Function Z selbst,

$$Z = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots\ldots$$
$$- \alpha x^{m-1} - \alpha a x^{m-2} - \alpha b x^{m-3} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + qx^{m-n+2} + rx^{m-n+1} + sx^{m-n} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \alpha px^{m-n+2} - \alpha qx^{m-n+1} - \alpha rx^{m-n} - \ldots\ldots$$

3) Wegen (83. §. Zuſ.) erhält man nun folgende Gleichungen, und Werthe von a, b, c ....

$$a - \alpha = A;\ b - \alpha a = B;$$
$$c - \alpha b = C; \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q - \alpha p = N;\ r - \alpha q = P$$

alſo iſt

$$a = \alpha + A;$$
$$b = \alpha a + B = \alpha^2 + \alpha A + B;$$
$$c = \alpha b + C = \alpha^3 + \alpha^2 A + \alpha B + C;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q = \alpha p + N;$$
$$r = \alpha q + P = \alpha^2 p + \alpha N + P.$$

4) Das Geſetz, nach welchem ſich die drey erſten Coefficienten a, b, c des verlangten Quotienten $\frac{Z}{x - \alpha}$ in (n. 1.) durch α und die Coefficienten A, B, C... der gegebenen Function Z ausdrücken laſſen, iſt in (n. 3.) einleuchtend: wäre dieſes Geſetz für den unbeſtimmten Coefficient q

des (n — 1)ten Gliedes in (n. 1.) gültig; so hätte man wegen (n. 3.)

$$q=\alpha^{n-2}+\alpha^{n-3}A+\alpha^{n-4}B+\alpha^{n-5}C+\ldots+N;$$

daher $r=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}A+\alpha^{n-3}B+\alpha^{n-4}C+\ldots+\alpha N+P.$

Das heißt: wenn dasselbe Gesetz für was immer für einen Coefficient von (n. 1.) gielt; so muß es auch für den nächstfolgenden gelten; also gielt es für jeden folgenden Coefficient, weil es von den drey ersten Coefficienten in (n. 3.) wahr ist (54. §.).

1. Zusatz.

Der Coefficient des (m + 1)ten Gliedes von $\frac{Z}{x-\alpha}$, weil das (m + 1)te Glied von Z die Grösse U war, ist nach dem Gesetze (der Auflös. n. 3. 4.)

$$\alpha^m+\alpha^{m-1}A+\alpha^{m-2}B+\alpha^{m-3}C+\ldots+U;$$

er ist also eine solche Function von α, welche Z von x seyn soll.

2. Zusatz.

Wenn die Function

$$Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+U=0$$

ist; so muß auch $\frac{Z}{x-\alpha}=0$ seyn, daher ist auch

$$\frac{Z}{x-\alpha}=x^{m-1}+ax^{m-2}+bx^{m-3}+\ldots+tx^{m-(m-1)}$$
$$+ux^{m-m}+vx^{m-(m+1)}+\ldots=0,$$

und aus (1. Zus.) ist

$$v=\alpha^m+\alpha^{m-1}A+\alpha^{m-2}B+\alpha^{m-3}C+\ldots+U.$$

Wäre

Wäre α eine Wurzel der Gleichung $Z=0$: so wäre α ein Werth von x, oder $x=\alpha$ bey eben der Gleichung (94. §.), also

$$v=x^m+x^{m-1}A+x^{m-2}B+x^{m-3}C+\ldots+U=Z=0,$$

folglich $\frac{Z}{x-\alpha}=x^{m-1}+ax^{m-2}+bx^{m-3}+\ldots+tx+u=0.$

Bey dieser Voraussetzung hat demnach der Quotient $\frac{Z}{x-\alpha}$ eine bestimmte Anzahl von Gliedern; er hat nämlich m Glieder, und ist eine um einen Grad niedrigere Gleichung, als $Z=0$.

3. Zusatz.

Aus (2. Zus.) erhellet demnach, daß, wenn α eine Wurzel was immer für einer Gleichung $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+U=0$ von der Ordnung m ist, die Function Z allemahl durch $x-\alpha$ ohne Rest dividirt werden kann, und der Quotient eine um einen Grad niedrigere Gleichung geben muß.

4. Zusatz.

Und umgekehrt, wenn $Z=0$ ist, und man Z durch $x-\alpha$ ohne Rest dividiren kann; so ist α eine Wurzel von $Z=0$: man setze nämlich den ganzen Quotient $\frac{Z}{x-\alpha}=K$; so ist $Z=K(x-\alpha)$; für $x=\alpha$ wird daher $x-\alpha=0$, folglich auch $Z=0$, und so ist α eine Wurzel von $Z=0$ (94. §.).

5. Zuſatz.

Für jede Gleichung $Z=0$ giebt es gewiß eine Wurzel $x=a$ (94. §. 1. Zuſ.): alſo giebt es auch für jede Gleichung $Z=0$ einen gewiſſen Factor $x-a$, durch welchen man die Function Z ohne Reſt dividiren, und ſo einen Quotient erhalten kann, welcher eine um einen Grad niedrigere Gleichung ſeyn muß, als $Z=0$ iſt (3. Zuſ.). Wenn man demnach annimmt, daß $Z=0$ eine Gleichung von der Ordnung m iſt, und $\frac{Z}{x-a}=A=0$ eine von der Ordnung $m-1$ giebt; ſo muß es auch für dieſe Gleichung gewiß eine Wurzel $x=b$ (94. §. 1. Zuſ.), und daher auch einen Factor $x-b$ geben, wodurch A ohne Reſt dividirt werden kann, daß der Quotient $\frac{A}{x-b}=B=0$ eine Gleichung von der Ordnung $m-2$ wird (3. Zuſ.); und nun giebt es auch für $B=0$ eine Wurzel $x=c$ (94. §. 1. Zuſ.), und einen Factor $x-c$, welcher eine Gleichung $\frac{B}{x-c}=C=0$ von der Ordnung $m-3$ geben muß (3. Zuſ.): da man alſo dieſe Schlüſſe ſo weit fortſetzen kann, bis man von $Z=0$ auf eine Gleichung von der Ordnung $m-(m-1)=1$, daher von der erſten Ordnung kömmt, welche die Form $x-r=0$ haben kann, wobey nun $x=r$ wäre; ſo iſt einleuchtend, daß aus jeder Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m noch $m-1$ Gleichungen auf dieſe Art entſtehen können, ſo, daß jede von ihnen von einer um einen Grad niedrigeren Ordnung wird,

als

als die nächst vorhergehende war, und daß alle m Gleichungen zusammen gewiß m eigene Wurzeln a, b, c, d .... p, q, r haben müssen.

6. Zusatz.

Wenn $A=o$, $B=o$, $C=o$ .... $P=o$, $Q=o$, $R=o$ die $m-1$ Gleichungen heissen, welche aus $Z=o$ entstehen können, so, daß die ihnen zugehörigen Wurzeln a, b, c .... p, q, r sind, und die Wurzel von $Z=o$ nun α heißt (5. Zus.); so ist:

$$\frac{Z}{x-\alpha}=A;\quad \frac{A}{x-\alpha}=B;\quad \frac{B}{x-b}=C\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\frac{P}{x-p}=Q;\quad \frac{Q}{x-q}=R=x-r.$$

Daß $R=x-r$ seyn muß ist leicht zu erachten; denn R soll die letzte Gleichung $R=o$ von der ersten Ordnung seyn, welche die Form $x-r=o$ haben kann (5. Zus.).

Nun folgt hieraus $Z=A(x-\alpha)$; $A=B(x-a)$; $B=C(x-b)$ ..... $P=Q(x-p)$; $Q=R(x-q)$ $=(x-q)(x-r)$: also $Z=(x-\alpha)(x-a)(x-b)(x-c)$ ..... $(x-p)(x-q)(x-r)=o$.

Für jede Gleichung $Z=o$ von der Ordnung m giebt es also m Factoren $x-\alpha$; $x-a$; $x-b$ ... $x-r$, welche alle in einander multiplicirt die Function Z zum Product geben müssen: also giebt es auch m solche Factoren, durch derer jeden die Function Z ohne Rest dividirt werden kann, daher giebt es auch m Wurzeln α, a, b ... p, q, r für jede Gleichung von der Ordnung m (4. Zus.).

7. Zu-

7. Zuſatz.

Wenn man in (6. Zuſ.) $x-\alpha=\beta$; $x-a=\gamma$; $x-b=\delta$ u. ſ. f. ſetzt; ſo iſt nun $Z=(x-\alpha)(x-a)(x-b)\ldots=\beta\gamma\delta\ldots\ldots$ Soll nun $Z=0$ ſeyn; ſo iſt genug, wenn $x=\alpha$, oder $x=a$, oder $x=b$ u. ſ. f. iſt, indem alsdann $x-\alpha=\beta=0$, oder $x-a=\gamma=0$, oder $x-c=\delta=0$ u. ſ. f. daher allemahl $\beta\gamma\delta\ldots=0$ werden muß, und es iſt gar nicht nöthig, daß $x=\alpha$, und zugleich $x=a$, und $x=b$ u. ſ. f. ſey. Daß man aber jeden unter den Factoren $x-\alpha$, $x-a$, $x-b$ u. ſ. f. welchen man will, gleich Null ſetzen kann, erhellet aus (6. Zuſ.), weil α, a, b ... ſolche Zahlen ſeyn ſollen, wovon jede eine Wurzel der Gleichung $Z=0$ ſeyn kann, und daher man $x=\alpha$, oder $x=a$, oder $x=b$ u. ſ. f. zu ſetzen berechtigt iſt (94. §.).

8. Zuſatz.

Setzt man indeſſen alle Factoren von Z gleich Null, nämlich $x-\alpha=0$, $x-a=0$, $x-b=0$ u. ſ. f.; ſo iſt $Z=(x-\alpha)(x-a)(x-b)\ldots=0$, wie es wirklich ſeyn muß (6. Zuſ.): man kann demnach jede Gleichung $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+U=0$ von der Ordnung m als ein Product aus m einfachen Gleichungen, wie $x-\alpha=0$, $x-a=0$, $x-b=0$, u. ſ. f. betrachten, welche ihre Wurzelgleichungen heißen können, ſo wie α, a, b ... ihre Wurzeln ſeyn ſollen (6. Zuſ.).

9. Zuſatz.

Es kann nämlich eine Gleichung $Z=0$ (8. Zuſ.) nichts mehr erfodern, als daß die darinn befindliche unbekannte Gröſſe x einen ſolchen Werth habe, wofür alle Glieder der Function Z einander aufheben, daher alle zuſammen $=0$ werden müſſen; daß aber x unterſchiedene, bejahte und verneinte, mögliche und unmögliche Werthe haben ſoll, dieſes kann die Gleichung gar nicht erfodern: wenn man alſo ſagt, daß α, a, b, - - - p, q, r die Wurzeln einer Gleichung $Z=0$ ſind (6. Zuſ.); ſo ſagt man dadurch nichts mehr, als, daß α, a, b - - - p, q, r ſolche Zahlen ſind, wovon jede für ſich geſchickt iſt, die Function Z gleich Null zu machen, wenn man ſie in ihr ſtatt x überall nimmt, daß daher $x=\alpha$, oder $x=a$, oder $x=b$ - - - - geſetzt werden kann, nicht aber, daß $x=\alpha$, und zugleich $x=a$, und $x=b$ u. ſ. f. iſt, ſonſt müßte man auch $\alpha=a=b=$ - - - - ſetzen, da doch α, a, b - - - auch ungleiche Zahlen ſeyn können. Und eben ſo muß man den Satz (8. Zuſ.) nicht anders auslegen, als, daß es m Factoren $x-\alpha$, $x-a$, $x-b$ - - - - für jede Gleichung von der Ordnung m giebt, und jeder von ihnen geſchickt iſt, zu einer Wurzelgleichung $x-\alpha=0$, oder $x-a=0$, oder $x-b=0$ - - - genommen zu werden, nicht aber, das alle Gleichungen $x-\alpha=0$, $x-a=0$, $x-b=0$ - - - zugleich richtig ſind.

Anmerkung.

Die Gleichung $x^4+x^3-\frac{5}{4}x^2+x\pm 6=0$ hat vier Wurzeln, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, 2, -3 (94. §.): da alſo

dieſe

dieſe Gleichung nichts mehr erfodert, als daß x einen ſolchen Werth hat, wobey die vor dem Gleichheitszeichen ſtehende Function gleich Null ſeyn muß, und dieſes geſchieht ſowohl für $x=\sqrt{-1}$, als $x=-\sqrt{-1}$, und $x=2$, und $x=-3$; ſo erfodert die Gleichung, daß entweder $x=\sqrt{-1}$, oder $x=-\sqrt{-1}$, oder $x=2$, oder $x=-3$ ſey; ſie erfodert aber nicht, daß $x=\sqrt{-1}$, und zugleich $x=-\sqrt{-1}$, und $x=2$, und $x=-3$ ſey, als welches $\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}=2=-3$ geben würde.

Wenn man z. B. ein Quadrat a^2 hat, und ſeine Wurzel x wiſſen will; ſo erfodert das Quadrat, daß die Wurzel eine Zahl ſey, die einmahl mit ſich ſelbſt multiplicirt a^2 zum Product giebt: da alſo dieſes ſowohl für $x=+a$, als für $x=-a$ geſchieht; ſo erfodert das Quadrat, daß entweder $x=+a$, oder $x=-a$ ſey, nicht aber, daß $x=+a$ und zugleich $x=-a$ ſey.

96. §. Lehrſatz.

Eine Gleichung $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+U=0$ von der Ordnung m kann weder mehr noch weniger Wurzeln haben, als der Exponent m der Ordnung (93. §.) Einheiten hat.

Beweis. 1) Jede Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m muß m Wurzeln haben (95. §. 6. Zuſ.); weniger als m Wurzeln kann ſie alſo nicht haben.

2) Sie

2) Sie kann aber auch nicht mehr als m Wurzeln haben. Man nehme nämlich an, es seyen a, b, c . . . . p die m Wurzeln von $Z = o$, daher sey $Z = (x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-p)$, nach (95. §. 6. Zus.).

Wenn es nun für $Z = o$ eine Wurzel α gäbe, und man wissen wollte, ob diese Wurzel von a, b, c . . . p unterschieden ist, ob sie nicht vielmehr schon unter denselben vorhanden ist; so könnte man dieses so entscheiden:

Es muß Z durch $x - \alpha$ ohne Rest dividirt werden können (95. §. 3. Zus.), und was Z durch $x - \alpha$ dividirt zum Quotient gäbe, dieses könnte H heißen, so, daß $Z = H(x-\alpha)$ wäre.

Da nun α eine Wurzel von $Z = o$ seyn soll; so muß man $x = \alpha$ und $x - \alpha = o$ setzen, daher muß auch $H(x-\alpha) = Z = o$ seyn. Es ist aber $Z = (x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-p)$: also ist auch $(x-a)(x-b)(x-c \ldots (x-p) = o$, sobald man $x - \alpha = o$ setzt: jenes kann aber nicht geschehen, wenn nicht einer von den daselbst befindlichen Factoren gleich Null ist; es muß daher einer von diesen Factoren, z. B. $x - c = o$ gesetzt werden, sobald man $x - \alpha = o$ setzt, daher muß auch $x - c = x - \alpha$, und nun $c = \alpha$ seyn, folglich kann die Wurzel α von den Wurzeln a, b, c . . . . p nicht unterschieden seyn.

1. Zusatz.

Wenn $Z^n = o$ eine Gleichung von der Ordnung n, und $Y^m = o$ eine von der Ordnung m bedeutet, und die n Wurzeln jener Gleichung a, b, c . . . p, die m Wurzeln

aber dieſer Gleichung $\alpha, \beta, \gamma \cdots \mu$ heißen; ſo iſt (95. §. 6. Zuſ.)

$$Z^n = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-p) = 0;$$
$$Y^m = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots\cdots(x-\mu) = 0;$$
$$\text{alſo } Y^m Z^n = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-p)(x-\alpha)$$
$$(x-\beta)(x-\gamma)\cdots\cdots(x-\mu) = 0.$$

So wie daher Z^n allemahl $=0$ wird, man mag was immer für eine Zahl a, oder b, oder c ---- ſtatt x nehmen, und Y^m allemahl $=0$ wird, man mag $x=\alpha$, oder $x=\beta$, oder $x=\gamma$ ---- ſetzen; eben ſo muß auch $Z^n Y^m$ allemahl $=0$ werden, wenn man was immer für eine von den Zahlen a, b, c --- p, $\alpha, \beta, \gamma \cdots \mu$ ſtatt x in $Z^n Y^m$ nimmt: wenn man alſo zwo Gleichungen $Z^n = 0$, $Y^m = 0$ unter einander multiplicirt; ſo entſtehet daraus allemahl eine Gleichung $Z^n Y^m = 0$, welche die n+m Wurzeln der beyden Gleichungen zu ihren eigenen Wurzeln hat, die demnach von der Ordnung n+m iſt.

Z. B. Die Gleichung $x^2+x-2=0$ hat die Wurzeln 1 und -2; und die Gleichung $x^3+6x^2-7x-60=0$ hat die Wurzeln 3; -4; -5. Nun iſt $(x^2+x-2)(x^3+6x^2-7x-60) = x^5+7x^4-3x^3-79x^2-46x+120=0$ eine Gleichung von der Ordnung 2+3, und ihre Wurzeln ſind 1; -2; 3; -4; -5, wie man es nach (94. §.) findet.

2. Zuſatz.

Jede Gleichung von der Ordnung m multiplicirt mit einer Wurzelgleichung $x-\alpha=0$ (95. §. 8. Zuſ.) giebt eine

eine um einen Grad höhere Gleichung, welche keine andere Wurzeln haben kann, als α und die m Wurzeln der multiplicirten Gleichung von der Ordnung m.

3. Zusatz.

Wenn der Exponent der Ordnung einer Gleichung (93. §.) gerad ist; z. B. $2n$; so kann man sie als das Product aus n quadratischen Gleichungen betrachten, so, daß sie keine Wurzeln haben kann, als welche diesen quadratischen Gleichungen zugehören: ist aber der Exponent der Ordnung $2n+1$ ungerad; so bestehet die Gleichung aus n quadratischen Gleichungen, und einer einfachen Gleichung, und ihre Wurzeln sind mit den Wurzeln dieser Gleichungen einerley.

97. §. Erklärung.

Wenn man vier Grössen a, b, c, d hat; so kann man daraus sechs Producte machen, ab; ac; ad; bc; bd; cd; so, daß dabey jede der gegebenen Grössen mit einer andern multiplicirt wird: aus eben den Grössen kann man vier Producte machen abc; abd; acd, bcd, wobey jede Grösse mit zwoen andern vervielfältigt wird: und wenn man a, b, c, d, e - - - - p, q, r Grössen hätte; so liessen sich daraus verschiedene Producte machen: erstens wenn man jede Grösse mit einer andern, zweytens wenn man jede Grösse mit zwoen andern, drittens wenn man jede Grösse mit drey andern, u. s. f. multiplicirte: diese Producte sollen in der Folge die Verbindungen der Grössen a, b, c, d, e, - - - p, q, r heißen, und zwar die Verbindungen nach

2, 3, 4, 5 - - - n — 1, n, n+1 u. ſ. f. nachdem ſie die aus zwoen, drey, vier, fünf - - - n — 1, n, n+1 Gröſſen beſtehenden Producte bedeuten werden.

98. §. Lehrſatz.

Bey jeder Gleichung von der Ordnung m ſind die Coefficienten ihrer Glieder folgenden Geſetzen unterworfen:

I. Das letzte Glied (93. §.) iſt allemahl das Product aus allen m Wurzeln (96. §.), und zwar mit eigenem Zeichen (+ oder —) oder entgegengeſetztem, nachdem der Exponent m der Ordnung (93. §.) eine ungerade oder gerade Zahl iſt.

II. Der erſte Coefficient (93. §. 1. Zuſ.) iſt die Summe aller m Wurzeln mit entgegengeſetztem Zeichen; der zweyte Coefficient (daſ.) iſt die Summe aller Verbindungen der m Wurzeln nach 2 (97. §.) mit ihrem eigenen Zeichen; der dritte Coefficient iſt die Summe der Verbindungen der m Wurzeln nach 3 (97. §.) mit entgegengeſetztem Zeichen; der vierte Coefficient iſt die Summe der Verbindungen der m Wurzeln nach 4 (97. §.) mit ihrem eigenen Zeichen, u. ſ. f.

III. Ueberhaupt ſoll alſo jeder nte Coefficient, nämlich der Coefficient des (n+1)ten Gliedes (93. §. und 1. Zuſ.) die Summe der Verbindungen der m Wurzeln nach n (97. §.) mit ihrem eigenen Zeichen (+ oder —), oder mit dem ihm entgegengeſetzten

ſeyn,

seyn, nachdem die Zahl n, welche die Stelle des Coefficienten ausdrückt, gerad oder ungerad ist.

Beweis. 1) Es sey $Z=0$ eine Gleichung von der zweyten Ordnung; so giebt es für sie nur zwo Wurzeln (96. §.), welche a, b heißen können, und nun ist wegen (95. §. 6. Zus.)

$$Z=(x-a)(x-b)=x^2-\left\{\begin{matrix}a\\+b\end{matrix}\right\}x+ab=0.$$

2) Sey ferner $Z=0$ eine Gleichung von der dritten Ordnung, wofür es drey Wurzeln a, b, c geben muß (96. §.); so ist (95. §. 6. Zus.)

$$Z=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-\left\{\begin{matrix}a\\+b\\+c\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}ab\\+ac\\+bc\end{matrix}\right\}x-abc=0.$$

3) Sey $Z=0$ eine Gleichung von der vierten Ordnung, und ihre vier Wurzeln (96. §.) mögen a, b, c, d heißen; so hat man (95. §. 6. Zus.)

$$Z=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=$$

$$=x^4-\left\{\begin{matrix}a\\+b\\+c\\+d\end{matrix}\right\}x^3+\left\{\begin{matrix}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{matrix}\right\}x^2-\left\{\begin{matrix}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{matrix}\right\}x+abcd=0.$$

4) Die Gesetze I, II, III) sind also wegen (1. 2. 3) von jeder Gleichung wahr, welche von der zweyten, dritten, oder vierten Ordnung ist: sie werden demnach für alle Gleichungen aller Ordnungen gelten müssen, wenn es wahr seyn

wird, daß, wenn dieſelben Geſetze von einer Gleichung einer unbeſtimmten Ordnung m gälten, ſie auch für die um einen Grad höhere Gleichung von der Ordnung m+1 wahr ſeyn müßten (54. §.), welches ſo dargethan wird.

α) Die Coefficienten einer Gleichung A = 0. von der Ordnung m, wovon die Wurzeln a, b, c, d, - - - p heißen mögen, ſollen L, M, N - - - R, S, T - - - - V, Z heißen, und die Gleichung ſelbſt, den Geſetzen I, II, III) angemeſſen, ſey

$$A = x^m - Lx^{m-1} + Mx^{m-2} - Nx^{m-3} + \dots$$
$$\dots \mp Rx^{m-(r-1)} \pm Sx^{m-r} \mp Tx^{m-(r+1)} \dots \pm Vx \mp Z = 0.$$

β) Man nehme nun eine neue Wurzel q, und multiplicire die Gleichung A = 0 von der Ordnung m mit der Wurzelgleichung x − q = 0; ſo giebt das Product B = A(x − q) = 0 eine Gleichung von der Ordnung m+1, welche die m+1 Wurzeln a, b, c, d - - - - p, q haben muß (96. §. 2. Zuſ.), und es wird, wegen α) ſeyn

$$B = x^{m+1} - Lx^m + Mx^{m-1} - Nx^{m-2} + \dots$$
$$\quad - q) \quad + qL) \quad - qM) \quad +$$
$$\dots \pm Sx^{m-(r-1)} \mp Tx^{m-r} + \dots \mp Zx \pm qZ = 0.$$
$$\dots -(\mp qR)) \quad -(\pm qS)) \quad \dots -(\pm qV))$$

γ) Oder, wenn man m+1 = n, daher m = n−1 ſetzt.

$$B = x^n - Lx^{n-1} + Mx^{n-2} - Nx^{n-3} + \dots$$
$$\quad - q) \quad + qL) \quad - qM) \quad +$$
$$\dots \pm Sx^{n-r} \mp Tx^{n-r-1} \dots \mp Zx \pm qZ = 0.$$
$$\dots -(\mp qR)) \quad -(\pm qS)) \quad \dots -(\pm qV))$$

δ) Nun

δ) Nun muß man zeigen, daß die angeführten Geſetze bey der Gleichung in γ) Statt finden müſſen, weil man ſie in α) angenommen hat.

Wenn der erſte Coefficient L bey A=o in α) die Summe der m Wurzeln a, b, c, d - - - p von A=o iſt, und zwar mit dem entgegengeſetzten Zeichen (—) verſehen da ſtehet; ſo iſt auch der erſte Coefficient L+q bey B=o in γ), die Summe aller m+1=n Wurzeln a, b, c, d - - - p, q, und zwar mit dem entgegengeſetzten Zeichen (—) vorhanden.

Wenn der zweyte Coefficient M bey A=o in α) die Summe aller Verbindungen der m Wurzeln a, b, c, d - - - p nach 2. (97. §.) mit ihrem eigenen Zeichen iſt; ſo muß auch der zweyte Coefficient M+qL bey B=o in γ) die Summe aller Verbindungen der n=m+1 Wurzeln a, b, c, d - - - p, q nach 2 mit ihrem eigenen Zeichen ſeyn.

Wenn ferner das letzte Glied Z bey A=o in α) das Product a b c d - - - - p aus den m Wurzeln a, b, c, d - - - p iſt; ſo muß auch das letzte Glied qZ bey B=o in γ) das Product aus den m+1=n Wurzeln a, b, c, d - - - p, q ſeyn: wenn der Exponent m der Gleichung A=o in α) gerad iſt, und das letzte Glied Z das Zeichen (+) vor ſich hat, oder wenn m ungerad iſt, und das letzte Glied Z das Zeichen (—) vor ſich hat; ſo muß im erſten Fall der Exponent n=m+1 bey B=o in γ) ungerad ſeyn, und das letzte Glied qZ das Zeichen (—) haben, indem es aus der Multiplication +Z × —q entſtehet; im zweyten Fall

aber muß der Exponent $n = m + 1$ gerad seyn, und das letzte Glied qZ das Zeichen (+) haben, weil nun qZ aus $-Z \times -q$ entstehet.

Und so erhellet, daß die Gesetze I. II) bey der Gleichung $B = o$ von der Ordnung $n = m + 1$ in γ) vorhanden sind, weil sie für die Gleichung $A = o$ von der Ordnung m in α) gelten sollen.

Nun überhaupt, wenn der rte Coefficient S bey $A = o$ in α) die Summe aller Verbindungen nach r bedeutet, welche sich aus den m Wurzeln a, b, c, d - - - p machen lassen (97. §.); so muß das Product qS die Summe aller Verbindungen nach $r + 1$ seyn, die sich aus den $m + 1$ Wurzeln a, b, c, d - - - - p, q nach (97. §.) machen lassen, so, daß bey jeder Verbindung der Factor q vorkömmt.

Wenn also der $(r + 1)$te Coefficient T bey $A = o$ in α) die Summe aller durch die m Wurzeln a, b, c, d - - - - p möglichen Verbindungen nach $r + 1$ ist (97. §.); so muß der $(r + 1)$te Coefficient $T + qS$ bey $B = o$ in γ) die Summe aller Verbindungen nach $r + 1$ ausdrücken, welche sich aus $m + 1$ Wurzeln a, b, c, d - - - p, q dieser Gleichung machen lassen: denn es müssen unter allen solchen Verbindungen einige seyn, worinn q nicht steckt, und die Summe dieser Verbindungen soll T ausdrücken, und einige, worinn q steckt, und die Summe dieser Verbindungen ist qS, wie oben, daher ist die Summe aller, jener und dieser, Verbindungen zusammen $= T + qS$.

Wenn

Wenn ferner r eine gerade, daher r+1 eine ungerade Zahl ist; so hat vermöge des daselbst angenommenen Gesetzes III), der rte Coefficient S bey A=o in α) das eigene Zeichen, folglich (+) vor sich, und dem zufolge der (r+1)te Coefficient T das entgegengesetzte, folglich das Zeichen(—): also hat der (r+1)te Coefficient bey B=o in γ), welcher nun =—T+S×—q=—T—Sq=—(T+qS) ist, das Zeichen (—) vor sich, daher kömmt bey ihm das, was er von den Wurzeln a, b, c, d - - - p, q enthält, mit entgegengesetztem Zeichen vor, wie dieses das Gesetz III) haben will.

Ist aber r eine ungerade, daher r+1 eine gerade Zahl; so hat, vermöge des angenommenen Gesetzes III) der rte Coefficient S bey A=o in α) sein eigenes Zeichen, daher (+), und der (r+1)te Coefficient T das entgegengesetzte, daher (+) vor sich: also ist der wahre (r+1)te Coefficient bey B=o in γ) nun =T+(—S×—q)=T+qS, folglich kömmt bey ihm das, was er von den Wurzeln a, b, c, d - - - - p, q enthält, nun mit eigenem Zeichen vor, wie dieses ebenfalls das Gesetz III) verlangt.

1. Zusatz.

Wenn eine Gleichung $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{---}+U=o$ von was immer für einer Ordnung m, entweder lauter bejahte Wurzeln a, b, c, - - - p, oder bejahte und verneinte hat, doch so, daß die bejahten zusammen mehr betragen, als die verneinten; so ist die Summe aller Wurzeln allemahl bejaht, daher der erste Coefficient A allemahl

verneint: wenn aber entweder alle Wurzeln derſelben Gleichung verneint ſind, oder wenigſtens ihre verneinten Wurzeln zuſammen mehr betragen, als ihre bejahten Wurzeln; ſo muß die Summe aller Wurzeln allemahl verneint, folglich der erſte Coefficient A allemahl bejaht ſeyn.

2. Zuſatz.

Der erſte Coefficient A was immer für einer Gleichung $Z=0$ (1. Zuſ.) kann nur alsdann $=0$ ſeyn, daher kann auch das zweyte Glied Ax^{m-1} einer Gleichung nur alsdann fehlen, wenn die Summe ihrer bejahten Wurzeln in ſich ſo groß iſt, als die Summe ihrer verneinten Wurzeln ſeyn ſoll.

3. Zuſatz.

Weil das letzte Glied U jeder Gleichung (1. Zuſ.) das Product aus allen ihren Wurzeln a, b, c ... p ſeyn muß; ſo kann dieſes Glied nur alsdann fehlen, oder $=0$ ſeyn, wenn eine von dieſen Wurzeln $=0$ iſt, alsdann aber iſt die Gleichung von einer niedrigeren Ordnung (93. §. 2. Zuſ.).

4. Zuſatz.

Aus (6. §.) kann man ſich leicht überzeugen, daß das Product aus verneinten Factoren allemahl bejaht oder verneint ſeyn muß, nachdem die Anzahl derſelben gerad oder ungerad iſt: da alſo jede Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m auch m Wurzeln hat (96. §.), und das Product aus allen dieſen Wurzeln das letzte Glied der Gleichung mit eigenem oder entgegengeſetztem Zeichen geben ſoll, nachdem der Exponent m der Ordnung ungerad oder gerad iſt; ſo

muß

muß das letzte Glied bey einem ungeraden Exponenten m allemahl ~~bejaht~~ verneint seyn, wenn entweder alle Wurzeln bejaht sind, oder wenigstens die Anzahl der verneinten Wurzeln gerad ist, und es muß dasselbe allemahl ~~verneint~~ bejaht seyn, wenn entweder alle Wurzeln verneint sind, oder wenigstens die Anzahl der verneinten Wurzeln ungerad ist: hingegen ist das letzte Glied bey einem geraden Exponent m der Ordnung allemahl ~~verneint~~ bejaht, wenn entweder alle Wurzeln der Gleichung bejaht oder verneint sind, oder wenigstens die Anzahl der verneinten Wurzeln gerad ist; und es ist dasselbe Glied allemahl ~~bejaht, wenn entweder alle Wurzeln bejaht sind, oder wenigstens~~ verneint wenn die Anzahl der verneinten Wurzeln ungerad ist.

Anmerkung.

Ein Beyspiel von (98. §.) kann dieses seyn. Es sey $Z=0$ eine Gleichung von der vierten Ordnung, und sie soll die vier Wurzeln (96. §.) $2; -3; -1; +7$ haben; so ist die Gleichung selbst nach (95. §. 6. Zus.)

$$Z=(x-2)(x+3)(x+1)(x-7)=$$
$$=x^4-5x^3-19x^2+29x+42=0.$$

Und nun findet man die Gesetze (98. §.) bey dieser Gleichung auf folgende Art:

Die Summe aller Wurzeln ist $2-3-1+7=9-4=+5$, und der erste Coefficient der Gleichung ist $=-5$.

Die Summe der Verbindungen nach 2, welche sich aus eben den Wurzeln (97. §.) machen lassen, ist $=(2\times-3)+(2\times-1)+(2\times7)+(-3\times-1)+(-3\times7)$

+

$+(-1\times 7)=-6-2+14+3-21-7=17-36=-19$, und der zweyte Coefficient der Gleichung ist auch -19.

Die Summe aller Verbindungen nach 3 (97. §.), welche aus eben den Wurzeln entstehen können, ist $=(2\times-3\times-1)+(2\times-3\times 7)+(2\times-1\times 7)+(-3\times-1\times 7)=6-42-14+21=27-56=-29$, und der dritte Coefficient der Gleichung ist $=+29$.

Endlich ist das Product aus allen Wurzeln $=2\times-3\times-1\times 7=42$, und dieses ist auch das letzte Glied der Gleichung.

99. §. Aufgabe.

Die Wurzeln einer vorgelegten Gleichung um eine gegebene Zahl zu vermehren oder zu vermindern.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sey $Z=x^m+Ax^{m-1}+\ldots+U=0$, und die Zahl, um welche ihre Wurzeln vermehrt oder vermindert werden sollen, heiße ω: nun nehme man im ersten Fall $x+\omega=y$, daher $x=y-\omega$, und im zweyten Fall $x-\omega=y$, folglich $x=y+\omega$, und setze in der gegebenen Gleichung $Z=0$ entweder $y-\omega$ oder $y+\omega$ überall statt x; so wird $Z=0$ in eine andere Gleichung für y verwandelt werden, und jede Wurzel dieser Gleichung wird im ersten Fall $y=x+\omega$ und im zweyten $y=x-\omega$ seyn, daher werden die Wurzeln der neuen Gleichung die um ω vermehrten oder verminderten Wurzeln der gegebenen Gleichung $Z=0$ seyn.

Beyspiele.

I. Man soll die Wurzeln 3; −2; 1; −4 der Gleichung $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$ um 5 vermehren.

Man setze $y=x+5$; $x=y-5$; so ist

$$\begin{array}{rl} x^4= & y^4-20y^3+150y^2-500y+625 \\ +2x^3= & +2y^3-30y^2+150y-250 \\ -13x^2= & -13y^2+130y-325 \\ -14x= & -14y+70 \\ +24= & +24 \\ \hline & y^4-18y^3+107y^2-234y+144=0. \end{array}$$

Es sind aber die Wurzeln dieser Gleichung nach (94. §.) $8=3+5$; $3=-2+5$; $6=1+5$; $1=-4+5$, daher sind sie mit den um 5 vermehrten Wurzeln der gegebenen Gleichung gleich groß.

II. Man soll die Wurzeln 1; −3; 6 der Gleichung $x^3-4x^2-15x+18=0$ um 2 vermindern.

Hier muß seyn $y=x-2$; $x=y+2$: also

$$\begin{array}{rl} x^3= & y^3+6y^2+12y+8 \\ -4x^2= & -4y^2-16y-16 \\ -15x= & -15y-30 \\ +18= & +18 \\ \hline & y^3+2y^2-19y-20=0. \end{array}$$

Und die Wurzeln dieser Gleichung sind $-1=1-2$; $-5=-3-2$; $4=6-2$, daher sind sie mit den um 2 verminderten Wurzeln der gegebenen Gleichung einerley.

1. Zusatz.

Durch die Vermehrung kann man die verneinten Wurzeln einer vorgelegten Gleichung in bejahte, und durch die Verminderung die bejahten Wurzeln in verneinte verwandeln; denn wenn — a eine verneinte Wurzel der Gleichung $Z=0$ ist, und alle ihre Wurzeln um $\omega > a$ vermehrt werden; so wird $-a+\omega$ eine bejahte Wurzel der neuen Gleichung seyn: ist aber a eine bejahte Wurzel, welche um $\omega > a$ vermindert wird; so wird $a-\omega$ eine verneinte Wurzel der neuen Gleichung seyn.

2. Zusatz.

Wenn die Wurzeln einer vorgelegten Gleichung um eine Zahl ω vermehrt werden, welche gröſſer ist, als die gröſte, für sich ohne Rücksicht auf ihr Zeichen (—) genommene, verneinte Wurzel derselben Gleichung; so wird die neue Gleichung lauter bejahte Wurzeln haben: wenn man aber die Wurzeln einer Gleichung um eine Zahl ω vermindert, welche gröſſer ist, als die gröſte Wurzel derselben Gleichung; so werden alle Wurzeln der neuen Gleichung verneint seyn.

3. Zusatz.

Wenn man die Wurzeln einer Gleichung um eine ihrer bejahten Wurzeln vermindert, oder um eine ihrer verneinten Wurzeln vermehrt, wo doch diese verneinte Wurzel bey der Vermehrung als bejaht betrachtet wird; so muß die neue Gleichung um einen Grad niedriger werden, als die gegebene ist: sie muß nämlich um eine Wurzel weniger als die gegebene Gleichung haben (96. §.).

100. §.

100. §. Aufgabe.

Die Wurzeln einer vorgelegten Gleichung mit einer gegebenen Zahl zu multipliciren, oder zu dividiren.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sey $Z=0$ für die unbekannte Größe x, und ω sey die Zahl, durch welche ihre Wurzeln multiplicirt, oder dividirt werden sollen; so muß ωx oder $\frac{x}{\omega}$ aus x werden. Man mache also $y=\omega x$, oder $y=\frac{x}{\omega}$, und setze im ersten Fall $x=\frac{y}{\omega}$, im zweyten Fall aber $x=\omega y$, statt x überall in der vorgelegten Gleichung $Z=0$; so wird $Z=0$ in eine andere Gleichung übergehen, deren Wurzeln, mit den im ersten Fall durch ω multiplicirten, und im zweyten Fall durch ω dividirten Wurzeln von $Z=0$ gleich seyn werden.

Beyspiele.

I. Man soll die Wurzeln 2; 4; 6 der Gleichung $x^3-12x^2+44x-48=0$ mit 2 multipliciren.

Man setze $2x=y$; $x=\frac{1}{2}y$; $x^3=\frac{1}{8}y^3$; $x^2=\frac{1}{4}y^2$; so ist

$$\frac{1}{8}y^3-12.\frac{1}{4}y^2+44.\frac{1}{2}y-48=0$$

oder $y^3-24y^2+176y-384=0$.

Es sind aber die Wurzeln dieser Gleichung $4=2.2$; $8=4.2$; $12=6.2$, daher sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung mit 2 multiplicirt worden.

II. Man

II. Man ſoll die Wurzeln eben derſelben Gleichung $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$ durch 2 dividiren.

Man mache $y = \frac{1}{2}x$; $x = 2y$; $x^3 = 8y^3$; $x^2 = 4y^2$; ſo iſt

$$8y^3 - 12.4y^2 + 44.2y - 48 = 0,$$

oder $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$.

Und die Wurzeln dieſer neuen Gleichung ſind $1 = \frac{2}{2}$; $2 = \frac{4}{2}$; $3 = \frac{6}{2}$, daher ſind dadurch die Wurzeln der gegebenen Gleichung mit 2 dividirt worden.

1. Zuſatz.

Wenn die Coefficienten einer Gleichung Brüche enthalten, und man dieſe wegſchaffen will; ſo multiplicire man die Wurzeln derſelben Gleichung mit einer Zahl, die durch jeden Nenner theilbar iſt.

Denn aus

$$x^n + \frac{A}{a}x^{n-1} + \frac{B}{b}x^{n-2} + \frac{C}{c}x^{n-3} + \ldots + Q = 0$$

für $mx = y$, daher $x = \frac{1}{m}y$, findet man

$$\frac{y^n}{m^n} + \frac{A}{a}\cdot\frac{y^{n-1}}{m^{n-1}} + \frac{B}{b}\cdot\frac{y^{n-2}}{m^{n-2}} + \frac{C}{c}\cdot\frac{y^{n-3}}{m^{n-3}} + \ldots + Q = 0,$$

oder

$$y^n + \frac{A}{a}my^{n-1} + \frac{B}{b}m^2y^{n-2} + \frac{C}{c}m^3y^{n-3} + \ldots + m^nQ = 0.$$

Iſt

Ist aber m durch jeden Nenner a, b, c - - - theilbar; so werden $\frac{m}{a}=\alpha$; $\frac{m}{b}=\beta$; $\frac{m}{c}=\gamma$- - - ganze Zahlen ausdrücken, und man erhält aus der letzten Gleichung die folgende, wo alle Coefficienten ganze Zahlen sind.

$$y^n+\alpha A y^{n-1}+b\beta^2 B y^{n-2}+c^2\gamma^3 C y^{n-3}+\cdots+Q=0.$$

Beyspiel.

Bey $x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{1}{3}x-5=0$, mache man

$$x=\frac{1}{6}y;\ x^2=\frac{1}{6.6}y^2;\ x^3=\frac{1}{6.6.6}y^3;$$

so ist $\frac{1}{6.6.6}y^3-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{6.6}y^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}y-5=0$,

daher $y^3-\frac{7.6.6.6}{2.6.6}y^2+\frac{1.6.6.6}{3.6}y-5.6.6.6=0$,

oder $y^3-21y^2+12y-1080=0$.

Wenn man keine andere Zahl m hat, die sich durch jeden Nenner ohne Rest dividiren ließe; so kann man dazu das Product aus allen Nennern nehmen, welches aber nur alsdann die kleinste unter den durch alle Nenner theilbaren Zahlen seyn wird, wenn alle Nenner unter sich Primzahlen sind. (36. §.).

2. Zusatz.

Auf diese Art lassen sich bisweilen auch Irrationalgrössen (61. §.) aus den Coefficienten einer vorgelegten Gleichung wegschaffen.

Beyspiele.

$x^4+7\sqrt{2}.x^3-10\sqrt{8}.x+5=0.$

Hier kann man die Wurzeln mit $\sqrt{2}$ multipliciren, daher, $x=\frac{y}{\sqrt{2}}$; $x^3=\frac{y^3}{2\sqrt{2}}$; $x^4=\frac{y^4}{4}$ setzen, und dann findet sich

$$\frac{1}{4}y^4+7\sqrt{2}.\frac{1}{2\sqrt{2}}y^3-10\sqrt{8}.\frac{1}{\sqrt{2}}y+5=0,$$

oder $y^4+14y^3-80y+20=0.$

Bisweilen kann dieses durch die Division geschehen: z. B. bey der Gleichung $x^3-3x^2\sqrt{3}-6\sqrt{3}=0.$ Hier setze man nämlich $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, daher $x=y\sqrt{3}$; so findet sich $x^3=y^3.3\sqrt{3}$; $x^2=3y^2$: also $y^3.3\sqrt{3}-3y^2.3\sqrt{3}-6\sqrt{3}=0$, oder $y^3-3y^2-2=0.$

101. §. Aufgabe.

Aus einer Gleichung, in welcher einige Glieder fehlen (93. §.), eine andere zu machen, welche von gleichem Grade seyn, und alle Glieder haben soll.

Auflösung. Es mögen in $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+U=0$ so viel man will Coefficienten $=0$ seyn, daher so viel man will Glieder fehlen (93. §. 1. Zus.); so kann man doch allemahl die Wurzeln dieser Gleichung um eine gewisse Zahl ω vermehren oder vermindern, daher $x=y-\omega$ oder $x=y+\omega$ machen (99. §.), und dadurch eine neue Gleichung für y erhalten, welche zur

Ordnung

Ordnung m gehören, und alle Potenzen von y, von der höchſten y^m an bis zur erſten y enthalten muß, indem ſolche ſchon $x^m = (y \mp \omega)^m$ nach (76. §. 4. Zuſ. u. 3.) geben wird.

Beyſpiel.

$$x^3 + 5x - 8 = 0.$$

Man ſetze $x = y + 3$, oder $x = y - 3$;

ſo iſt für $x = y + 3$

$$(y+3)^3 + 5(y+3) - 8 = 0,$$

oder $y^3 + 9y^2 + 32y + 34 = 0$:

und für $x = y - 3$ iſt

$$(y-3)^3 + 5(y-3) - 8 = 0,$$

oder $y^3 - 9y + 32y^2 - \overset{50}{\cancel{40}} = 0.$

Es kann wohl geſchehen, daß man dazu zufälliger Weiſe eine ſolche Zahl erwähle, welche machet, daß die neue Gleichung von einer niedrigeren Ordnung wird (99 §. 3. Zuſ.); man wird aber die Arbeit, wo ſie nöthig iſt, mit einer andern Zahl wiederholen können.

102. §. Aufgabe.

Aus einer gegebenen Gleichung eine andere zu machen, wo das zweyte Glied (93. §.) fehlen ſoll.

Auflöſung. Durch den Exponent der Ordnung dividire man den Coefficient des zweyten Gliedes, und vermehre die Wurzeln der vorgelegten Gleichung durch den dadurch entſtehenden bejahten oder verneinten Quotient, nachdem das zweyte Glied derſelben Gleichung bejaht oder verneint iſt, nach (99. §.).

Beyspiele.

I. Man soll das zweyte Glied aus der Gleichung $x^3+px^2+qx+r=0$ wegschaffen.

Hier muß $x+\frac{1}{3}p=y$, daher $x=y-\frac{1}{3}p$ seyn:

$$\begin{array}{lrl}
\text{also} & x^3 = & y^3-py^2+\frac{1}{3}p^2y-\frac{1}{27}p^3 \\
 & +px^2 = & +py^2-\frac{2}{3}p^2y+\frac{1}{9}p^3 \\
 & +qx = & +qy-\frac{1}{3}pq \\
 & +r = & +r
\end{array} \Bigg\} = 0$$

$$\text{daher} \quad y^3-\frac{1}{3}p^2 \Big) y+\frac{2}{27}p^3 \Big) = 0$$
$$+q \Big) -\frac{1}{3}pq \Big)$$
$$+r$$

II. Es soll das zweyte Glied aus der Gleichung $x^3-px^2-qx-r=0$ weggeschaft werden.

Hier muß seyn $x-\frac{1}{3}p=y$, daher $x=y+\frac{1}{3}p$:

$$\begin{array}{lrl}
\text{also} & x^3 = & y^3+py^2+\frac{1}{3}p^2y+\frac{1}{27}p^3 \\
 & -px^2 = & -py^2-\frac{2}{3}p^2y-\frac{1}{9}p^3 \\
 & -qx = & -qy-\frac{1}{3}pq \\
 & -r = & -r
\end{array} \Bigg\} = 0$$

$$\text{daher} \quad y^3-\frac{1}{3}p^2 \Big) y-\frac{2}{27}p^3 \Big) = 0.$$
$$-q \Big) -\frac{1}{3}pq \Big)$$
$$-r$$

Beweis.

Beweis. Wenn man die Wurzeln einer Gleichung $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + U = o$ um eine gewisse Zahl ω vermehren will; so muß man $x + \omega = y$, daher $x = y - \omega$ setzen (99. §.), und alsdann ist nach (76. §. 4. Zus. n. 3.).

$$x^m = y^m - m\omega y^{m-1} + \frac{m(m-1)\omega^2}{1 \cdot 2} y^{m-2}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{m-3} + \ldots.$$
$$+Ax^{m-1} = +Ay^{m-1} - A(m-1)\omega y^{m-2}$$
$$+ \frac{A(m-1)(m-2)\omega^2}{1 \cdot 2} y^{m-3} + \ldots\ldots$$
$$+Bx^{m-2} = +By^{m-2} - B(m-2)\omega y^{m-3} + \ldots\ldots$$

Was noch fehlet enthält gewiß niedrigere Potenzen von y, daher ist auch $\left.\begin{matrix} -m\omega \\ +A \end{matrix}\right) y^{m-1}$ das vollkommene zweyte Glied der neuen Gleichung, welche die um ω vermehrten Wurzeln der gegebenen Gleichung zu ihren eigenen Wurzeln haben muß (93. §. 1. Zus.). Da aber das zweyte Glied dieser neuen Gleichung fehlen soll; so muß man $(A - m\omega)y^{m-1} = o$, daher auch $A - m\omega = o$ setzen, und hieraus ergiebt sich $\omega = \frac{A}{m}$ die Zahl, welche der Forderung allemahl genug thut.

Der XI. Abschnitt.

Von den Gränzen der Wurzeln einer Gleichung überhaupt.

103. §. Erklärungen.

Eine veränderliche Grösse heißt diejenige, welche keinen bestimmten Werth hat, folglich sowohl zunehmen als abnehmen kann, wie z. B. eine Sehne in jedem Kreise: und eine beständige oder unveränderliche Grösse ist die, welche einen völlig bestimmten Werth hat, und daher weder zunehmen noch abnehmen kann, wie z. B. jeder Durchmesser in jedem Kreise.

Zusatz.

Wenn x eine veränderliche Grösse bedeutet, und A, B, C, D . . . . lauter beständige Grössen sind; so ist jede Function $Z = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots$ eine veränderliche Function von x: es muß nämlich Z für jeden neuen Werth von x auch einen neuen Werth erhalten, daher hat sie so wenig einen bestimmten Werth, wie wenig ihn x haben soll.

104. §. Erklärungen.

Eine veränderliche Grösse kann ohne Ende zunehmen, wofern sie so beschaffen ist, daß man sie noch allemahl grösser machen kann, wie immer sie auch groß schon geworden seyn mag: wenn aber eine veränderliche Grösse von der Beschaf-

Beschaffenheit ist, daß sie noch allemahl kleiner werden kann, sie mag schon wie immer klein seyn; so sagt man von ihr, sie könne ohne Ende abnehmen.

1. Zusatz.

Weil jede Menge von ganzen Einheiten eine ganze Zahl heißt; so ist eine überhaupt genommene Zahl als eine veränderliche Grösse anzusehen, welche einen desto grösseren Werth erlanget, je mehr Einheiten zu ihr gesetzt werden (103. §.), welche daher ohne Ende zunehmen kann, weil sie nie so groß wird, daß man zu ihr keine Einheit mehr setzen könnte.

2. Zusatz.

Man kann die Hälfte, ein Drittel, Viertel, und überhaupt ein Mtel von x, oder ein Stück $= \frac{1}{M} x$ nehmen; dieses wird mit x von einerley Art Grösse bedeuten, aber eine desto kleinere, je grösser die ganze Zahl ist, welche M anzeigen soll: da also diese Zahl ohne Ende zunehmen kann (1. Zus.); so kann auch ein Stück $\frac{1}{M} x$ von x ohne Ende abnehmen. Es mag nämlich $\frac{1}{e} x$ ein wie immer kleines Stück von x bedeuten, daher e eine wie immer große Zahl seyn; so ist doch noch allemahl möglich, eine andere Zahl $M > e$, z. B. $M = e + 1$, daher auch ein anderes Stück $\frac{1}{M} x < \frac{1}{e} x$, z. B. $\frac{1}{e+1} x < \frac{1}{e} x$ zu machen.

105. §. Erklärungen.

Für eine ganze Zahl M giebt es also keine Gränze ihrer Zunahme (104. §. 1. Zus.); und wenn man sich die Abnahme eines Stückes $\frac{1}{M}x$ von x nach (104. §. 2. Zus.) vorstellt; so giebt es auch für das Stück $\frac{1}{M}x$ keine Gränze seiner Abnahme. Man sieht indessen leicht ein, daß die Gränze der Zunahme einer ganzen Zahl M nichts anders seyn könnte, als eine Zahl, welche schon so groß wäre, daß sie alle fernere Zunahme durch Zusetzung neuer Einheiten (104. §. 1. Zus.) ausschlösse, und diese Gränze wird gewöhnlich eine unendlich grosse Zahl genannt. Eben so könnte die Gränze eines abnehmenden Stückes $\frac{1}{M}x$ von x nichts anders seyn, als etwas von x, das schon so klein seyn müßte, daß dabey alle fernere Abnahme des Stückes $\frac{1}{M}x$ aufhören würde, sobald es dieses Stück erreichte, und dieses heißt gewöhnlich ein unendlich kleines Stück von x.

Jede Zahl und Grösse hingegen, welche sich angeben läßt, und daher so groß ist, daß sie noch einer Zunahme und Abnahme fähig ist, heißt endlich.

Zusatz.

Wenn A; B; C; D - - - P wie immer ungleiche Zahlen sind, und man jede von ihnen nach (104. §. 1. Zus.) ohne Ende zunehmen läßt; so kann man sich nur eine Gränze der Zunahme für alle diese Zahlen denken: denn wenn man $B > A$ annimmt;

annimmt; so wird A so zunehmen können, daß es einmahl = B wird, daher wird man sich bey der allmählichen Zunahme der Zahl B zugleich die fortgesetzte Zunahme der Zahl A denken können, folglich wenn man sich eine Gränze vorstellt, welcher die allmählich zunehmende Zahl B sich nähern soll; so wird sich A eben derselben Gränze nähern müssen.

106. §. Willkührlicher Satz.

Wenn man sich einbildet, daß eine allmählich zunehmende Zahl M die Gränze ihrer Zunahme erreicht hat, sie daher unendlich groß geworden ist (105. §.); so bezeichnet man dieses mit (∞), indem man $M = \infty$ setzt: wenn aber vorausgesetzt wird, daß ein Stück $\frac{1}{M}x$ von einer Zahl oder Grösse x die Gränze seiner Abnahme erreicht hat, dasselbe demnach unendlich klein geworden ist (105. §.); so deutet man dieses durch $\left(\frac{1}{\infty}\right)$ an, indem man $\frac{1}{M} = \frac{1}{\infty}x = \frac{x}{\infty}$ schreibt.

1. Zusatz.

Wenn durch n bey $a \pm n$ was immer für eine endliche Zahl verstanden wird (105. §.), welche ungeändert bleibt, während daß a ohne Ende zunimmt (104. §. 1. Zus.); so nähert sich sowohl a als $a+n$ oder $a-n$ einerley Gränze $= \infty$ (105. §. Zus.): wenn man also die Voraussetzung machet, daß a die Gränze ∞ wirklich erreicht hat, folglich

$a = \infty$ geworden ist; so muß man zugleich annehmen, daß auch $a \pm n = \infty$ geworden ist, daher kann man sich bey dieser Voraussetzung nicht mehr oder weniger bey $a \pm n$, als bey a denken, und so muß man bey eben der Voraussetzung allemahl $a \pm n = a$ setzen.

2. Zusatz.

Es ist $a^{m+1} \pm a^m = a^m (a \pm 1)$: wenn also a allmählich wächst; so nimmt dabey auch $a^{m+1} \pm a^m = a^m (a \pm 1)$ allmählich zu: wird $a = \infty$ vorausgesetzt; so ist nun $a \pm 1 = a$, und $a^{m+1} \pm a^m = a^m . a = a^{m+1}$ (1. Zus.), eigentlich $\infty^{m+1} \pm \infty^m = \infty^{m+1}$. Hier drückt man sich gewöhnlich so aus: ∞, ∞^2, ∞^3 ... sind unendliche Grössen von verschiedenen Ordnungen, und das Unendliche ∞^m jeder Ordnung m verschwindet in Ansehung des Unendlichen ∞^{m+1} von der nächst höheren Ordnung.

3. Zusatz.

Es ist ferner $a \pm \frac{1}{M} x = \frac{Ma \pm x}{M}$: wenn M allmählich zunimmt (104. §. 1. Zus.), und mithin $\frac{1}{M} x$ abnimmt, a aber ungeändert bleibt; so nähert sich M der Gränze $M = \infty$, daher nähert sich $a \pm \frac{1}{M} x = \frac{Ma \pm x}{M}$ der Gränze $a \pm \frac{1}{\infty} x = \frac{\infty a \pm x}{\infty} = \frac{\infty a}{\infty}$ (1. Zus.) $= a$, das heißt gewöhnlich: das unendlich Kleine $\frac{1}{\infty} x$ verschwindet in Ansehung des Endlichen a (105. §.).

4. Zus

4. Zusatz.

Ferner ist $\frac{1}{M^r}x \pm \frac{1}{M^{r+1}}x = \frac{1}{M^r}\left(x \pm \frac{1}{M}x\right)$; wenn man also erstlich M allmählich zunehmen läßt (104. §. 1. Zus.), sodann die Voraussetzung machet, daß $M = \infty$ wird; so muß dafür $\frac{1}{M^r}x \pm \frac{1}{M^{r+1}}x = \frac{1}{M^r}\left(x \pm \frac{1}{M}x\right) = \frac{1}{M^r}x$, eigentlich $\frac{1}{\infty^r}x \pm \frac{1}{\infty^{r+1}}x = \frac{1}{\infty^r}\left(x \pm \frac{1}{\infty}x\right) = \frac{1}{\infty^r}x$ werden (3. Zus.), das heißt gewöhnlich: $\frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty^3}$ ... bedeuten unendliche Kleinen von verschiedenen Ordnungen, und jedes unendlich Kleines $\frac{1}{\infty^{r+1}}x$ von der Ordnung $r+1$ verschwindet in Ansehung des unendlich Kleinen $\frac{1}{\infty^r}x$ von der nächst niedrigern Ordnung r.

5. Zusatz.

Bey einer Rechnung mit bestimmten Zahlen kann man daher jeden Bruch von der Art $\frac{x}{\infty} = 0$, und jeden $\frac{x}{0} = \infty$, endlich $\frac{0}{x} = 0$ setzen. Daß $\frac{0}{x} = 0$ seyn muß, dieses erhellet aus dem Begriffe des Zählers. Wenn man ferner annimmt, daß der Nenner eines Bruches $\frac{x}{y}$ allmäh-

allmählich zunimmt; so nimmt auch der Werth des Bruches $\frac{x}{y}$ allmählich ab, vorausgesetzt, daß der Zähler x immer einerley bleibt; und wenn man die Voraussetzung $y = \infty$, daher $\frac{x}{y} = \frac{x}{\infty}$ machet; so bildet man sich ein, daß der Nenner gröſſer geworden ist, als jede wie immer groſſe angebliche Zahl ist (105. §.), daher bedeutet $\frac{x}{\infty}$ nun etwas von x, das kleiner seyn muß, als jedes wie immer kleines Stück von x: wäre bey einer Rechnung $A \pm \frac{x}{y}$ gewesen; so wäre bey der angenommenen Voraussetzung dieses $= A \pm \frac{x}{\infty} = A$ geworden (3. Zus.), welches soviel, als $A \pm 0$, daher nun $\frac{x}{\infty}$ so viel als die 0 gielt.

Wenn hingegen der Nenner y allmählig abnimmt; so kann daraus ein Stück $\frac{1}{M}y$ von y werden, und dann wird $\frac{x}{\frac{1}{M}y} = \frac{Mx}{y}$ aus $\frac{x}{y}$: der Werth von $\frac{x}{\frac{1}{M}y} = \frac{Mx}{y}$ wird immer gröſſer, wenn $\frac{1}{M}y$ kleiner ist: wenn $\frac{1}{M}y$ ohne Ende abnimmt (104. §. 2. Zus.); so wird der Werth von $\frac{x}{\frac{1}{M}y} = \frac{Mx}{y}$ ohne Ende zunehmen. Bey $\frac{x}{0}$ kann man

sich

sich also denken, daß der Nenner eines Bruches $\frac{x}{\frac{1}{M}y}$ ohne Ende, folglich über alle Gränzen abgenommen hat, und mithin der Werth des Bruches $\frac{x}{\frac{1}{M}y}$ alle mögliche Vermehrungen erhalten hat, folglich $= \infty$ geworden ist.

6. Zusatz.

Wenn a eine endliche Zahl, oder was immer für eine Grösse ist (105. §.); so muß auch jede bestimmte Potenz a^m von a, und jedes Product aus a^m in eine andere endliche Zahl b endlich seyn: und wenn a, b, c ... p lauter endliche Zahlen bedeuten, und die Anzahl derselben endlich ist; so muß auch ihre Summe $a+b+c...+p$ eine endliche Zahl geben.

107. §. Erklärung.

Man sagt, daß ein Werth α zwischen den Werthen a und b liegt, oder befindlich ist, wenn α grösser als der kleinere und kleiner als der grössere unter den Werthen a, b ist: für $a > b$ muß nämlich $\alpha < a$ und $\alpha > b$ seyn, wenn α zwischen a und b liegen soll: z. B. zwischen 8 und 20 liegen die ganzen Zahlen 9; 10; 11; 12 ... 19: zwischen — 5 und — 8 liegen die Zahlen — 6; — 7; zwischen 4 und — 3 liegen die Zahlen 3, 2, 1, — 1, — 2.

1. Zusatz.

Wenn A eine wie immer grosse bejahte Zahl bedeutet, auch $A = \infty$ ist (105. §.); so können zwischen A und ∞ nur

nur bejahte Zahlen liegen, und zwiſchen ∞ und o liegen gewiß alle mögliche bejahte Zahlen, die ſich immer angeben laſſen. Hingegen können zwiſchen einer verneinten Zahl —A und o nur verneinte Zahlen liegen, und zwiſchen —∞ und o liegen gewiß alle mögliche verneinte Zahlen, die ſich angeben laſſen.

2. Zuſatz.

Wenn zwo Zahlen A und B endlich ſind; ſo müſſen auch alle dazwiſchen liegende Zahlen endlich ſeyn: iſt A = B; ſo kann zwiſchen A und B keine Zahl liegen.

3. Zuſatz.

Es mag der Unterſchied zwoer endlichen Zahlen a und b wie immer klein ſeyn; ſo iſt doch allemahl möglich eine dritte Zahl c anzugeben, welche zwiſchen beyden liegen ſoll: denn wenn $a > b$ iſt, und man $c = \frac{1}{2}(a+b)$ machet; ſo iſt gewiß $c < a$ und $c > b$: oder wenn der Unterſchied $a - b = d$ iſt, und m eine gewiſſe ganze Zahl bedeutet; ſo kann man $c = b + \frac{1}{m}d$ machen, und dann iſt gewiß $c < a$ und $c > b$.

4. Zuſatz.

Wenn A und B mögliche Zahlen ſind; ſo können zwiſchen ihnen nur mögliche Zahlen liegen: denn wenn dazwiſchen eine unmögliche Zahl C läge, und $A > B$ wäre; ſo müßte $C < A$ und $C > B$ ſeyn, daher gäbe es eine Differenz zwiſchen A, B und C: ſetzte man $C - B = d$; ſo wäre

C—d

C — d = B: sagt man nun, es sey d eine unmögliche Zahl; so würde eine unmögliche Zahl d von einer unmöglichen C abgezogen eine mögliche B zum Rest geben, und wenn man d für eine mögliche Zahl hielte; so müßte diese von einer unmöglichen C abgezogen werden, und zum Rest eine mögliche Zahl B geben können, da doch beydes offenbar falsch ist.

108. §. Erklärungen.

Wenn β eine Wurzel der Gleichung $Z = 0$ ist; so heißen die Zahlen A und B die Gränzen derselben Wurzel, wenn β zwischen A und B liegt (107. §.), und zwischen β und den Zahlen A, B keine andere Wurzel der Gleichung $Z = 0$ befindlich ist. Man sagt auch, daß die Gränzen A, B der dazwischen liegenden Wurzel β desto näher kommen, je kleiner der Unterschied zwischen ihr und denselben Zahlen ist. Wenn man aber zwo Zahlen A, B angiebt, wozwischen alle Wurzeln einer Gleichung $Z = 0$ liegen (107. §.); heißen A und B die Gränzen der Wurzeln derselben Gleichung.

109. §. Erklärungen.

I) Es sey $Z = \frac{10x - x^2}{1+x}$ eine Function von x, und man setze in ihr erstlich 1, hernach 2, sodann 3 u. s. f. statt x, um zu sehen, was aus derselben Function für jeden neuen Werth von x wird.

Für $x = 1$; ist $Z = \frac{10-1}{1+1} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$.

Für $x = 2$; ist $Z = \frac{20-4}{1+2} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

Für $x = 3$; ist $Z = \frac{30-9}{1+3} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Die genommene Function Z von x erlanget daher für $x = 2$ einen gröſſeren Werth, als für $x = 1$, und für $x = 3$ erlanget sie einen kleineren Werth, als für $x = 2$: wenn man x in ihr anfangs sehr klein nähme, etwann $x = \frac{1}{1000\cdots0}$ setzte, und hernach x allmählich vermehrte, bis $x = 2$ würde, ja auch den Werth 2 immer mehr überstiege; so müßte Z für jeden neuen Werth von x auch einen neuen Werth erlangen, es wären auch die verschiedenen Werthe von Z anfangs allmählich gröſſer, gewiß so lange, bis $x = 2$ würde, hernach wären sie allmählich kleiner, gewiß alsdann, sobald $x = 3$, und nun auch gröſſer würde: man kann also sagen, daß es für x einen solchen Werth a zwischen 2 und 3 giebt (107. §.), den man als eine Gränze betrachten kann, wobey die allmähliche Zunahme der Function Z aufhört, so, daß nun Z abzunehmen anfängt, sobald x nur um etwas gröſſer, als a wird. Der Werth von Z, welchen diese Function für $x = a$ hat, heißt ein Gröſßtes von Z; er ist nämlich gröſſer, als jeder von denjenigen Werthen, welche Z erlangen würde, wenn x in ihr nur um etwas kleiner oder gröſſer als a wäre.

II) Sey

II) Sey eine andere Function $Z = \frac{10+x^2}{x}$; so ist

Für $x=1$; $Z = \frac{10+1}{1} = 11$.

Für $x=2$; $Z = \frac{10+4}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

Für $x=3$; $Z = \frac{10+9}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$.

Für $x=4$; $Z = \frac{10+16}{4} = \frac{26}{4} = 6\frac{1}{2}$.

Für $x=5$; $Z = \frac{10+25}{5} = \frac{35}{5} = 7$.

Diese Function von x ist demnach so beschaffen, daß, wenn man in ihr erstlich einen sehr kleinen Werth von x nimmt, etwann $x = \frac{1}{1000\ldots0}$ setzt, und hierauf x allmählich grösser werden läßt, bis $x=3$, und dann allmählich grösser wird, die Function Z immer einen kleineren Werth erlanget, je näher x dem Werthe $x=3$ kömmt, und hierauf Z allmählich grösser wird, wenn $x=4$ und noch grösser ist: zwischen 3 und 4 muß es demnach einen gewissen Werth $x=a$ geben, womit ein Kleinstes von Z zusammengehört, nämlich ein solcher Werth von Z, welcher kleiner ist, als jeder unter denjenigen Werthen, welche Z erlangen würde, wenn man in ihr x nur um etwas grösser oder kleiner als a machte.

Zusatz.

Wenn daher eine Function $Z=A$ für $x=a$, ferner $Z=B$ für $x=a+\omega$, und $Z=C$ für $x=a-\omega$; so

muß $A \geq B$ und zugleich $A \geq C$ seyn, wenn A ein Größtes (maximum) von Z ist. Hingegen muß $A \leq B$ und zugleich $A \leq C$ seyn, wenn A ein Kleinstes (minimum) von Z ist, und dieses zwar allemahl, man mag ω wie immer klein nehmen.

Anmerkung.

Wenn von verneinten Größten oder Kleinsten in der Folge die Rede seyn wird; so wird überall das Verneinte in der Bedeutung genommen werden, die es wirklich haben muß, wenn man die Zahlen als Mengen von Einheiten ohne Rücksicht auf ihre Zeichen (+; —) (4. §.) betrachtet: ein verneintes Größte von Z (maximum negativum), welches für einen gewissen Werth a von x herauskommen soll, wird also eine verneinte Zahl seyn, nämlich ein verneinter Werth von Z, welcher vor und nach sich kleinere verneinte Werthe von Z hat, die herauskommen würden, wenn x in Z nur um etwas grösser oder kleiner, als a wäre. Wenn z. B. die Function Z für $x=a$ den Werth -8 hat, und für andere Werthe von x, die um etwas grösser oder kleiner, als a sind, dieselbe die Werthe -7; -6; -5; -4 ... erlanget; so ist jeder dieser Werthe eine kleinere Menge verneinter Einheiten, als -8 (4. §.), und eben deswegen ist -8 ein verneintes Größte von Z, ob es gleich in der Bedeutung (7. §. Anm. I. n. 6.) ein Kleinstes heißen könnte, wenn man sich dieses Ausdruckes ohne Beysatze bejaht oder verneint bedienen wollte.

110. §. Aufgabe.

Man ſoll die Werthe Y, X angeben, welche eine Function $Z = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Px^{m-r+2} + Qx^{m-r+1} + Rx^{m-r} + \ldots + Tx + U$ für $x = a + \omega$ und $x = a - \omega$ erlangen würde.

Auflöſung. 1) Man nenne F denjenigen Werth, welchen die Function Z für $x = a$ hätte; ſo iſt:

$F = a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + Ca^{m-3} + \ldots + Ra^{m-r} + \ldots + Ta + U.$

2) Hierauf ſetze man $a + \omega$ ſtatt x in Z, daher $(a+\omega)^m$; $(a+\omega)^{m-1}$; $(a+\omega)^{m-2}$ ..... ſtatt x^m; x^{m-1}; x^{m-2} ....; ſo iſt nach (76. §. 4. Zuſ. n. 3.).

$$\left.\begin{array}{l}
\text{I)}\ a^m + ma^{m-1}\omega + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}\omega^2 \\
\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}\omega^3 + \ldots \\
\text{II)} + Aa^{m-1} + (m-1)Aa^{m-2}\omega + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}Aa^{m-3}\omega^2 \\
\quad + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}Aa^{m-4}\omega^3 + \ldots \\
\text{III)} + Ba^{m-2} + (m-2)Ba^{m-3}\omega + \frac{(m-2)(m-3)}{1\cdot 2}Ba^{m-4}\omega^2 \\
\quad + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3}Ba^{m-5}\omega^3 + \ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{IV)} + Ra^{m-r} + (m-r)Ra^{m-r-1}\omega + \frac{(m-r)(m-r-1)}{1\cdot 2}Ra^{m-r-2}\omega^2 \\
\quad + \frac{(m-r)(m-r-1)(m-r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}Ra^{m-r-3}\omega^3 \ldots \\
\text{V)} + Ta + T\omega \\
\quad + U.
\end{array}\right\} = Y$$

Es entstehet nämlich I) aus dem ersten Gliede $x^m=(a+\omega)^m$, II) aus dem zweyten $Ax^{m-1}=A(a+\omega)^{m-1}$ u. s. f.

3) Wenn man nun erwäget, daß die erste verticale Reihe von a^m bis U die Function F aus (n. 1.) enthält, die zweyte aber in allen ihren Gliedern ω, die dritte ω^2, die vierte ω^3 u. s. f. jede folgende verticale Reihe eine um einen Grad höhere Potenz von ω hat, bis zur Potenz ω^m, welche in der letzten verticalen Reihe allein, als das letzte Glied der horizontalen Reihe I) vorkommen würde, indem m eine bejahte ganze Zahl seyn soll (76. §. 9. Zus.); so kann man mit L, L^2, L^3, L^4 ... die Coefficienten bezeichnen, mit welchen die Potenzen von ω in (n. 2.) multiplicirt sind, und den verlangten Werth Y von Z für $x=a+\omega$ folgendergestalt ausdrücken.

$$Y=F+L\omega+L^2\omega^2+L^3\omega^3+L^4\omega^4+\ldots+L^{m-1}\omega^{m-1}+\omega^m.$$

Nämlich F drückt die ganze erste verticale Reihe (n. 2.) aus; $L\omega$ aber drückt die zweyte verticale Reihe aus, so, daß L die Summe $ma^{m-1}+(m-1)Aa^{m-2}+\ldots$ bedeutet, mit welcher ω bey derselben Reihe multiplicirt ist, u. s. f.

4) Hätte man $x=a-\omega$ in Z genommen; so würde man aus Z eine Function X erhalten haben, welche von Y in (n. 3.) nur in dem unterschieden gewesen wäre, daß diejenigen Glieder, worinn gerade Potenzen von ω sich befunden hätten, bejaht, und die, welche ungerade Potenzen

von

von ω enthielten, verneint hätten seyn müssen (70. §. 1. 2. Zus.): also kann man auch den Werth X von Z für $x = a - \omega$ nach (n. 3.) so angeben.

$$X = F - L\omega + L^2\omega^2 - L^3\omega^3 + L^4\omega^4 - L^5\omega^5 + \cdots \pm L^{m-1}\omega^{m-1} \mp \omega^m.$$

5) Setzt man aber

$$S = L^2 + L^3\omega + L^4\omega^2 + \cdots + L^{m-1}\omega^{m-3} + \omega^{m-2},$$

und $s = L^2 - L^3\omega + L^4\omega^2 - \cdots \pm L^{m-1}\omega^{m-3} \mp \omega^{m-2}$;

so hat man aus n. 3. und n. 4.

$$Y = F + L\omega + S\omega^2; \quad X = F - L\omega + s\omega^2$$

Zusatz.

Wenn man annimmt, daß der Werth F von Z für $x = a$ ein Größtes oder Kleinstes von Z ist (109. §.); so hat man im ersten Fall $F > Y$ und zugleich $F > X$, im zweyten Falle aber ist $F < Y$ und zugleich $F < X$ (109. §. Zus.): also ist

im ersten Fall $F > F + L\omega + S\omega^2$,
und zugleich $F > F - L\omega + s\omega^2$,
im zweyten Fall $F < F + L\omega + S\omega^2$,
und zugleich $F < F - L\omega + s\omega^2$.

Es muß auch dieses allemahl gelten, man mag ω wie immer klein nehmen (109. §. Zus.), folglich muß dieses auch alsdann gelten, wenn man für ω einen so kleinen Bruch $\frac{1}{1000\cdots0}$ nimmt, daß die höheren Potenzen von ω in Ansehung ω verschwinden: wenn also Z für $x = a$ ein Größtes, oder Kleinstes F erlanget; so ist im ersten Fall $F > F + L\omega$ und zugleich $F > F - L\omega$, im zweyten

Fall aber ist $F < F + L\omega$ und zugleich $F < F - L\omega$; folglich ist in jedem Fall $L\omega = o$, daher auch $L = o$, indem $F > F + L\omega$, und zugleich $F > F - L\omega$, oder $F < F + L\omega$ und zugleich $F < F - L\omega$ ungereimt ist, wenn man $L\omega$ nicht $= o$, sondern einem gewissen Werthe gleich setzt.

Anmerkung des Herausgebers.

Dieser Satz verdient in der That eine nähere Erörterung, die ich auch aus andern Ursachen beybringen will, weil sie nämlich geschickt ist, gewisse Sätze zu berichtigen, die erst folgen werden.

I) Man kann bey der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe ω allemahl so klein nehmen, daß sowohl $S\omega^2$ als $s\omega^2$ (daselbst n. 5.) kleiner als $L\omega$ wird. Denn es mag daselbst a was immer für eine bestimmte Zahl seyn; so ist doch noch allemahl eine andere $\alpha > a$ möglich, daher kann man allemahl $\omega = \frac{a}{\alpha}$ machen, in welchem Fall alle Potenzen $\omega, \omega^2, \omega^3 \ldots$ lauter ächte Brüche $\frac{a^2}{\alpha^2}, \frac{a^3}{\alpha^3} \ldots$, und zwar, dem Werthe nach, desto kleiner seyn müssen, je höhere Potenzen von $\omega = \frac{a}{\alpha}$ sie sind (10. §. 13. Zus.): wenn man also den größten unter den bey der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe (n. 3.) vorkommenden Coefficienten $L^2, L^3 \ldots L^{m-1}$ mit L^r bezeichnet, weil die Anzahl derselben $m - 2$ ist; so ist gewiß $(m - 2) L^r > S$,

und

und $(m-2)L^r \geq s$ allemahl, wofern nur ω ein ächter Bruch $= \frac{a}{x}$ ist, folglich kann ω allemahl so genommen werden, daß auch

$\omega^2(m-2)L^r \geq \omega^2 S$; $\omega^2(m-2)L^r \geq \omega^2 s$ wird.

Es mag aber $\frac{L}{(m-2)L^r}$ ein ächter oder unächter Bruch seyn; so ist doch allemahl möglich, für ω einen ächten Bruch anzugeben, daß

$$\omega < \frac{L}{(m-2)L^r}, \text{ folglich } \omega^2 < \frac{L\omega}{(m-2)L^r},$$

also auch $\omega^2(m-2)L^r < L\omega$ wird.

Man kann demnach ω um desto mehr so nehmen, daß dafür

$$\omega^2 S < L\omega \text{ und } \omega^2 s < L\omega \text{ wird.}$$

II) Und nun kann man den Satz (vor. Zus.) am bündigsten darthun: man kann nämlich die daselbst vorhandenen Bedingungen auch so ausdrücken, wenn man F auf jeder Seite des Zeichens ($>$ oder $<$) wegläßt.

A) $0 > L\omega + S\omega^2$ und zugleich $0 > -L\omega + s\omega^2$;

oder

B) $0 < L\omega + S\omega^2$ und zugleich $0 < -L\omega + s\omega^2$.

Da also diese Bedingungen, wie oben (Zus.) allemahl Statt haben sollen; man mag ω wie immer klein nehmen, und es möglich ist ω so zu nehmen, daß dafür $L\omega > S\omega^2$ und $L\omega > s\omega^2$ wird; so müssen die Bedingungen A) B) auch bey dieser Voraussetzung richtig seyn, daher kann $L\omega$

weder etwas bejahtes, noch etwas verneintes seyn. Denn wäre $L\omega$ etwas bejahtes; so müßte auch $L\omega+S\omega^2$ in A) etwas bejahtes seyn, es mag $S\omega^2$ bejaht oder verneint seyn, indem $L\omega > S\omega^2$ seyn soll, daher wäre bey A) die o gröſſer als etwas bejahtes $L\omega+S\omega^2$: hingegen müßte $-L\omega$ etwas verneintes, daher auch $-L\omega+s\omega^2$ etwas verneintes seyn, indem $L\omega > s\omega^2$ seyn soll, und dieſes Verneinte kann man $-p$ nennen, daß nun bey B) $o < -p$, folglich $p < -p+p$ oder $p < o$ sey, welches ungereimt wäre. Nimmt man aber an, daß $L\omega$ etwas verneintes iſt; so muß $-L\omega$ etwas bejahtes seyn: alſo muß bey A) $-L\omega+s\omega^2$ auch etwas bejahtes, hingegen bey B) $L\omega+S\omega^2$ etwas verneintes seyn, folglich muß in jenem Fall die o gröſſer als ein bejahter Werth, und in dieſem Fall muß die o kleiner als ein verneinter Werth $-p$, daher $o < -p$, und $p < -p+p$, oder $p < o$ seyn, welches wiederum ungereimt wäre. Die Bedingungen A) oder B) können demnach nicht beſtehen, wenn man durch $L\omega$ etwas bejahtes oder verneintes verſtehet.

Was aber weder bejaht noch verneint seyn kann, muß $= o$ seyn: alſo iſt $L\omega = o$, daher auch $L = o$, weil man hier gewiß nicht $L\omega = \infty$ ſetzen darf.

III) Wenn man $F = o$ ſetzt; ſo heißt dieſes bey der gegebenen Auflöſung (n. 1.) der vorhergehenden Aufgabe, daß die Function $Z = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + U$ für $x = a$ gleich Null wird, daß daher a eine Wurzel der Gleichung

Gleichung $Z=o$ ist (94.§.): in diesem Fall ist daher bey eben der Auflösung (n. 5.)

$$Y=L\omega+S\omega^2 \text{ und } X=-L\omega+s\omega^2.$$

Machet man nun die Voraussetzung, daß hier Y für jeden wie immer kleinen Werth von ω etwas bejahtes ist; so wird X etwas verneintes seyn müssen: und wenn Y dafür allemahl verneint bleibt; so muß X allemahl bejaht seyn. Denn dieses müßte daher auch bey der Voraussetzung I) gelten: ist nun Y etwas bejahtes; so ist es auch $L\omega$ wegen $L\omega > S\omega^2$, folglich ist $-L\omega$ etwas verneintes, und nun ist es auch $-L\omega+s\omega^2=X$, wegen $L\omega > s\omega^2$: wenn aber Y etwas verneintes ist; so muß es auch $L\omega$ seyn, indem $L\omega > S\omega^2$ seyn soll, daher ist $-L\omega$ etwas bejahtes, und nun ist auch $-L\omega+s\omega^2=X$ etwas bejahtes.

IV) Hieraus folgt, daß, wenn a eine Wurzel der Gleichung $Z=o$ ist, und man eine sehr kleine Zahl ω nimmt, hierauf $a+\omega$ und sodann $a-\omega$ statt x in Z setzt, die Werthe, welche dafür Z erlangen muß, nicht beyde bejaht, oder beyde verneint seyn können, es muß vielmehr allemahl der eine bejaht, und der andere verneint seyn.

III. §. Lehrsatz.

Wenn die Function Z bey einer Gleichung $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+U=o$ für $x=\alpha$ einen bejahten, und für $x=\beta$ einen verneinten Werth erlanget; so muß zwischen α und β wenigstens eine Wurzel der Gleichung $Z=o$ liegen.

Beweis. Es sey $Z = M$ für $x = \alpha$, und $Z = -N$ für $x = \beta$. Man nehme an, daß $\alpha > \beta$ ist (die Schlüsse bleiben einerley, wenn $\alpha < \beta$ ist); so kann man sich zwischen α und β unzählige Werthe von x einbilden, welche immer kleiner als α, und noch allemahl grösser als β sind, (107. §. 3. Zus.): wenn man sich nun vorstellt, daß erstlich α statt x in Z genommen wird, wobey $Z = M$ seyn soll, hernach aber die zwischen α und β möglichen Werthe von x, einer nach dem andern, statt x in Z genommen werden, bis $x = \beta$, daher $Z = -N$ wird; so muß Z für jeden solchen Werth von x einen bestimmten Werth erlangen: weil aber unter allen bestimmten Werthen von Z, welche diese Function für $x = \alpha$, $x = \beta$ und die zwischen α und β noch möglichen Werthe von x erlangen muß, der erste Werth M gewiß bejaht, und der letzte $-N$ verneint seyn soll; so muß es zwischen α und β gewiß zwo Werthe a und b geben, bey welchen der Uebergang eines bejahten Werthes P von Z in einen verneinten $-Q$ geschieht, so, daß zwischen a und b kein Werth von x liegt, womit ein bejahter oder verneinter Werth von Z zusammenhienge. Man kann nicht sagen, es sey $a = b$, weil sonst Z für $x = a$ eben den Werth erlangen müßte, welcher für $x = b$ von Z erlangt wird, und so wäre $P = -Q$, folglich $P + Q = -Q + Q$ oder $P + Q = 0$, welches ungereimt ist: es mögen also a und b so wenig man immer will von einander unterschieden seyn; so muß doch ein Unterschied d zwischen a und b vorkommen, und so muß auch ein neuer Werth y von x zwischen

schen a und b möglich seyn (107. §. 3. Zus.), für welchen Z einen Werth z erlangen würde, der entweder bejaht, oder verneint, oder gleich Null seyn müßte. Nun aber kann z weder bejaht noch verneint seyn, indem zwischen a und b kein Werth y von x liegen soll, für welchen Z einen bejahten oder verneinten Werth erlangen könnte: also ist $Z=z=0$ für $x=y$, folglich ist der zwischen a und b noch liegende Werth y von x eine Wurzel der Gleichung $Z=0$ (94. §.).

1. Zusatz.

Wenn zwo mögliche Zahlen α und β von der Beschaffenheit sind, daß eine Function Z von x, für $x=\alpha$ einen bejahten, und für $x=\beta$ einen verneinten Werth erlanget; so muß es für die Gleichung $Z=0$ wenigstens eine mögliche Wurzel geben, die nämlich zwischen α und β liegen soll (107. §.).

2. Zusatz.

Wenn a und b zwo mögliche Wurzeln einer Gleichung $Z=0$ sind, und zwischen ihnen keine dritte Wurzel derselben Gleichung liegen soll; so muß die Function Z für jeden zwischen a und b liegenden Werth von x entweder bejaht, oder für jeden verneint seyn: denn gäbe es zwischen a und b solche Werthe von x, womit bejahte und verneinte Werthe von Z zusammenhiengen; so würde dazwischen noch wenigstens eine Wurzel von $Z=0$ befindlich seyn müssen, (Lehrs.).

Anmer-

Anmerkung des Herausgebers.

Eine Erläuterung des angeführten Beweises des Lehrsatzes, daher auch des 1ten Zusatzes kann so geschehen.

Wenn man $\alpha > \beta$ annimmt, und sich zwischen α und β noch unzählige andere Zahlen a, b, c d - - - p, q, r - - - t, u vorstellt, daß $\alpha > a$, $a > b$, $b > c$, u. s. f. bis $u > \beta$ ist; so kann man allemahl machen, daß die Differenz zweyer nächsten Zahlen sehr klein ist. Man bilde sich nun ein, daß von α an, jede derselben Zahlen statt x in Z genommen wird; so wird man auf zwo Zahlen p, q kommen müssen, welche um eine sehr kleine Zahl z von einander unterschieden, und so beschaffen sind, daß Z für $x = p$ einen bejahten Werth Y, und für $x = q$ einen verneinten erlanget, den man gleichfalls X nennen kann: nun sey der Unterschied derselben Zahlen wie immer klein; so ist doch noch allemahl möglich, eine Zahl y zwischen p und q zu nehmen (107. §. 3. Zus.), daß $p > y$, $y > q$ ist. Man setze $p = y + \omega$ und $q = y - \omega$; so ist der bejahte Werth von Z für $x = p$ in I), der verneinte aber für $x = q$ in II), und der Werth, welchen Z für $x = y$ haben muß, ist in III) nach (110. §.) mit F bezeichnet.

I) $Y = F + L\omega + S\omega^2$; II) $X = F - L\omega + s\omega^2$; III) F.

oder $Y = F + (L + S\omega)\omega$; $X = F + (s\omega - L)\omega$.

Da nun zwischen α und β so viele Zahlen a, b, c - - - p, q, r - - - t, u eingeschaltet werden können, daß der Unterschied der Zahlen p, q von einander, daher auch der Unterschied ω der dazwischen liegenden Zahl y von p

und

und q kleiner als jede wie immer kleine Zahl werden mag; so wird auch $L > S\omega$ und $L > s\omega$ werden (110. §. Anm. 1.), und nun $L+S\omega$ etwas bejahtes φ seyn, wenn $s\omega - L$ etwas verneintes $-\mu$ ist, und $L+S\omega$ etwas verneintes $-\varphi$ seyn, wenn $s\omega - L$ etwas bejahtes μ ist: da also Y etwas bejahtes und X etwas verneintes seyn soll; so muß im ersten Fall $F < \mu\omega$, und im zweyten $F < \varphi\omega$ werden. Es muß daher F von der Null unmerklich unterschieden seyn, wenn ω auf die erwähnte Art klein ist, und so erhellet, wie man sich einer zwischen α und β liegenden Zahl y nähern kann, welche $= x$ in Z gesetzt, die Function $Z = F = 0$ machen würde, welche demnach eine Wurzel der Gleichung $Z = 0$ ist. (94. §.).

112. §. Lehrsatz.

Wenn zwo mögliche Zahlen α und β von der Beschaffenheit sind, daß eine Function Z von x für $x = \alpha$ einen bejahten, und für $x = \beta$ einen verneinten, oder für $x = \alpha$ einen verneinten und für $x = \beta$ einen bejahten Werth erlanget, und einige Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ zwischen α und β wirklich liegen; so muß die Zahl dieser Wurzeln ungerad seyn: wenn aber Z für beyde Werthe α und β von x entweder bejaht oder verneint wird; so muß die Anzahl der zwischen α und β liegenden Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ allemahl gerad seyn.

Beweis. 1) Wenn ich sage, daß $+Z$ für einen gewissen Werth von x, und $-Z$ für einen andern Werth

von

von x wird; so soll dieses bedeuten, daß im ersten Fall die Function Z für einen gewissen Werth von x einen bejahten, und im zweyten Fall für einen andern Werth von x einen verneinten Werth erlanget.

2) Die zwischen α und β vielleicht liegenden Wurzeln der Gleichung $Z=0$ seyen a, b, c, d, e, f, g - - - p, q, r, so geordnet, daß der Grösse nach a auf α, b auf a, c auf b, d auf c - - - - q auf p, r auf q, β auf r unmittelbar folgt.

3) Wenn nun $+Z$ für $x=\alpha$ wird (n. 1.); so muß $+Z$ auch für jeden Werth von x zwischen α und a bleiben, sonst würde es eine Wurzel für $Z=0$ zwischen α und a geben (111. §.), wider (n. 2.): also muß $-Z$ für jeden Werth von x, zwischen der ersten a und zweyten Wurzel b werden (110. §. Anm. IV. und 111. §. 2. Zus.); folglich muß $+Z$ für jeden Werth von x zwischen der zweyten b und dritten Wurzel c Statt finden (a. a. O.); daher muß $-Z$ für jeden Werth von x zwischen der dritten c und vierten Wurzel d werden (a. a. O.), demnach muß $+Z$ für jeden Werth von x zwischen der vierten d und fünften Wurzel e gelten (a. a. O.), u. s. f. muß die Function Z, welche für $x=\alpha$ bejaht werden soll, auch für jeden Werth von x, der sich zwischen was immer für einer 2nten und $(2n+1)$ten Wurzel in (n. 2.) befinden mag, bejaht seyn.

4) Wenn aber $-Z$ für $x=\alpha$ wird; so bleibt $-Z$ auch für jeden Werth von x zwischen α und a, indem sonst eine Wurzel der Gleichung $Z=0$ zwischen α und a liegen

müßte

müßte (111. §.): also wird +Z für jeden Werth von x zwischen der ersten a und zweyten Wurzel b seyn müssen (110. §. Anm. IV. und 111. §. 2. Zus.); daher muß —Z für jeden Werth von x zwischen der zweyten b und der dritten Wurzel c werden (a. a. O.); folglich gielt +Z für jeden Werth von x zwischen der dritten c und vierten Wurzel d (a. a. O.), u. s. f. muß die Function Z, wenn sie für $x=\alpha$ einen verneinten Werth erlanget, auch für jeden Werth von x, welcher zwischen was immer für einer 2nten und (2n+1)ten Wurzel in (n. 2.) liegen mag, verneint seyn.

5) Wird also +Z für $x=\alpha$ und —Z für $x=\beta$; so muß die Zahl der Wurzeln in (n. 2.) ungerad seyn: denn wenn man annimmt, es sey dieselbe eine gerade Zahl, so kann man annehmen, daß in (n. 2.) von a an bis p, 2n an der Zahl Wurzeln vorhanden sind, daher in allen 2n+2 da sind. Nun aber muß +Z für jeden Werth von x zwischen der 2nten p und (2n+1)ten Wurzel q werden (n. 3.), folglich wird —Z für x zwischen q und r (110. §. Anm. IV. und 111. §. 2. Zus.) daher +Z Statt haben, sobald x zwischen r und β fällt (110. §. Anm. IV.): also muß es noch eine Wurzel der Gleichung $Z=0$ zwischen r und β geben (111. §), folglich ist die Zahl aller zwischen α und β liegenden Wurzeln nicht 2n+2, sondern 2n+2+1=2n+3, daher ungerad.

6) Wird hingegen +Z sowohl für $x=\alpha$ als für $x=\beta$; so muß die Anzahl der zwischen α und β vielleicht liegenden Wurzeln gerad seyn: denn wäre sie ungerad; so

könnte

könnte man annehmen, es seyen 2n Wurzeln in (n. 2.) von α an bis q, daher in allen 2n+1 vorhanden. Nun aber müßte +Z für jeden Werth von x zwischen q und r in (n. 2.) wegen (n. 3.) gelten, daher −Z werden, sobald x zwischen r und β fiele (110. §. Anm. IV.): da also +Z für x=β werden soll; so muß nothwendig noch eine Wurzel zwischen r und β liegen (111. §.), und so ist die Zahl aller zwischen α und β liegenden Wurzeln nicht 2n+1 sondern 2n+1+1=2n+2, daher gerad.

Dieses erhellet auf gleiche Art für den Fall, wenn −Z sowohl für x=α als für x=β werden soll: denn nun müßte −Z auch für jeden zwischen der 2nten q und (2n+1)ten Wurzel r liegenden Werth von x Statt haben, (n. 4.), daher müßte +Z werden, sobald x einen Werth zwischen r und β erlangte (110. §. Anm. IV.), und nun gäbe es gewiß noch eine Wurzel zwischen r und β, indem −Z für x=β werden soll (111. §.): also folgt nach der (2n+1)ten Wurzel r noch eine, so, daß daher die Anzahl aller Wurzeln nicht 2n+1 sondern 2n+2 ist.

1. Zusatz.

Wenn der Exponent m der Ordnung, zu welcher eine Gleichung $Z=x^m\pm Ax^{m-1}\pm Bx^{m-2}\pm Cx^{m-3}\pm\ldots\pm Px\pm Q=0$ gehört, eine gerade Zahl ist, und die Gleichung mögliche bejahte oder verneinte Wurzeln haben soll; so ist die Anzahl aller bejahten und verneinten Wurzeln derselben Gleichung allemahl gerad.

Denn

Denn es wird $Z = +Q$ für $x = 0$, wenn das letzte Glied der Gleichung bejaht ist: es wird ferner $Z = (\pm\infty)^m \pm A(\pm\infty)^{m-1} \pm B(\pm\infty)^{m-2} \pm \ldots$ $\pm Q = (\pm\infty)^m$ nach (106. §. 2. Zuf.) $= +\infty^m$, weil m eine gerade Zahl ist (70. §. 1. Zuf.). Die Function Z erlanget daher allemahl einen bejahten Werth, man mag in ihr $x = 0$, oder $x = +\infty$, oder $x = -\infty$ machen: da alſo alle mögliche bejahte Zahlen zwiſchen 0 und $+\infty$, und alle mögliche verneinte zwiſchen 0 und $-\infty$ liegen (107. §. 1. Zuf.); ſo müſſen alle mögliche bejahte Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ gleichfalls zwiſchen 0 und $+\infty$, und alle mögliche verneinte zwiſchen 0 und $-\infty$ liegen, ſo zwar, daß ſowohl die Anzahl der bejahten als der verneinten, daher auch die Anzahl aller Wurzeln gerad iſt (Lehrſ.), und (41. §. 6. Zuf.).

Wenn aber das letzte Glied der Gleichung verneint iſt $= -Q$; ſo erlangt zwar die Function Z, ſowohl für $x = +\infty$ als für $x = -\infty$, wie zuvor, einen bejahten Werth $+\infty^m$, aber für $x = 0$ erlangt ſie nun einen verneinten Werth $Z = -Q$: da alſo alle mögliche bejahte Wurzeln derſelben Gleichung, wenn ſie einige hat, zwiſchen 0 und $+\infty$, und alle verneinte zwiſchen 0 und $-\infty$ liegen müſſen (107. §. 1. Zuf.); ſo iſt nun die Anzahl ihrer bejahten Wurzeln ungerad, ſo wie auch die Anzahl ihrer verneinten Wurzeln (Lehrſ.), daher muß die Anzahl aller bejahten und verneinten Wurzeln zuſammen gerad ſeyn. (41. §. 6. Zuf.).

2. Zuſatz.

Wenn aber der Exponent m der Ordnung einer Gleichung $Z = x^m \pm Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \pm \cdots \pm Px \pm Q = 0$ ungerad iſt; ſo muß die Anzahl aller möglichen Wurzeln, die ſie vielleicht hat, ungerad ſeyn.

Denn für $x = \pm\infty$ iſt $Z = (\pm\infty)^m \pm A(\pm\infty)^{m-1} \pm B(\pm\infty)^{m-2} \pm \cdots \pm P(\pm\infty) \pm Q = (\pm\infty)^m$, (106. §. 2. Zuſ.), folglich iſt, wegen des ungeraden Exponenten m, die Function $Z = +\infty^m$ für $x = +\infty$, und $Z = -\infty^m$, für $x = -\infty$ (70. §. 2. Zuſ.): iſt aber das letzte Glied der Gleichung bejaht $= +Q$, folglich $Z = +Q$ für $x = 0$; ſo erlanget Z ſowohl für $x = +\infty$ als für $x = 0$ einen bejahten Werth, aber für $x = -\infty$ erlanget ſie einen verneinten Werth; die Anzahl der Wurzeln von $Z = 0$, welche vielleicht zwiſchen 0 und $+\infty$ liegen, und dieſe müßten gewiß alle bejahte mögliche Wurzeln ſeyn (107. §. 1. Zuſ.), iſt daher gerad, und die Anzahl der Wurzeln, welche zwiſchen 0 und $-\infty$ ſich befinden mögen, und dieſes wären gewiß alle verneinte mögliche Wurzeln von $Z = 0$ (107. §. 1. Zuſ.), muß ungerad ſeyn (Lehrſ.): die Anzahl aller bejahten und verneinten Wurzeln, welche die Gleichung $Z = 0$ haben mag, muß demnach ungerad ſeyn (41. §. 6. Zuſ.).

Iſt aber das letzte Glied der Gleichung verneint $= -Q$; ſo erlanget die Function Z für $x = 0$ einen verneinten Werth $Z = -Q$: weil ſie alſo überdem für $x = +\infty$ einen bejahten Werth $= +\infty^m$ und für $x = -\infty$ einen

verein-

verneinten $= -\infty^m$ erlanget; so muß die Anzahl aller bejahten möglichen Wurzeln der Gleichung $Z=0$, welche zwischen 0 und $+\infty$ liegen mögen, ungerad, und die Anzahl ihrer verneinten zwischen 0 und $-\infty$ liegenden Wurzeln gerad seyn (Lehrs.); folglich ist die Anzahl aller bejahten und verneinten Wurzeln ungerad (41. §. 6. Zus.).

3. Zusatz.

Bey jeder Gleichung $Z=0$, welche lauter mögliche Wurzeln hat, muß also das letzte Glied allemahl bejaht seyn, wenn die Zahl der bejahten Wurzeln gerad seyn soll, und allemahl verneint muß dasselbe seyn, wenn die Zahl der bejahten Wurzeln ungerad seyn soll (1. 2. Zus.), welches schon aus (98. §. 4. Zus.) genugsam erhellet.

113. §. Lehrsatz.

Aus jeder Gleichung $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+Sx^2+Tx+U=0$ von der Ordnung m kann man durch die Multiplication der Glieder von der Function Z mit den zugehörigen Exponenten von x allemahl eine Gleichung, wie die nachstehende $L=0$ ist, von der um einen Grad niedrigern Ordnung $m-1$ erhalten, welche jeden Werth von x zu einer ihrer Wurzeln hat, mit welchem ein Größtes oder Kleinstes von Z zusammenhängt (109. §.).

$$L=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots+2Sx+T=0.$$

Beweis. 1) Wenn man bey der Function Z nicht $a+\omega$ und $a-\omega$, wie es in (110. §.) geschehen ist, sondern $x+\omega$ und $x-\omega$ statt x setzt; so wird man die Werthe Y und X, wie (110. §.), finden, mit dem Unterschiede nur, daß nun x statt a überall vorkommen muß: es wird nämlich nach dem 110. §. seyn

$$Y=F+L\omega+S\omega^2;\quad X=F-L\omega+s\omega^2.$$

Und es erhellet aus (110. §.), daß nun L den folgenden Werth haben muß.

$$L=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots+T.$$

2) Sobald man aber annähme, daß x in Z einen solchen Werth hat, z. B. $x=a$ ist, mit welchem ein Größtes oder Kleinstes von Z zusammenhängt; sogleich müßte man auch $L=0$ setzen (110. §. Zus.), wobey daher wäre

$$L=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots+T=0.$$

Eben der Werth a von x, welches ein Größtes oder Kleinstes von Z giebt, macht also auch, daß $L=0$ wird, wenn man ihn statt x in L nimmt, und so ist er eine Wurzel der Gleichung $L=0$ (94. §.).

1. Zusatz.

Man kann $Z=0$ eine Hauptgleichung, und $L=0$ ihre Exponentialgleichung nennen (*). Da nun jede Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m auch m Wurzeln haben muß (96. §.), und die Function Z allemahl gleich Null wird, wenn man in ihr eine Wurzel statt x nimmt (94. §.); so muß es zwischen zwoen jeden möglichen und

ihrer

Herr Gröſſe nach nächſten Wurzeln derſelben Gleichung einen möglichen Werth von x geben, womit ein Größtes oder Kleinſtes von Z (109. §.) zuſammenhängt, welcher daher eine mögliche Wurzel der Exponentialgleichung L = o iſt, folglich, wenn alle m Wurzeln der Hauptgleichung Z = a möglich ſind, giebt es m — 1 mögliche Werthe von x, mit derer jedem ein Größtes oder Kleinſtes von Z zuſammenhängt, und welche demnach die m — 1 Wurzeln der Exponentialgleichung L = o ſind, die ſie wirklich haben muß (96. §.).

(*) Anmerkung des Herausgebers.

Weil nämlich L = o durch die Multiplication der Glieder von Z mit den zugehörigen Exponenten von x entſtehen ſoll; ſo konnte ich keine ſchicklichere Benennung für die Gleichung L = o einführen, welche allerdings nöthig war, um alles kurz und deutlich auszuführen: der Hr. Verfaſſer nennt ſie aequationem derivatam; ich will aber auch diejenigen Gleichungen, welche bey ihm aequationes ſecundo derivatae, aequationes tertio derivatae etc. heißen, die zweyten, dritten u. ſ. f. Exponentialgleichungen in der Folge nennen. Nun will ich noch hier kurz zeigen, wie der im vorigen Zuſatze angeführte Satz, daß es bey jeder Gleichung Z = o von der Ordnung m, wenn alle ihre Wurzeln möglich ſind, m — 1 mögliche Werthe von x geben muß, mit derer jedem ein Größtes oder Kleinſtes von Z zuſammenhängt, aus der vorhergehenden Theorie folget.

I) Es seyen p, q zwo mögliche Wurzeln der Gleichung $Z=0$, wozwischen keine andere Wurzel derselben Gleichung liegt, und man nehme an, daß $p > q$ ist. Es giebt nun unzählige Werthe von x, welche zwischen p und q liegen (107. §. 3. Zus.), und für jeden solchen Werth würde Z entweder bejaht, oder für jeden verneint werden (111. §. 2. Zus.): wenn man also erstlich $x=q$ machet; wofür $Z=0$ werden muß (94. §.), hierauf eine sehr kleine Zahl ω nimmt, und $q+\omega$ in Z setzt; so wird Z dafür entweder einen bejahten Werth $+A$ oder einen verneinten $-A$ haben: läßt man ferner ω allmählich zunehmen, bis ω so groß wird, daß $x=q+\omega$ in Z der andern Wurzel p gleich ist; so wird auch Z für jeden grösseren Werth $x=q+\omega$ zwischen p und q einen neuen bejahten $+A$ oder verneinten $-A$ Werth haben, bis Z für $x=q+\omega=p$ gleich Null wird (94. §.): so wie also der Werth $q+\omega$ von x in Z von dem Werthe q an allmählich zunimmt, bis $x=p$ wird, eben so muß auch der bejahte Werth $+A$ oder der verneinte $-A$ der Function Z, von o an allmählich zunehmen, und dann allmählich abnehmen, bis endlich $Z=0$ für $x=p$ wird, daher muß es einen gewissen Werth $q+\omega$ von x zwischen q und p geben, für welchen Z einen größten bejahten Werth $+A$ oder verneinten $-A$ erlanget (109. §. Anm.).

II) Nun aber muß jede Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m auch m Wurzeln haben (96. §.), und unter diesen m Wurzeln giebt es $m-1$ Paare Wurzeln,

wozwi-

wozwischen andere nicht liegen, wie p, q in I): wenn demnach alle Wurzeln derselben Gleichung möglich sind; so giebt es m — 1 mögliche, zwischen ihnen liegende Werthe von x, mit derer jedem ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zusammenhängt, da dann ein verneintes Größte ein Kleinstes in der Bedeutung (7. §. Anm. I. n. 6.) heißen würde.

2. Zusatz.

Es kann geschehen, daß nicht alle Wurzeln einer Gleichung Z = o von der Ordnung m möglich sind: man kann also überhaupt setzen, daß es für sie n mögliche Wurzeln giebt, und dann giebt es n — 1 mögliche Werthe von x, welche zwischen den n möglichen Wurzeln von Z = o liegen, und mit derer jedem ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zusammenhängt (1. Zus. Anm.), welche Werthe demnach eben so viele mögliche Wurzeln der Exponentialgleichung L = o (lehrs.) abgeben.

3. Zusatz.

Wenn die Hauptgleichung Z = o unter ihren n möglichen Wurzeln (2. Zus.) r gleiche Wurzeln hat; so giebt es für sie nur n — r mögliche Werthe von x, mit derer jedem ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zusammenhängt, welche demnach n — r mögliche Wurzeln für die Exponentialgleichung L = o abgeben: denn wenn p, p, p --- p die r gleichen Wurzeln heißen, und man erwäget, daß zwischen gleichen Zahlen p, p kein Werth von x liegen kann

(107. §. 2. Zuſ.); ſo wird man auch leicht einſehen, daß man nur eine von dieſen r gleichen Wurzeln mit einer nächſt gröſſeren und kleineren möglichen Wurzel von $Z=0$ vergleichen kann, um aus dieſen drey Wurzeln zween Werthe von x herauszubringen, womit bejahte oder verneinte Größten von Z zuſammenhängen ſollen (1. Zuſ. Anm.), daß daher die Gleichung $Z=0$ bey dieſer Unterſuchung eben ſoviel iſt, als wenn ſie nur $n-r+1$ ungleiche mögliche Wurzeln hätte, wobey es allenfalls $(n-r+1)-1$ oder $n-r$ mögliche Werthe von x geben würde, mit derer jedem ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zuſammenhängen müßte (1. Zuſ. Anm.).

4. Zuſatz.

Wenn die n möglichen Wurzeln einer Gleichung $Z=0$ (2. Zuſ.) mit a, b, c, d, e, f, g - - - bezeichnet, und ſo geordnet werden, daß a die größte, $b<a$, $c<b$, $d<c$, $e<d$ u. ſ. f. iſt, und nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ - - - die zwiſchen a und b, b und c, c und d - - - - liegenden Werthe von x heißen, mit welchen die bejahten und verneinten Größten von Z zuſammenhängen ſollen; ſo ſind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ - - - - eben ſo viele Wurzeln der Exponentialgleichung $L=0$ (2. Zuſ.), wobey α unter ihnen die größte, $\beta<\alpha$, $\gamma<\beta$, $\delta<\gamma$ u. ſ. f. iſt; es muß ferner die erſte Wurzel α, die dritte γ, die fünfte ε, u. ſ. f. jede in ungerader Ordnung folgende mit einem verneinten, hingegen die zweyte β, die vierte δ u ſ. f. jede in gerader Ordnung folgende Wurzel von $L=0$ mit einem bejahten Größten von Z zuſammenhängen.

I) a,

I) a, b, c, d, e, f . . . . . .

II) α, β, γ, δ, ε . . . . . .

Daß mit jedem Werthe in II) ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zusammenhängt, dieses hat seine Richtigkeit (1. Zus. Anm.); daß aber die damit zusammenhängenden Größten nach dem erwähnten Gesetze abwechseln müssen, dieses wird aus (111 §. 2. Zus.) leicht erhellen, sobald man darthut, daß das mit α zusammenhängende Größte von Z bejaht ist; denn in diesem Fall wird wohl Z für jeden Werth von x, daher auch für β zwischen b und c verneint, folglich für jeden Werth von x zwischen c und d, daher auch für γ bejaht, u. s. f. (111. §. 2. Zus.) seyn müssen (110. §. Anm. IV): man kann aber jenes so beweisen.

Weil nämlich a die größte Wurzel der Gleichung $Z=0$ seyn soll, bey welcher Anordnung der Wurzeln die verneinten, wofern welche da sind, in der Bedeutung (7. §. Anm. I. n. 6.) genommen werden; so giebt es zwischen ∞ und a (107. §.) keine Wurzel der Gleichung $Z=0$: weil also $Z=x^m+Ax^{m-1}+\ldots+U=0$ für $x=\infty$ den bejahten Werth $Z=\infty^m$ erlanget; so muß Z auch für jeden Werth von x zwischen ∞ und a bejaht bleiben, weil, wenn Z für einen Werth y von x zwischen ∞ und a verneint würde, gewiß eine Wurzel von $Z=0$ zwischen und a liegen müßte (111. §.): ist aber Z für jeden Werth von x zwischen ∞ und a bejaht; so muß Z sogleich verneint werden, sobald x einen zwischen a und b liegenden und nur um etwas von a unterschiedenen Werth erlanget (110. §.

könnte man annehmen, es seyen 2n Wurzeln in (n. 2.) von a an bis q, daher in allen 2n+1 vorhanden. Nun aber müßte +Z für jeden Werth von x zwischen q und r in (n. 2.) wegen (n. 3.) gelten, daher —Z werden, sobald x zwischen r und β fiele (110. §. Anm. IV.): da also +Z für x=β werden soll; so muß nothwendig noch eine Wurzel zwischen r und β liegen (111. §.), und so ist die Zahl aller zwischen α und β liegenden Wurzeln nicht 2n+1 sondern 2n+1+1=2n+2, daher gerad.

Dieses erhellet auf gleiche Art für den Fall, wenn —Z sowohl für x=α als für x=β werden soll: denn nun müßte —Z auch für jeden zwischen der 2nten q und (2n+1)ten Wurzel r liegenden Werth von x Statt haben, (n. 4.), daher müßte +Z werden, sobald x einen Werth zwischen r und β erlangte (110. §. Anm. IV.), und nun gäbe es gewiß noch eine Wurzel zwischen r und β, indem —Z für x=β werden soll (111. §.): also folgt nach der (2n+1)ten Wurzel r noch eine, so, daß daher die Anzahl aller Wurzeln nicht 2n+1 sondern 2n+2 ist.

1. Zusatz.

Wenn der Exponent m der Ordnung, zu welcher eine Gleichung $Z=x^m \pm Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \pm Cx^{m-3} \pm \ldots \pm Px \pm Q=0$ gehört, eine gerade Zahl ist, und die Gleichung mögliche bejahte oder verneinte Wurzeln haben soll; so ist die Anzahl aller bejahten und verneinten Wurzeln derselben Gleichung allemahl gerad.

Denn

Denn es wird $Z = +Q$ für $x = 0$, wenn das letzte Glied der Gleichung bejaht ist: es wird ferner $Z = (\pm\infty)^m \pm A(\pm\infty)^{m-1} \pm B(\pm\infty)^{m-2} \pm \ldots$, $\pm Q = (\pm\infty)^m$ nach (106. §. 2. Zus.) $= +\infty^m$, weil m eine gerade Zahl ist (70. §. 1. Zus.). Die Function Z erlanget daher allemahl einen bejahten Werth, man mag in ihr $x = 0$, oder $x = +\infty$, oder $x = -\infty$ machen: da also alle mögliche bejahte Zahlen zwischen 0 und $+\infty$, und alle mögliche verneinte zwischen 0 und $-\infty$ liegen (107. §. 1. Zus.); so müssen alle mögliche bejahte Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ gleichfalls zwischen 0 und $+\infty$, und alle mögliche verneinte zwischen 0 und $-\infty$ liegen, so zwar, daß sowohl die Anzahl der bejahten als der verneinten, daher auch die Anzahl aller Wurzeln gerad ist (Lehrs.), und (41. §. 6. Zus.).

Wenn aber das letzte Glied der Gleichung verneint ist $= -Q$; so erlangt zwar die Function Z, sowohl für $x = +\infty$ als für $x = -\infty$, wie zuvor, einen bejahten Werth $+\infty^m$, aber für $x = 0$ erlangt sie nun einen verneinten Werth $Z = -Q$: da also alle mögliche bejahte Wurzeln derselben Gleichung, wenn sie einige hat, zwischen 0 und $+\infty$, und alle verneinte zwischen 0 und $-\infty$ liegen müssen (107. §. 1. Zus.); so ist nun die Anzahl ihrer bejahten Wurzeln ungerad, so wie auch die Anzahl ihrer verneinten Wurzeln (Lehrs.), daher muß die Anzahl aller bejahten und verneinten Wurzeln zusammen gerad seyn. (41. §. 6. Zus.).

2. Zuſatz.

Wenn aber der Exponent m der Ordnung einer Gleichung $Z = x^m \pm Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \pm \cdots \pm Px \pm Q = 0$ ungerad iſt; ſo muß die Anzahl aller möglichen Wurzeln, die ſie vielleicht hat, ungerad ſeyn.

Denn für $x = \pm\infty$ iſt $Z = (\pm\infty)^m \pm A(\pm\infty)^{m-1} \pm B(\pm\infty)^{m-2} \pm \cdots \pm P(\pm\infty) \pm Q = (\pm\infty)^m$, (106. §. 2. Zuſ.), folglich iſt, wegen des ungeraden Exponenten m, die Function $Z = +\infty^m$ für $x = +\infty$, und $Z = -\infty^m$, für $x = -\infty$ (70. §. 2. Zuſ.): iſt aber das letzte Glied der Gleichung bejaht $= +Q$, folglich $Z = +Q$ für $x = 0$; ſo erlanget Z ſowohl für $x = +\infty$ als für $x = 0$ einen bejahten Werth, aber für $x = -\infty$ erlanget ſie einen verneinten Werth; die Anzahl der Wurzeln von $Z = 0$, welche vielleicht zwiſchen 0 und $+\infty$ liegen, und dieſe müßten gewiß alle bejahte mögliche Wurzeln ſeyn (107. §. 1. Zuſ.), iſt daher gerad, und die Anzahl der Wurzeln, welche zwiſchen 0 und $-\infty$ ſich befinden mögen, und dieſes wären gewiß alle verneinte mögliche Wurzeln von $Z = 0$ (107. §. 1. Zuſ.), muß ungerad ſeyn (Lehrſ.): die Anzahl aller bejahten und verneinten Wurzeln, welche die Gleichung $Z = 0$ haben mag, muß demnach ungerad ſeyn (41. §. 6. Zuſ.).

Iſt aber das letzte Glied der Gleichung verneint $= -Q$; ſo erlanget die Function Z für $x = 0$ einen verneinten Werth $Z = -Q$: weil ſie alſo überdem für $x = +\infty$ einen bejahten Werth $= +\infty^m$ und für $x = -\infty$ einen

verein-

verneinten $= -\infty^m$ erlanget; so muß die Anzahl aller bejahten möglichen Wurzeln der Gleichung $Z=0$, welche zwischen 0 und $+\infty$ liegen mögen, ungerad, und die Anzahl ihrer verneinten zwischen 0 und $-\infty$ liegenden Wurzeln gerad seyn (Lehrs.); folglich ist die Anzahl aller bejahten und verneinten Wurzeln ungerad (41. §. 6. Zus.).

3. Zusatz.

Bey jeder Gleichung $Z=0$, welche lauter mögliche Wurzeln hat, muß also das letzte Glied allemahl bejaht seyn, wenn die Zahl der bejahten Wurzeln gerad seyn soll, und allemahl verneint muß dasselbe seyn, wenn die Zahl der bejahten Wurzeln ungerad seyn soll (1. 2. Zus.), welches schon aus (98. §. 4. Zus.) genugsam erhellet.

113. §. Lehrsatz.

Aus jeder Gleichung $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+Sx^2+Tx+U=0$ von der Ordnung m kann man durch die Multiplication der Glieder von der Function Z mit den zugehörigen Exponenten von x allemahl eine Gleichung, wie die nachstehende $L=0$ ist, von der um einen Grad niedrigern Ordnung $m-1$ erhalten, welche jeden Werth von x zu einer ihrer Wurzeln hat, mit welchem ein Größtes oder Kleinstes von Z zusammenhängt (109. §.).

$$L=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots+2Sx+T=0.$$

Beweis. 1) Wenn man bey der Function Z nicht $a+\omega$ und $a-\omega$, wie es in (110. §.) geschehen ist, sondern $x+\omega$ und $x-\omega$ statt x setzt; so wird man die Werthe Y und X, wie (110. §.), finden, mit dem Unterschiede nur, daß nun x statt a überall vorkommen muß: es wird nämlich nach dem 110. §. seyn

$$Y=F+L\omega+S\omega^2;\quad X=F-L\omega+s\omega^2.$$

Und es erhellet aus (110. §.), daß nun L den folgenden Werth haben muß.

$$L=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots+T.$$

2) Sobald man aber annähme, daß x in Z einen solchen Werth hat, z. B. $x=a$ ist, mit welchem ein Größtes oder Kleinstes von Z zusammenhängt; sogleich müßte man auch $L=0$ setzen (110. §. Zus.), wobey daher wäre

$$L=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots+T=0.$$

Eben der Werth a von x, welches ein Größtes oder Kleinstes von Z giebt, macht also auch, daß $L=0$ wird, wenn man ihn statt x in L nimmt, und so ist er eine Wurzel der Gleichung $L=0$ (94. §.).

1. Zusatz.

Man kann $Z=0$ eine Hauptgleichung, und $L=0$ ihre Exponentialgleichung nennen (*). Da nun jede Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m auch m Wurzeln haben muß (96. §.), und die Function Z allemahl gleich Null wird, wenn man in ihr eine Wurzel statt x nimmt (94. §.); so muß es zwischen zween jeden möglichen und

ihrer

ihrer Gröſſe nach nächſten Wurzeln derſelben Gleichung einen möglichen Werth von x geben, womit ein Gröſstes oder Kleinſtes von Z (109. §.) zuſammenhängt, welcher daher eine mögliche Wurzel der Exponentialgleichung L = o iſt, folglich, wenn alle m Wurzeln der Hauptgleichung Z = o möglich ſind, giebt es m — 1 mögliche Werthe von x, mit derer jedem ein Gröſstes oder Kleinſtes von Z zuſammenhängt, und welche demnach die m — 1 Wurzeln der Exponentialgleichung L = o ſind, die ſie wirklich haben muſs (96. §.).

(*) Anmerkung des Herausgebers.

Weil nämlich L = o durch die Multiplication der Glieder von Z mit den zugehörigen Exponenten von x entſtehen ſoll; ſo konnte ich keine ſchicklichere Benennung für die Gleichung L = o einführen, welche allerdings nöthig war, um alles kurz und deutlich auszuführen: der Hr. Verfaſſer nennt ſie aequationem derivatam; ich will aber auch diejenigen Gleichungen, welche bey ihm aequationes ſecundo derivatae, aequationes tertio derivatae etc. heiſsen, die zweyten, dritten u. ſ. f. Exponentialgleichungen in der Folge nennen. Nun will ich noch hier kurz zeigen, wie der im vorigen Zuſatze angeführte Satz, daſs es bey jeder Gleichung Z = o von der Ordnung m, wenn alle ihre Wurzeln möglich ſind, m — 1 mögliche Werthe von x geben muſs, mit derer jedem ein Gröſstes oder Kleinſtes von Z zuſammenhängt, aus der vorhergehenden Theorie folget.

I) Es seyen p, q zwo mögliche Wurzeln der Gleichung $Z=0$, wozwischen keine andere Wurzel derselben Gleichung liegt, und man nehme an, daß $p > q$ ist. Es giebt nun unzählige Werthe von x, welche zwischen p und q liegen (107. §. 3. Zus.), und für jeden solchen Werth würde Z entweder bejaht, oder für jeden verneint werden (111. §. 2. Zus.): wenn man also erstlich $x=q$ machet; wofür $Z=0$ werden muß (94. §.), hierauf eine sehr kleine Zahl ω nimmt, und $q+\omega$ in Z setzt; so wird Z dafür entweder einen bejahten Werth $+A$ oder einen verneinten $-A$ haben: läßt man ferner ω allmählich zunehmen, bis ω so groß wird, daß $x=q+\omega$ in Z der andern Wurzel p gleich ist; so wird auch Z für jeden grösseren Werth $x=q+\omega$ zwischen p und q einen neuen bejahten $+A$ oder verneinten $-A$ Werth haben, bis Z für $x=q+\omega=p$ gleich Null wird (94. §.): so wie also der Werth $q+\omega$ von x in Z von dem Werthe q an allmählich zunimmt, bis $x=p$ wird, eben so muß auch der bejahte Werth $+A$ oder der verneinte $-A$ der Function Z, von 0 an allmählich zunehmen, und dann allmählich abnehmen, bis endlich $Z=0$ für $x=p$ wird, daher muß es einen gewissen Werth $q+\omega$ von x zwischen q und p geben, für welchen Z einen größten bejahten Werth $+A$ oder verneinten $-A$ erlanget (109. §. Anm.).

II) Nun aber muß jede Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m auch m Wurzeln haben (96. §.), und unter diesen m Wurzeln giebt es $m-1$ Paare Wurzeln,

wozwi-

wozwischen andere nicht liegen, wie p, q in I): wenn demnach alle Wurzeln derselben Gleichung möglich sind; so giebt es m — 1 mögliche, zwischen ihnen liegende Werthe von x, mit derer jedem ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zusammenhängt, da dann ein verneintes Größte ein Kleinstes in der Bedeutung (7. §. Anm. I. n. 6.) heißen würde.

2. Zusatz.

Es kann geschehen, daß nicht alle Wurzeln einer Gleichung Z = o von der Ordnung m möglich sind: man kann also überhaupt setzen, daß es für sie n mögliche Wurzeln giebt, und dann giebt es n — 1 mögliche Werthe von x, welche zwischen den n möglichen Wurzeln von Z = o liegen, und mit derer jedem ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zusammenhängt (1. Zus. Anm.), welche Werthe demnach eben so viele mögliche Wurzeln der Exponentialgleichung L = o (Lehrs.) abgeben.

3. Zusatz.

Wenn die Hauptgleichung Z = o unter ihren n möglichen Wurzeln (2. Zus.) r gleiche Wurzeln hat; so giebt es für sie nur n — r mögliche Werthe von x, mit derer jedem ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zusammenhängt, welche demnach n — r mögliche Wurzeln für die Exponentialgleichung L = o abgeben: denn wenn p, p, p ... p die r gleichen Wurzeln heißen, und man erwäget, daß zwischen gleichen Zahlen p, p kein Werth von x liegen kann

(107. §. 2. Zuſ.); ſo wird man auch leicht einſehen, daß man nur eine von dieſen r gleichen Wurzeln mit einer nächſt gröſſeren und kleineren möglichen Wurzel von $Z=0$ vergleichen kann, um aus dieſen drey Wurzeln zween Werthe von x herauszubringen, womit bejahte oder verneinte Größten von Z zuſammenhängen ſollen (1. Zuſ. Anm.), daß daher die Gleichung $Z=0$ bey dieſer Unterſuchung eben ſoviel iſt, als wenn ſie nur $n-r+1$ ungleiche mögliche Wurzeln hätte, wobey es allenfalls $(n-r+1)-1$ oder $n-r$ mögliche Werthe von x geben würde, mit derer jedem ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zuſammenhängen müßte (1. Zuſ. Anm.).

4. Zuſatz.

Wenn die n möglichen Wurzeln einer Gleichung $Z=0$ (2. Zuſ.) mit a, b, c, d, e, f, g - - - bezeichnet, und ſo geordnet werden, daß a die größte, $b<a$, $c<b$, $d<c$, $e<d$ u. ſ. f. iſt, und nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ - - - die zwiſchen a und b, b und c, c und d - - - - liegenden Werthe von x heißen, mit welchen die bejahten und verneinten Größten von Z zuſammenhängen ſollen; ſo ſind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ - - - - eben ſo viele Wurzeln der Exponentialgleichung $L=0$ (2. Zuſ.), wobey α unter ihnen die größte, $\beta<\alpha$, $\gamma<\beta$, $\delta<\gamma$ u. ſ. f. iſt; es muß ferner die erſte Wurzel α, die dritte γ, die fünfte ε, u. ſ. f. jede in ungerader Ordnung folgende mit einem verneinten, hingegen die zweyte β, die vierte δ u ſ. f. jede in gerader Ordnung folgende Wurzel von $L=0$ mit einem bejahten Größten von Z zuſammenhängen.

I) a, b, c, d, e, f . . . . . .

II) α, β, γ, δ, ε . . . . . .

Daß mit jedem Werthe in II) ein bejahtes oder verneintes Größte von Z zusammenhängt, dieses hat seine Richtigkeit (1. Zus. Anm.); daß aber die damit zusammenhängenden Größten nach dem erwähnten Gesetze abwechseln müssen, dieses wird aus (111 §. 2. Zus.) leicht erhellen, sobald man darthut, daß das mit α zusammenhängende Größte von Z bejaht ist; denn in diesem Fall wird wohl Z für jeden Werth von x, daher auch für β zwischen b und c verneint, folglich für jeden Werth von x zwischen c und d, daher auch für γ bejaht, u. s. f. (111. §. 2. Zus.) seyn müssen (110. §. Anm. IV): man kann aber jenes so beweisen.

Weil nämlich a die größte Wurzel der Gleichung $Z=0$ seyn soll, bey welcher Anordnung der Wurzeln die verneinten, wofern welche da sind, in der Bedeutung (7. §. Anm. I. n. 6.) genommen werden; so giebt es zwischen ∞ und a (107. §.) keine Wurzel der Gleichung $Z=0$: weil also $Z=x^m+Ax^{m-1}+\ldots+U=0$ für $x=\infty$ den bejahten Werth $Z=\infty^m$ erlanget; so muß Z auch für jeden Werth von x zwischen ∞ und a bejaht bleiben, weil, wenn Z für einen Werth y von x zwischen ∞ und a verneint würde, gewiß eine Wurzel von $Z=0$ zwischen und a liegen müßte (111. §.): ist aber Z für jeden Werth von x zwischen ∞ und a bejaht; so muß Z sogleich verneint werden, sobald x einen zwischen a und b liegenden und nur um etwas von a unterschiedenen Werth erlanget (110. §.

Anm. IV), und nun muß sie auch für jeden zwischen a und b befindlichen Werth, daher auch für α verneint bleiben (111. §. 2. Zus.).

5. Zusatz.

Wenn a, b, c, d - - - in (4. Zus.) alle m mögliche Wurzeln sind, welche eine Hauptgleichung $Z=0$ von der Ordnung m haben mag (96. §.); so sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - - - - alle $m-1$ mögliche Wurzeln ihrer Exponentialgleichung $L=0$ (1. Zus.); und wenn jene und diese Wurzeln nach (4. Zus.) geordnet sind; so sind die erste α und zweyte Wurzel β der Exponentialgleichung $L=0$ die Gränzen der zweyten Wurzel b ihrer Hauptgleichung $Z=0$, und die erste a und zweyte Wurzel b der Hauptgleichung sind die Gränzen der ersten Wurzel α ihrer Exponentialgleichung $L=0$; und so sind überhaupt die rte und $(r+1)$te Wurzel der Exponentialgleichung $L=0$ die Gränzen der $(r+1)$ten Wurzel ihrer Hauptgleichung $Z=0$, hingegen sind die rte und $(r+1)$te Wurzel der Hauptgleichung $Z=0$ die Gränzen der rten Wurzel ihrer Exponentialgleichung $L=0$ (108. §.).

6. Zusatz.

Weil zwischen a und b (4. Zus.), verneinten möglichen Zahlen, eine bejahte mögliche α nicht liegen kann, wohl aber zwischen einer bejahten Zahl a und einer verneinten b, oder zwischen beyden bejahten Zahlen a, b (107. §. 1. Zus.); so muß wenigstens eine Wurzel a der Hauptgleichung $Z=0$ bejaht seyn, wenn ihre Exponentialgleichung $L=0$ eine

bejahte

bejahte Wurzel α hat: alſo muß, wenn alle ihre Wurzeln möglich ſind, die Hauptgleichung $Z=o$ wenigſtens ſo viele bejahte Wurzeln haben, wie viel ihrer die Exponentialgleichung $L=\varphi$ hat: denn es kann wohl jene um eine mehr, als dieſe, haben.

7. Zuſatz.

Es iſt nicht verſtattet, den Satz (1. 5. Zuſ.) umzukehren, und aus möglichen Wurzeln der Exponentialgleichung $L=o$, auf mögliche Wurzeln ihrer Hauptgleichung $Z=o$ zu ſchließen: es kann nämlich geſchehen, daß die Exponentialgleichung bey lauter unmöglichen Wurzeln der Hauptgleichung nur mögliche Wurzeln hat. Doch wenn man die möglichen Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ der Exponentialgleichung, wobey α die größte Wurzel, $\beta < \alpha$, $\gamma < \beta$ u. ſ. f. ſeyn ſoll, von der Beſchaffenheit findet, daß Z für $x=\alpha$ einen verneinten, für $x=\beta$ einen bejahten, für $x=\gamma$ einen verneinten, für $x=\delta$ einen bejahten u. ſ. f. Werth erlanget; ſo muß nothwendig eine Wurzel der Gleichung $Z=o$ zwiſchen α und β, eine andere zwiſchen β und γ, eine dritte zwiſchen γ und δ u. ſ. f. liegen (111. §.), daher, weil zwiſchen möglichen Zahlen nur mögliche liegen können (107. §. 4. Zuſ.), wird verſtattet ſeyn, zu behaupten, daß die Hauptgleichung gewiß ſo viele mögliche Wurzeln hat, wie viele Paare von Abwechslungen der mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ verbundenen bejahten und verneinten Werthe von Z auf einander folgen.

8. Zu-

8. Zuſatz.

Wie oft aber die Exponentialgleichung $L=0$ unmögliche Wurzeln hat, ſo oft muß auch ihre Hauptgleichung $Z=0$ unmögliche Wurzeln haben: denn wären alle Wurzeln von $Z=0$ möglich; ſo müßten auch alle Wurzeln von $L=0$ möglich ſeyn (1. Zuſ.).

9. Zuſatz.

Weil man aus jeder Gleichung $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+\ldots+U=0$ von der Ordnung m eine Exponentialgleichung $L=0$ dadurch herleitete, daß man alle Glieder der Function Z mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirte, alle hierauf durch x dividirte, und $=L$ ſetzte (Lehrſ.); ſo kann auf gleiche Art aus der erſten Exponentialgleichung $L=0$ von der Ordnung $m-1$ eine zweyte Exponentialgleichung $L^2=0$ von der Ordnung $m-2$, aus dieſer eine dritte Exponentialgleichung $L^3=0$ von der Ordnung $m-3$, aus dieſer eine vierte $L^4=0$ von der Ordnung $m-4$, u. ſ. f. aus jeder rten Exponentialgleichung $L^r=0$ von der Ordnung $m-r$ die $(r+1)$te $L^{r+1}=0$ von der Ordnung $m-r-1$ herleiten; es wird nämlich ſeyn:

Für die Hauptgleichung.

$$Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+\ldots+U=0.$$

Die erſte Exponentialgleichung.

$$L=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+(m-3)Cx^{m-4}+\ldots=0.$$

Die

Die zweyte Exponentialgleichung.

$$L^2 = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-2)(m-3)Bx^{m-4} + (m-3)(m-4)Cx^{m-5} + \ldots = 0.$$

Die dritte Exponentialgleichung.

$$L^3 = m(m-1)(m-2)x^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)Ax^{m-4} + (m-2)(m-3)(m-4)Bx^{m-5} + (m-3)(m-4)(m-5)Cx^{m-6} + \ldots = 0.$$

Die vierte Exponentialgleichung.

$$L^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} + (m-1)(m-2)(m-3)(m-4)Ax^{m-5} + (m-2)(m-3)(m-4)(m-5)Bx^{m-6} + (m-3)(m-4)(m-5)(m-6)Cx^{m-7} + \ldots = 0.$$

u. s. f.

10. Zusatz.

Weil jede $(r+1)$te Exponentialgleichung aus der nächst vorhergehenden $r$ten Exponentialgleichung eben so entstehet, wie die erste aus der Hauptgleichung (9. Zus.); so gielt alles für jede $(r+1)$te Exponentialgleichung in Ansehung der nächst vorhergehenden $r$ten Exponentialgleichung, was für die erste Exponentialgleichung $L = 0$ in Ansehung der Hauptgleichung $Z = 0$ gelten muß (1 — 8. Zusatz): sind also alle Wurzeln der Hauptgleichung $Z = 0$ möglich; so müssen auch alle Wurzeln aller Exponentialgleichungen, welche sich aus $Z = 0$ machen lassen (9. Zus.) möglich seyn.

Der

Der XII. Abschnitt.

Von der Zahl und den Kennzeichen der bejahten und verneinten, möglichen und unmöglichen, rationalen und irrationalen, und gleichen Wurzeln einer höheren Gleichung.

114. §. Lehrsatz.

Wenn eine Hauptgleichung $Z=0$ von der Ordnung m eine Anzahl n von gleichen Wurzeln hat; so gehören $n-1$ solche Wurzeln zu ihrer ersten Exponentialgleichung $L=0$ (113. §. 9. Zus.).

Beweis. 1) Wenn man die Potenz $(x+\alpha)^n$ nach (76. §. 4. Zus.) bestimmt, hierauf alle ihre Glieder mit Px^s multiplicirt, und alle Glieder des dadurch zu erhaltenden Products mit den zugehörigen Exponenten von x multiplicirt; so wird eine durch $(x+\alpha)^{n-1}$ theilbare Function von x dadurch erhalten werden. Denn es ist:

$$Px^s(x+\alpha)^n = Px^s\left(x^n + nx^{n-1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\alpha^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}\alpha^4 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(n-1)}x\alpha^{n-1} + \alpha^n\right)$$

$$= P\Big(x^{n+s} + n x^{n-1+s}\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2+s}\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3+s}\alpha^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^{n-4+s}\alpha^4 + \ldots + \frac{n}{1\cdot 2} x^{s+1}\alpha^{n-1} + x^s\alpha^n\Big).$$

Multiplicirt man nun alle Glieder mit den zugehörigen Exponenten von x; so findet man nach gehöriger Reduction:

$$P x^s\Big(s\Big(x^n + n x^{n-1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3}\alpha^3 + \ldots + \alpha^n\Big) + n x\Big(x^{n-1} + (n-1) x^{n-2}\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} x^{n-3}\alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}\Big)\Big)$$

$$= P x^s\big(s(x+\alpha)^n + n x(x+\alpha)^{n-1}\big)$$

$$= P x^s\big(s(x+\alpha) + n x\big)(x+\alpha)^{n-1}.$$

Und nun ist die letzte Function durch $(x+\alpha)^{n-1}$ theilbar.

2) Es sey $m - n = r$, daher $m = r + n$, und man nehme an, daß $\alpha; \alpha; \alpha \ldots\ldots \alpha$ die n gleichen Wurzeln sind, welche die Hauptgleichung $Z = 0$ von der Ordnung m haben soll; so ist die Anzahl der übrigen ungleichen Wurzeln $= r$. Also muß Z aus n gleichen Factoren, wie $x - \alpha$, und

und aus r ungleichen beſtehen (95. §. 6. Zuſ.); jene Factoren geben zum Product $(x-\alpha)^n$ (10. §.), und was dieſe ungleichen Factoren zum Product geben ſey $x^r+ax^{r-1}+bx^{r-2}+\ldots+p$; ſo kann man die Hauptgleichung ſo ausdrücken:

$$Z=(x-\alpha)^n(x^r+ax^{r-1}+bx^{r-2}+cx^{r-3}+\ldots+p)=0.$$

Man würde demnach die zugehörige Exponentialgleichung $L=0$ (113. §. 9. Zuſ.) finden, wenn man $(x-\alpha)^n$ mit jedem Gliede des andern Factors von Z multiplicirte, und alle Glieder des Products mit den zugehörigen Exponenten von x vervielfältigte: weil alſo bey dieſem Verfahren jedes Glied des Factors $x^r+ax^{r-1}+bx^{r-2}+\ldots+p$ mit $(x-\alpha)^n$ multiplicirt etwas geben würde, das durch $(x-\alpha)^{n-1}$ theilbar wäre (n. 1.); ſo kann man die verlangte Exponentialgleichung durch $X(x-\alpha)^{n-1}=0$ ausdrücken. Die Exponentialgleichung enthält alſo $n-1$ gleiche Wurzelgleichungen, wie $x-\alpha=0$, folglich hat dieſelbe auch $n-1$ gleiche Wurzeln, wie α (95. §. 4. Zuſ.).

Zuſatz.

Hat daher eine Hauptgleichung $Z=0$ zwo, drey, vier, fünf, ſechs u. ſ. f. gleiche Wurzeln; ſo muß ihre erſte Exponentialgleichung eine, zwo, drey, vier, fünf, u. ſ. f. allemahl um eine weniger von dieſen Wurzeln haben: von r gleichen Wurzeln der Hauptgleichung hat die erſte Exponentialgleichung $r-1$, die zweyte (113. §. 9. Zuſ.) hat ihrer $r-2$, die dritte $r-3$, u. ſ. f. jede folgende Exponentialgleichung hat um eine Wurzel weniger, bis zur $(r-1)$ten

Expo-

Exponentialgleichung $L^{r-1}=0$ (daselbst), welche von allen gleichen Wurzeln der Hauptgleichung nur $r-(r-1)$, oder nur eine haben kann (113. §. 10. Zus.).

Anmerkung des Herausgebers.

Was hier die erste Exponentialgleichung hieß, dieses heißt gewöhnlich die erste Differentialgleichung, weil sie mit Hülfe der Differentialrechnung aus der Hauptgleichung erhalten wird; und so wird auch der Satz (114. §.) gewöhnlich vermittelst der Differentialrechnung bewiesen, wie man dieses bey Hrn. Euler (a), Hrn. Hofr. Kästner (b), Hrn. Hofr. Karsten (c) u. d. m. sehen kann.

(a) Instit. Calc. Differential. P. poster. Cap. IX.

(b) Anfangsgr. der Analys. des Unendlichen. 172. §.

(c) Anfangsgr. der Mathem. Analys. IX. Abschn. 243. §. 1. Zus.

115. §. Lehrsatz.

Wenn $Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+U=0$ eine rationale Gleichung ist (91. §.); so hat sie entweder keine unmögliche Wurzel, oder es ist die Anzahl ihrer unmöglichen Wurzeln gerad.

Beweis. Der Exponent m der Ordnung ist entweder eine gerade oder ungerade Zahl. Wenn der Exponent m eine gerade Zahl ist; so ist auch die Anzahl aller möglichen und unmöglichen Wurzeln von $Z=0$ gerad (96. §.), und die Anzahl ihrer möglichen Wurzeln, wofern einige da sind, muß gleichfalls gerad seyn (112. §. 1. Zus.): also ist auch

die Anzahl ihrer unmöglichen Wurzeln, als die Differenz der geraden Zahl der möglichen von der geraden Zahl m aller möglichen und unmöglichen Wurzeln, allemahl gerad (41. §. 8. Zuſ.).

Wenn hingegen der Exponent m der Ordnung ungerad iſt; ſo iſt auch die Zahl aller Wurzeln von Z = o, nämlich m ungerad (96. §.), und die Zahl aller möglichen Wurzeln kann gleichfalls nur ungerad ſeyn (111. §. 2. Zuſ.): alſo iſt die Anzahl der unmöglichen Wurzeln, als die Differenz der ungeraden Zahl der möglichen von der ungeraden Zahl m aller Wurzeln, eine gerade Zahl (42. §. Zuſ.).

1. Zuſatz.

Wenn eine Gleichung Z = o von gerader Ordnung, z. B. von der zweyten, vierten, ſechſten u. ſ. f. Ordnung iſt; ſo kann ſie lauter unmögliche Wurzeln haben: iſt aber die Gleichung von einer ungeraden Ordnung; ſo muß dieſelbe wenigſtens eine mögliche Wurzel haben.

2. Zuſatz.

Jede Hauptgleichung hat ſo viel Paare unmöglicher Wurzeln, als ihre erſte Exponentialgleichung. Denn wenn man annimmt, daß die Hauptgleichung von der Ordnung m iſt, und daher in allen m Wurzeln hat, ſo wird die erſte Exponentialgleichung von der Ordnung m — 1 ſeyn, daher in allen m — 1 Wurzeln haben (96. §.). Da alſo die unmöglichen Wurzeln in einer Gleichung nur paarweiſe vorkommen können; ſo ſetze man, es habe dieſe Exponentialgleichung 2r unmögliche Wurzeln, folglich ſey m — 1 — 2r

die

die Anzahl ihrer möglichen Wurzeln: weil demnach die Hauptgleichung nun gewiß unmögliche Wurzeln haben muß (113. §. 8. Zuſ.), und die Exponentialgleichung gewiß um eine weniger mögliche Wurzeln als die Hauptgleichung hat (113. §. 2. Zuſ.) ſo iſt $m-1-2r+1=m-2r$ die Zahl der möglichen Wurzeln der Hauptgleichung, folglich iſt $m-(m-2r)=2r$ die Anzahl ihrer unmöglichen Wurzeln.

Anmerkung des Herausgebers.

Man hat freylich beym Beweiſe des angeführten Lehrſatzes vorausgeſetzt, daß die Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m nicht lauter unmögliche ſondern auch mögliche Wurzeln hat, doch glaube ich nicht, daß dieſer Umſtand einen Anfänger verleiten kann, den Beweis nur für dieſen Fall gelten zu laſſen, nicht aber für den Fall, wenn alle Wurzeln einer Gleichung unmöglich ſind: denn daß der 1. Zuſatz daraus richtig folgt, iſt leicht einzuſehen. Wenn nämlich $Z=0$ eine Gleichung von ungerader Ordnung m iſt; ſo kann man nicht ſagen, daß alle m Wurzeln unmöglich ſind: es ſey a eine mögliche Zahl; ſo iſt $Z(x-a)=0$ nun eine Gleichung von der geraden Ordnung $m+1$, welche auſſer den m Wurzeln von $Z=0$ noch eine mögliche $x=a$ hat (96. §. 2. Zuſ.): da alſo dieſe Gleichung vermöge des Lehrſatzes gewiß nur eine gerade Anzahl von unmöglichen Wurzeln haben kann; ſo konnte auch $Z=0$ nur eine gerade Anzahl unmöglicher Wurzeln haben, folglich iſt falſch, daß alle ihre Wurzeln unmöglich ſind.

116. §. Lehrſatz.

Wenn eine Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Lx^{n-m} + \ldots + R = o$ lauter rationale Coefficienten hat, und eine von ihren Wurzeln unter der irrationalen Form $p + q\sqrt{r}$ vorkömmt, ſo, daß p einen rationalen Theil bedeutet, welcher allenfalls auch $= o$ ſeyn kann; ſo muß die Gleichung noch eine Wurzel $= p - q\sqrt{r}$ haben.

Beweis. 1) Es ſey $q\sqrt{r} = u$, folglich eine Wurzel der Gleichung $= p + u$; ſo muß man beweiſen, daß es noch eine $= p - u$ geben muß. Wenn man in der vorgelegten Gleichung $x = p + u$ machet; ſo findet man wegen (94. §.).

$$1)\ (p+u)^n + A(p+u)^{n-1} + B(p+u)^{n-2} + C(p+u)^{n-3} + \ldots + L(p+u)^{n-m} + \ldots + R = o.$$

Nun aber findet man nach (76. §. 4. Zuſ.):

$$(p+u)^n = p^n + np^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-3}u^3 + \ldots$$

$$A(p+u)^{n-1} = Ap^{n-1} + A(n-1)p^{n-2}u + \frac{A(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} p^{n-3}u^2 + \ldots$$

$$B(p+u)^{n-2} = Bp^{n-2} + B(n-2)p^{n-3}u + \frac{B(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} p^{n-4}u^2 + \ldots$$

C(p+u)

$$C(p+u)^{n-3} = Cp^{n-3} + C(n-3)p^{n-4}u + \frac{C(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} p^{n-5}u^2 + \ldots\ldots$$

$$L(p+u)^{n-m} = Lp^{n-m} + L(n-m)p^{n-m-1}u + \frac{L(n-m)(n-m-1)}{1 \cdot 2} p^{n-m-2}u^2 + \ldots$$

Setzte man nun diese Werthe in I); so würde man eine Function gleich Null erhalten, welche aus solchen Theilen bestünde, deren einige $u = q\sqrt{r}$ gar nicht, andere aber lauter gerade Potenzen von u, und noch andere lauter ungerade Potenzen von u enthielten: wenn man also die Summe der ersten Theile $= S$, die Summe der zweyten Theile $= Mu^2$, und die Summe der dritten Theile $= Nu$ setzt; so findet man aus I) folgende Gleichung.

$S + Mu^2 + Nu = o$; also $S + Mu^2 = -Nu$.

Es ist ferner gewiß, daß jede gerade Potenz von $u = q\sqrt{r}$ rational, und jede ungerade irrational ist (75. §.): also ist $S + Mu^2$ eine rationale, und Nu eine irrationale Grösse. Weil daher rationale und irrationale Zahlen einander entgegengesetzt sind, so, wie es die Zahlen seyn müssen, deren einige sich messen und die andern sich nicht messen lassen (74. §.); so kann man eine rationale Zahl $S + Mu^2$ einer irrationalen Nu nicht gleich setzen: wenn demnach diese Gleichheit aus gewissen Gründen folgt; so muß dieses ein sicheres Zeichen seyn, daß jede von solchen Grössen, für sich genommen, gleich Null ist, daher $S + Mu^2 =$ und $Nu = o$, so wie $S + Mu^2 - Nu = o$.

2) Wenn man $p-u$ in der vorgelegten Gleichung $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots=0$ überall statt x gesetzt hätte; so würde man $(p-u)^n+A(p-u)^{n-1}+B(p-u)^{n-2}+C(p-u)^{n-3}+\ldots+L(p-u)^{n-m}+\ldots+R=0$ erhalten haben, und es ist offenbar, daß diese Function eben das geben müßte, was oben (n. 1.) die Function I) gegeben hat, nur mit dem Unterschiede, daß hier alle Glieder der Function, welche die ungeraden Potenzen von u enthielten, verneint wären: so wie also die Function I) in (n. 1.) für $x=p+u$ den Werth $S+Mu^2+Nu$ erlangen soll; eben so muß nun die gegenwärtige Function bey $x=p-u$ den Werth $S+Mu^2-Nu$ erlangen.

Aus der Voraussetzung aber, daß $p+u$ eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist, hat man in (n. 1.) bewiesen, daß $S+Mu^2-Nu=0$ seyn muß: aus eben der Voraussetzung folgt also auch, daß die bey der vorgelegten Gleichung befindliche Function auch für $x=p-u$ gleich Null wird, daß demnach auch $p-u$ eine Wurzel derselben Gleichung ist (94. §.).

Zusatz.

Die vorigen Schlüsse bleiben ungeändert, wenn man $r=-a$, daher $p+q\sqrt{r}=p+q\sqrt{-a}$ setzt, wo nun $p+q\sqrt{-a}$ eine unmögliche Wurzel der vorgelegten Gleichung seyn soll (70. §. 4. Zus.); man darf nämlich bey denselben Schlüssen sich nur der Worte: möglich und unmöglich, statt rational und irrational bedienen (72. §.): sobald also eine Gleichung eine unmögliche Wurzel von der

Form

Form $p+q\sqrt{-a}$ hat, wo p ihren möglichen Theil bedeutet, der auch $=0$ seyn kann; so muß eben die Gleichung noch eine unmögliche Wurzel von der Form $p-q\sqrt{-a}$ haben, welches für eine quadratische Gleichung schon aus (94. §. 2. 3. Zus.) erhellet.

117. §. Lehrsatz.

Wenn alle Wurzeln einer Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m möglich und gleich sind; so ist das Quadrat jedes $r$ten Coefficienten (93. §. 1. Zus.) gröſſer als das Product aus den nächst anliegenden Coefficienten: wenn man aber jenes Quadrat mit $\frac{(m-r)r}{(m-r+1)(r+1)}$ multiplicirt; so ist das Product dem Producte aus den nächst anliegenden Coefficienten gleich.

Beweis. Die Gleichung $Z=0$ muß daher m gleiche Wurzeln haben (96. §.): wenn man also jede Wurzel, sie mag bejaht oder verneint seyn, überhaupt mit α bezeichnet; so bestehet die Function Z aus m gleichen Factoren, wie $x+\alpha$ (95. §. 6. Zus.), folglich ist Z die $m$te Potenz von $x+\alpha$ (10. §.), daher ist die Gleichung selbst $Z=(x+\alpha)^m=0$, oder nach (76. §. 4. Zus.)

$$Z = x^m + m x^{m-1}\alpha + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2}\alpha^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3}\alpha^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+3)(m-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-2)(r-1)} x^{m-r+1}\alpha^{r-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-r+3)(m-r+2)(m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots (r-2)(r-1)r} x^{m-r}\alpha^r$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-r+3)(m-r+2)(m-r+1)(m-r)}{1 \cdot 2 \cdots (r-2)(r-1)r(r+1)} x^{m-r-1}\alpha^{r+1}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \alpha^m$$

Der rte Coefficient iſt nun der Coefficient von x^{m-r} (93. §. 1. Zuſ.): ſetzt man ihn alſo $= R$, den $(r-1)$ten aber, oder den Coefficient von x^{m-r+1}, $= Q$, und den $(r+1)$ten, nämlich den Coefficient von x^{m-r-1}, $= S$; ſo muß man beweiſen, es ſey $R^2 > SQ$, und

$$\frac{R^2(m-r)r}{(m-r+1)(r+1)} = SQ.$$

Es iſt $R = \frac{m-r+1}{r} \cdot \alpha Q$; u. $S = \frac{m-r}{r+1} \cdot \alpha R$:

alſo $R^2 = \frac{(m-r+1)^2}{r^2} \cdot \alpha^2 Q^2$, u. $S = \frac{(m-r+1)(m-r)}{(r+1)r} \cdot \alpha^2 Q$,

folglich $SQ = \frac{(m-r+1)(m-r)}{(r+1)r} \cdot \alpha^2 Q^2$, und

$$\frac{R^2(m-r)r}{(m-r+1)(r+1)} = \frac{(m-r+1)^2(m-r)r}{(m-r+1)r^2(r+1)} \alpha^2 Q^2$$
$$= \frac{(m-r+1)(m-r)}{(r+1)r} \alpha^2 Q^2.$$

Dem-

Demnach ist $\frac{R^2(m-r)r}{(m-r+1)(r+1)} = SQ$, und

$R^2 > SQ$ wegen $\frac{(m-r+1)^2}{r^2} > \frac{(m-r+1)(m-r)}{(r+1)r}$.

Anmerkung des Herausgebers.

Ich habe unter den Papieren des sel. Verfassers noch einen kurzen Aufsatz gefunden, in welchem er aus dem hier erwiesenen Lehrsatze zu beweisen sucht, daß bey jeder Gleichung von der Ordnung m, die lauter mögliche Wurzeln hat, $\frac{R^2(m-r)r}{(m-r+1)(r+1)} > SQ$ ist, wo R den Coefficient jeder (m — r)ten bey derselben Gleichung befindlichen Potenz x^{m-r}, Q aber den Coefficient der nächst vorhergehenden (m — r + 1)ten Potenz x^{m-r+1}, und S den Coefficient der nächst folgenden (m — r — 1)ten Potenz x^{m-r-1} bedeutet. Die Wichtigkeit dieses Satzes verdiente wohl alle meine Aufmerksamkeit; ich fand aber, daß der Beweis nicht bündet, und auch nicht bünden würde, wenigstens nicht ohne grosse Weitläuftigkeit, wenn man denselben Satz aus dem vorigen Satze herleiten wollte: daher lasse ich auch den Beweis desselben weg, und statt dessen werde ich unten im Anhange aus der vorhergehenden Theorie das einigermassen zu ergänzen suchen, was hier mit demselben Satze wegblieb.

118. §. Erklärungen.

Wenn in einer Gleichung zwey nächste Glieder, z. B. das rte Glied und das (r + 1)te, einerley Zeichen + oder —

vor sich haben; so nennt man dieses eine Folge von Zeichen (Succeſſio ſignorum): haben sie aber verschiedene Zeichen vor sich; so heißt dieses eine Abwechslung von Zeichen (permutatio ſignorum).

119. §. Lehrsatz.

Wenn man was immer für eine Hauptgleichung $Z=0$ hat, deren alle Wurzeln möglich sind, und man findet, daß ihre rte Exponentialgleichung $L^r=0$ (113. §. 9. Zus.) genau so viele Abwechslungen der Zeichen als bejahte mögliche Wurzeln hat; so muß auch die nächst vorhergehende $(r-1)$te Exponentialgleichung so viele Abwechslungen der Zeichen als bejahte mögliche Wurzeln haben.

Beweis. 1) Nach (113. §. 9. Zus.) kann man die $(r-1)$te Exponentialgleichung $L^{r-1}=0$, wenn die Hauptgleichung $Z=0$ von der Ordnung m ist, so ausdrücken.

$$L^{r-1}=ax^{m-r+1}\pm bx^{m-r}\pm cx^{m-r-1}\pm dx^{m-r-2}\pm\ldots\ldots$$
$$\pm px\pm q=0.$$

Und hieraus folgt, ebenfalls nach (a. O.), die rte Exponentialgleichung

$$L^r=(m-r+1)ax^{m-r}\pm(m-r)bx^{m-r-1}$$
$$\pm(m-r-1)cx^{m-r-2}\pm\ldots\pm p=0.$$

2) Hieraus wird klar, daß alle Abwechslungen und Folgen der Zeichen, (118. §), welche bey der rten Exponentialgleichung Statt haben, auch bey der $(r-1)$ten vorhanden seyn müssen.

3) Man

3) Man nehme nun an, daß die rte Exponentialgleichung $L^r = o$ in (n. 1.) eine Anzahl u von Abwechslungen, und eben so grosse Zahl von bejahten Wurzeln hat, wo u eine gerade oder ungerade Zahl seyn kann.

4) Wenn u die Anzahl der bejahten Wurzeln von $L^r = o$ in (n. 1.) gerad ist; so muß das letzte Glied bey $L^r = o$ das Zeichen + haben, folglich + p seyn (112. §. 3. Zus.): ist also das letzte Glied — q bey $L^{r-1} = o$ in (n. 1.); so hat $L^{r-1} = o$ um eine Abwechslung der Zeichen mehr als $L^r = o$ wegen (n. 2.), daher hat $L^{r-1} = o$ genau u + 1 Abwechslungen (n. 3.): ist aber das letzte Glied = + q bey $L^{r-1} = o$ in (n. 1.); so geben das vorletzte Glied + p x und das letzte + q eine Folge (118. §.), folglich sind bey $L^{r-1} = o$ genau so viele nämlich u Abwechslungen vorhanden, als bey $L^r = o$ wegen (n. 3.) und (n. 2.).

5) Nun aber muß jede (r — 1)te Exponentialgleichung $L^{r-1} = o$ wenigstens eben so viele bejahte mögliche Wurzeln haben, als ihrer die rte Exponentialgleichung $L^r = o$ hat (113. §. 6. 10. Zus.), folglich muß $L^{r-1} = o$ wenigstens u bejahte Wurzeln haben (n. 3.), daher, weil u eine gerade Zahl seyn soll, hat $L^{r-1} = o$ eigentlich u + 1 oder u bejahte Wurzeln, nachdem das letzte Glied dieser Gleichung in (n. 1.) — q oder + q ist (112. §. 3. Zus.): also hat sie allemahl so viele bejahte Wurzeln als Abwechslungen der Zeichen (n. 4.).

6) Ist aber die Anzahl u der Abwechslungen der Zeichen, daher auch der bejahten Wurzeln bey der rten Exponentialglei-

tialgleichung $L^r = o$ in (n. 3.) ungerad; ſo muß bey ihr das letzte Glied in (n. 1.) verneint $= -p$ ſeyn (112. §. 3. Zuſ.): da alſo die $(r-1)$te Exponentialgleichung $L^{r-1} = o$ in (n. 1.) alle die u Abwechslungen haben muß, welche bey $L^r = o$ vorhanden ſind (n. 2.), und das vorletzte Glied bey $L^{r-1} = o$ nun $= -px$ iſt, folglich dieſes mit dem letzten noch eine Abwechslung oder Folge (118. §.) geben muß, nachdem das letzte Glied $+q$ oder $-q$ iſt; ſo hat die $(r-1)$te Exponentialgleichung $L^{r-1} = o$ in (n. 1.) $u+1$ oder u Abwechslungen der Zeichen, nachdem bey ihr das letzte Glied $+q$ oder $-q$ iſt.

7) Es hat ferner die $(r-1)$te Exponentialgleichung $L^{r-1} = o$ wenigſtens u bejahte mögliche Wurzeln, wenn die rte Exponentialgleichung wegen (n. 3.) eben ſo viele hat (113. §. 6. 10. Zuſ.): da alſo u eine ungerade Zahl ſeyn ſoll; ſo hat $L^{r-1} = o$ eigentlich $u+1$ oder u bejahte Wurzeln, nachdem das letzte Glied derſelben Gleichung in (n. 1.) $+q$ oder $-q$ iſt (112. §. 3. Zuſ.), und ſo hat $L^{r-1} = o$ allemahl eben ſo viele Abwechslungen der Zeichen als bejahte Wurzeln (n. 6.).

Zuſatz.

Weil jede rte Exponentialgleichung (113. §. 9. Zuſ.) von einer um einen Grad niedrigeren Ordnung iſt, als die nächſt vorhergehende $(r-1)$te; ſo muß es für jede Hauptgleichung $Z = o$ von einer beſtimmten Ordnung m, allemahl $m-1$ Exponentialgleichungen geben, worunter die niedrigſte, oder die $(m-1)$te eine einfache, und die nächſt

höhere,

höhere, die (m — 2)te eine quadratische Gleichung ist: kann man also beweisen, daß eine quadratische Gleichung, deren beyde Wurzeln möglich sind, genau so viele Abwechslungen der Zeichen, als bejahte Wurzeln, haben muß; so wird auch, weil alle Wurzeln aller Exponentialgleichungen möglich seyn müssen, wenn alle Wurzeln der Hauptgleichung möglich sind (113. §. 10. Zus.), auch die Hauptgleichung von der Ordnung m genau so viele Abwechslungen der Zeichen, als bejahte Wurzeln, haben müssen: denn weil dieses für ihre (m — 2)te Exponentialgleichung gelten soll; so wird es auch, wegen des Lehrsatzes, für die nächst vorhergehende (m — 3)te Exponentialgleichung, und nun auch für die (m — 4)te, folglich auch für die (m — 5)te u. s. f. für jede nächst vorhergehende Exponentialgleichung, daher auch für die (m — 0)te, oder für die Hauptgleichung selbst gelten.

120. §. Lehrsatz.

Bey jeder quadratischen Gleichung, deren beyde Wurzeln möglich sind, giebt es so viele Abwechslungen der Zeichen (118. §.), als bejahte Wurzeln.

Beweis. In Ansehung der Zeichen, welche die Glieder einer quadratischen Gleichung haben können, kann man alle quadratische Gleichungen unter die nachstehenden vier Formen bringen.

I) $x^2 + Ax + B = 0$. II) $x^2 - Ax - B = 0$.

III) $x^2 - Ax + B = 0$. IV) $x^2 + Ax - B = 0$.

Nun

Nun aber erhellet aus (98. §. 4. Zuſ.), daß nicht beyde Wurzeln bejaht, oder beyde verneint in II) und IV) ſeyn können, es muß nämlich eine bejahte und eine verneinte Wurzel da ſeyn, und es iſt auch ſowohl in II) als in IV) eine Abwechslung und eine Folge der Zeichen (118. §.).

In III) müſſen nach (98. §. 4. Zuſ.) entweder beyde Wurzeln bejaht, oder beyde verneint ſeyn: beyde verneint können ſie nicht ſeyn, weil ſonſt ihre Summe verneint wäre, und das zweyte Glied nicht $-Ax$ ſondern $+Ax$ ſeyn müßte (98. §. 1, Zuſ.); beyde müſſen demnach bejaht ſeyn, und es giebt auch bey III) wirklich zwo Abwechslungen der Zeichen (118. §.).

Auch in I) müſſen entweder beyde Wurzeln bejaht, oder beyde verneint ſeyn (98. §. 4. Zuſ.): beyde bejaht können ſie aber nicht ſeyn, weil ſonſt ihre Summe bejaht, daher das zweyte Glied verneint, und nicht bejaht wäre (98. §. 1. Zuſ.); es müſſen demnach beyde Wurzeln verneint ſeyn, folglich iſt keine Wurzel bejaht, und es iſt auch keine Abwechslung der Zeichen in I).

1. Zuſatz.

Bey jeder Gleichung $Z=o$ von der Ordnung m, deren alle Wurzeln möglich ſind, müſſen ſo viel Abwechslungen der Zeichen (118. §.), als bejahte Wurzeln vorhanden ſeyn (119. §. Zuſ.).

2. Zuſatz.

Die Gleichung $Z=0$ (1. Zuſ.) hat $m+1$ Glieder, und jedes Glied mit dem nächſt folgenden giebt eine Folge oder Abwechslung der Zeichen (118. §.), daher giebt es bey eben der Gleichung m Folgen und Abwechslungen zuſammen: hat alſo dieſelbe Gleichung n bejahte Wurzeln, folglich auch n Abwechslungen der Zeichen (1. Zuſ.); ſo iſt die Anzahl der Folgen (118. §.) bey ihr $=m-n$, und dieſes muß auch die Anzahl ihrer verneinten Wurzeln ſeyn (96. §.). Jede Gleichung, deren alle Wurzeln möglich ſind, hat demnach allemahl ſo viel bejahte Wurzeln, als Abwechslungen, und ſoviel verneinte, als Folgen der Zeichen.

3. Zuſatz.

Iſt $n=0$ in (2. Zuſ.); ſo hat die Gleichung keine Abwechslung der Zeichen, und keine bejahte Wurzel; ſie hat lauter Folgen (118. §.), und lauter verneinte Wurzeln (2. Zuſ.): iſt aber $n=m$; ſo hat die Gleichung m Abwechslungen, und eben ſo viele nämlich m bejahte Wurzeln, daher hat ſie keine Folge (118. §.), und keine verneinte Wurzel.

4. Zuſatz.

Wenn alle Wurzeln einer Gleichung $Z=0$ möglich ſind, und man die Function Z mit $x+\alpha=0$ multiplicirt; ſo entſtehet eine andere Gleichung $Z(x+\alpha)=0$, welche auſſer den Wurzeln von $Z=0$ nur noch eine verneinte Wurzel $x=-\alpha$ hat (96. §. 2. Zuſ.): alſo muß die neue

Gleichung

Gleichung eben so viel bejahte Wurzeln und Abwechslungen der Zeichen haben (1. 2. Zus.), als ihrer die Gleichung $Z=0$ hat.

5. Zusatz.

Wenn man aber die Function $Z=0$ in (4. Zus.) mit $x-\alpha=0$ multiplicirt; so entstehet eine neue Gleichung $Z(x-\alpha)=0$, welche alle Wurzeln von $Z=0$ und nur noch eine bejahte Wurzel $x=\alpha$ haben muß (96. §. 2. Zus.): die neue Gleichung muß also eben so viele verneinte Wurzeln und Folgen der Zeichen, als $Z=0$, haben (1. 2. Zus.).

6. Zusatz.

Wenn man also die Function $Z=0$ mit $x+\alpha$ oder $x-\beta$ multiplicirt, und beym Producte $Z(x+\alpha)$ nicht so viele Abwechslungen der Zeichen, oder bey $Z(x-\beta)$ nicht so viele Folgen der Zeichen findet, als ihrer in $Z=0$ waren; so wird dieses ein sicheres Zeichen seyn, daß die Gleichung $Z=0$ nicht lauter mögliche, sondern auch unmögliche Wurzeln, vielleicht alle, oder doch einige hat.

7. Zusatz.

Wenn übrigens alle Wurzeln einer Gleichung möglich sind, und man das Zeichen des zweyten, vierten, sechsten und jedes in gerader Ordnung folgenden Gliedes verändert, daher + aus — und — aus + machet; so entstehet eine andere Gleichung, welche alle Wurzeln der vorigen Gleichung hat, nur mit dem Unterschiede, daß die Wurzeln

bey

bey der neuen Gleichung bejaht oder verneint sind, welche bey der vorigen verneint oder bejaht waren. Durch diese Veränderung der Zeichen werden nämlich die Abwechslungen in Folgen, und diese in jene (118. §.), daher auch bejahte Wurzeln in verneinte, und diese in jene verwandelt (1. 2. Zus.).

Z. B. Sey die Gleichung $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, welche nach (1. 2. Zus.) zwo bejahte Wurzeln und eine verneinte haben muß, und es sind auch ihre Wurzeln wirklich $-1, +1, +3$ (94. §.).

Schreibt man $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$; so müssen hier nach (1. 2. Zus.) zwo verneinte Wurzeln und eine bejahte vorhanden seyn, und es sind auch alle drey Wurzeln $1, -1, -3$ (94. §.).

Auch $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ soll nach (1. 2. Zus.) eine bejahte und drey verneinte Wurzeln haben; sie sind nach (94. §.) $5; -2; -3; -4$. Schreibt man aber $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$; so muß diese Gleichung nach (1. 2. Zus.) eine verneinte und drey bejahte Wurzeln haben, und alle vier Wurzeln sind wirklich $-5, +2, +3, +4$ (94. §.).

Anhang des Herausgebers.

Die Sätze (1. 2. Zus.) sind hier auf eine ähnliche Art bewiesen worden, wie dieses Hr. Hofrath Kästner [a] gethan hat: was bey ihm eine Differentialgleichung heißt, das war hier eine Exponentialgleichung (114. §. Anm.), und was der Herr Hofrath durch Betrachtung einer krummen

linie bewies, das ist hier aus der bloßen arithmetischen Betrachtung der Gleichungen deutlich und überzeugend hergeleitet worden. Nun will ich noch zeigen, wie man die bekannten und von den Coefficienten der Glieder einer Gleichung abhängenden Kennzeichen unmöglicher Wurzeln, vermittelst der oben erklärten Exponentialgleichungen, auf eine gleiche Art bestimmen kann, wie sie gewöhnlich, z. B. von Hrn. Euler (b), Hrn. Hofr. Karsten (c) mit Hilfe der Differentialgleichungen bestimmt werden, und dieses soll eigentlich die in (117. §. Anm.) versprochene Ergänzung seyn.

(a) Anfangsgr. der Analys. des Unendlichen. 186—192 §.
(b) Institut. Calc. Differ. P. poster. Cap. XIII.
(c) Anfangsgr. der Mathem. Analysis. IX. Abschn. 248. §.

121. §. Aufgabe.

Aus den Coefficienten einer gegebenen Gleichung zu beurtheilen, ob dieselbe einige Paare unmöglicher Wurzeln hat.

Auflösung. 1) Die vorgelegte Gleichung sey

$$Z = x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + Fx^{m-5} + \ldots + U = 0.$$

2) Die rte Exponentialgleichung ist für die Hauptgleichung $Z = 0$ nach (113. §. 9. Zus.).

$$\left.\begin{aligned} L^r = {} & m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-(r-1))x^{m-r} \\ & +(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-(r-1))(m-r)x^{m-r-1}A \\ & +(m-2)(m-3)(m-4)\cdots(m-(r-1))(m-r) \\ & \qquad (m-r-1)x^{m-r-2}B \\ & +(m-3)(m-4)\cdots(m-(r-1))(m-r)(m-r-1) \\ & \qquad (m-r-2)x^{m-r-3}C \\ & +\cdots\cdots\cdots \\ & +\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} = 0$$

Oder, wenn man alles durch den Coefficient des ersten Gliedes dividirt, ist

$$L^r = x^{m-r} + \frac{m-r}{m}Ax^{m-r-1} + \frac{(m-r)(m-r-1)}{m(m-1)}Bx^{m-r-2} + \frac{(m-r)(m-r-1)(m-r-2)}{m(m-1)(m-2)}Cx^{m-r-3} + \cdots = 0.$$

3) Setzt man in (n. 2.) $r = m-2$, daher $m-r = 2$; so findet man die $(m-2)$te Exponentialgleichung

$$x^2 + \frac{2A}{m}x + \frac{2B}{m(m-1)} = 0.$$

4) Wenn aber die vorgelegte Gleichung (n. 1.) lauter mögliche Wurzeln hat; so müssen auch die Wurzeln der Gleichung (n. 3.) möglich seyn (113. §. 10. Zus.): also muß $\frac{1}{4}\left(\frac{2A}{m}\right)^2 > \frac{2B}{m(m-1)}$ (94. §. 3. Zus.), oder $A^2 > \frac{2mB}{m-1}$ seyn, und wenn $A^2 < \frac{2mB}{m-1}$ ist; so hat die Gleichung (n. 3.) ein Paar unmöglicher Wurzeln, daher hat es auch jede rte Exponentialgleichung (n. 2.), und so auch die Hauptgleichung (n. 1.) selbst (113. §. 8, 10. Zus.).

5) Man ſetze $x=\frac{1}{y}$ in (n. 1.); ſo findet man aus $Z=0$ (n. 1.) eine andere Gleichung, nämlich

$$X=\frac{1}{y^m}+\frac{A}{y^{m-1}}+\frac{B}{y^{m-2}}+\frac{C}{y^{m-3}}+\frac{D}{y^{m-4}}+\frac{E}{y^{m-5}}+\ldots=0,$$

oder

$$X=y^0+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+Ey^5+Fy^6+\ldots+Uy^m=0.$$

Da alſo aus dieſer Gleichung die Gleichung $Z=0$ in (n. 1.) entſtehet, wenn man $y=\frac{1}{x}$ machet; ſo wird auch aus jeder Wurzel $x=\alpha$ der vorgelegten Gleichung $Z=0$ in (n. 1.) eine Wurzel der Gleichung $X=0$ erhalten, wenn man ſie $y=\frac{1}{x}=\frac{1}{\alpha}$ machet (94. §.): wenn alſo alle Wurzeln der Gleichung $Z=0$ in (n. 1.) möglich ſind; ſo müſſen auch alle Wurzeln der Gleichung $X=0$ möglich ſeyn.

6) Durch die Multiplication der Glieder von $X=0$ in (n. 5.) mit den zugehörigen Exponenten von y findet man die erſte Exponentialgleichung, die ich mit $l=0$ bezeichnen will: aus dieſer entſtehet auf gleiche Art die zweyte Exponentialgleichung $l^2=0$, und aus dieſer die dritte $l^3=0$ u. ſ. f. (113. §. 9. Zuſ.). Daher ſind die Exponentialgleichungen für die Hauptgleichung (n. 5.)

$$1 = Ay + 2By^2 + 3Cy^3 + 4Dy^4 + 5Ey^5 + 6Fy^6 + \ldots + mUy^m = 0$$

$$\text{oder } 1 = y^0 + \frac{2B}{A}y + \frac{3C}{A}y^2 + \frac{4D}{A}y^3 + \frac{5E}{A}y^4 + \frac{6F}{A}y^5 + \ldots + \frac{mU}{A}y^{m-1} = 0$$

$$\text{daher } 1^2 = \frac{2B}{A}y + \frac{2.3C}{A}y^2 + \frac{3.4D}{A}y^3 + \frac{4.5E}{A}y^4 + \ldots + \frac{m(m-1)U}{A}y^{m-1} = 0$$

$$\text{oder } 1^2 = y^0 + \frac{6C}{2B}y + \frac{12D}{2B}y^2 + \frac{20E}{2B}y^3 + \ldots + \frac{m(m-1)U}{2B}y^{m-2} = 0$$

$$\text{daher } 1^3 = \frac{6C}{2B}y + \frac{24D}{2B}y^2 + \frac{60E}{2B}y^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)U}{2B}y^{m-3} = 0$$

$$\text{oder } 1^3 = y^0 + \frac{24D}{6C}y + \frac{60E}{6C}y^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)}{6C}y^{m-3} = 0$$

u. s. f.

7) Da nun alle Wurzeln von $X = 0$ möglich seyn müssen, wenn alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung $Z = 0$ möglich seyn sollen (n. 5.); so müssen bey dieser Voraussetzung auch alle Wurzeln der Exponentialgleichungen (n. 6.) möglich seyn.

8) Setzt man $x = \frac{1}{y}$; daher $y = \frac{1}{x}$ in $1 = 0$ (n. 6.); so wird daraus folgende Gleichung entstehen.

$$1 + \frac{2B}{Ax} + \frac{3C}{Ax^2} + \frac{4D}{Ax^3} + \frac{5E}{Ax^4} + \ldots + \frac{mU}{Ax^{m-1}} = 0$$

oder

$$I)\ x^{m-1} + \frac{2B}{A}x^{m-2} + \frac{3C}{A}x^{m-3} + \frac{4D}{A}x^{m-4} + \ldots + \frac{mU}{A} = 0$$

Thut man ein Gleiches bey $1^2 = 0$ in (n. 6.); so findet man daraus folgende Gleichung:

$$1 + \frac{6C}{2Bx} + \frac{12D}{2Bx^2} + \frac{20E}{2Bx^3} + \ldots + \frac{m(m-1)U}{2Bx^{m-2}} = 0$$

oder

$$II)\ x^{m-2} + \frac{6C}{2B}x^{m-3} + \frac{12D}{2B}x^{m-4} + \frac{20E}{2B}x^{m-5} + \ldots + \frac{m(m-1)U}{2B} = 0.$$

Es ist auch nun gewiß, daß Gleichungen wie I) und II) lauter mögliche Wurzeln haben müssen, wenn sie die Gleichungen $1 = 0$, $1^2 = 0$ in (n. 6.) haben sollen, wovon die Ursache aus (n. 5.) erhellet: da also die Gleichungen in (n. 6.) lauter mögliche Wurzeln haben, wenn dieselben die vorgelegte Gleichung $Z = 0$ in (n. 1.) haben soll (n. 7.); so müssen in dem Fall auch die Gleichungen I) und II) lauter mögliche Wurzeln haben.

9) Für die Gleichungen I) und II) in (n. 8.) kann man nach (113. §. 9. Zus.) verschiedene Exponentialgleichungen bestim-

bestimmen, und man kann aus (113. §. 9. Zus.) auch leicht abnehmen, wie die rten Exponentialgleichungen bey den Hauptgleichungen I) II) in (n. 8.) aussehen würden: für I) in (n. 8.) wäre nämlich:

Die erste Exponentialgleichung.

$$(m-1)x^{m-2}+\frac{2(m-2)B}{A}x^{m-3}+\frac{3(m-3)C}{A}x^{m-4}+\ldots=0$$

Die zweyte Exponentialgleichung.

$$(m-1)(m-2)x^{m-3}+\frac{2(m-2)(m-3)B}{A}x^{m-4}+\frac{3(m-3)(m-4)C}{A}x^{m-5}+\ldots=0$$

Die dritte Exponentialgleichung.

$$(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}+\frac{2(m-2)(m-3)(m-4)B}{A}x^{m-5}+\frac{3(m-3)(m-4)(m-5)C}{A}x^{m-6}+\ldots=0$$

Also die rte Exponentialgleichung.

$$\left.\begin{array}{l}(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-r)x^{m-r-1}\\ +\frac{2(m-2)(m-3)\ldots(m-r)(m-r-1)B}{A}x^{m-r-2}\\ +\frac{3(m-3)(m-4)\ldots(m-r)(m-r-1)(m-r-2)C}{A}x^{m-r-3}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=0$$

$$\text{oder } x^{m-r-1}+\frac{2(m-r-1)B}{(m-1)A}x^{m-r-2}+\frac{3(m-r-1)(m-r-2)C}{(m-1)(m-2)A}x^{m-r-3}+\ldots=0$$

Und wenn man hier $r = m - 3$, demnach $m - r = 3$ setzt, so verwandelt sich die unbestimmte rte Exponentialgleichung in die folgende $(m-3)$te quadratische Exponentialgleichung.

$$\text{III)}\quad x^2 + \frac{2.2B}{(m-1)A}x + \frac{3.2.1C}{(m-1)(m-2)A} = 0$$

Eben so findet man aus II) in (n. 8.)

Die erste Exponentialgleichung.

$$(m-2)x^{m-3} + \frac{6(m-3)C}{2B}x^{m-4} + \frac{12(m-4)D}{2B}x^{m-5} + \ldots = 0$$

Die zweyte Exponentialgleichung.

$$(m-2)(m-3)x^{m-4} + \frac{6(m-3)(m-4)C}{2B}x^{m-5} + \frac{12(m-4)(m-5)D}{2B}x^{m-6} + \ldots = 0$$

Die dritte Exponentialgleichung.

$$(m-2)(m-3)(m-4)x^{m-5} + \frac{6(m-3)(m-4)(m-5)C}{2B}x^{m-6} + \frac{12(m-4)(m-5)(m-6)D}{2B}x^{m-7} + \ldots = 0$$

Also die rte Exponentialgleichung.

$$\left.\begin{array}{l} (m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-r-1)x^{m-r-2} \\ + \frac{6(m-3)(m-4)\ldots(m-r-1)(m-r-2)C}{2B}x^{m-r-3} \\ + \frac{12(m-4)(m-5)\ldots(m-r-1)(m-r-2)(m-r-3)D}{2B}x^{m-r-4} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

oder

oder $x^{m-r-2} + \frac{6(m-r-2)C}{2(m-2)B} x^{m-r-3}$

$+ \frac{12(m-r-2)(m-r-3)D}{2(m-2)(m-3)B} x^{m-r-4} + \ldots = 0.$

Und wenn man hier $r = m-4$, daher $m-r=4$ nimmt; so verwandelt sich diese rte Exponentialgleichung in die folgende $(m-4)$te quadratische Exponentialgleichung.

IV) $x^2 + \frac{6.2C}{2(m-2)B} x + \frac{12.2.1D}{2(m-2)(m-3)B} = 0$

oder $x^2 + \frac{6C}{(m-2)B} + \frac{12D}{(m-2)(m-3)B} = 0.$

10) Da nun die Gleichungen I) und II) in (n. 8.) lauter mögliche Wurzeln haben müssen, wenn dieses bey der Hauptgleichung $Z=0$ in (n. 1.) geschehen soll, und, wenn jenes wahr seyn soll, nun auch die Exponentialgleichungen III) und IV) in (n. 9.) lauter mögliche Wurzeln haben müssen (113. §. 10. Zus.); so kann die Hauptgleichung $Z=0$ in (n. 1.) nicht alle mögliche Wurzeln haben, wenn nicht beyde Wurzeln jeder Exponentialgleichung III) und IV) in (n. 9.) möglich sind. Da also bey den nachstehenden Bedingungen die Wurzeln der quadratischen Gleichungen III) und IV) in (n. 9.) gewiß unmöglich sind (94. §. 3. Zus.); so sind diese Bedingungen zugleich sichere Kennzeichen unmöglicher Wurzeln bey der Hauptgleichung $Z=0$ in (n. 1.).

Bey III) $\frac{1}{4}\left(\frac{16B^2}{(m-1)^2A^2}\right) < \frac{6C}{(m-1)(m-2)A}$

oder $B^2 < \frac{3(m-1)}{2(m-2)}AC.$

Bey IV) $\frac{1}{4}\left(\frac{36C^2}{(m-2)^2B^2}\right) < \frac{12D}{(m-2)(m-3)B}$

oder $C^2 < \frac{4(m-2)}{3(m-3)}BD.$

11) Auf dieſe Art konnte man demnach leicht finden, wie die Coefficienten A, B, C, D in (n. 1.) einer vorgelegten Gleichung von einander abhängen müſſen (n. 4. 10.), wenn alle Wurzeln der Gleichung $Z=0$ in (n. 1.) möglich ſeyn ſollen: man ſieht auch leicht ein, wie dieſe Arbeit fortgeſetzt werden könnte, wenn man gleiche Unterſuchungen auch über die folgenden Coeffcienten D, E, F, G ..... der Gleichung $Z=0$ in (n. 1.) anſtellen wollte. Man müßte nämlich in (n. 6.) auch die höheren Exponentialgleichungen beſtimmen, ſie hierauf nach (n. 3.) verwandeln, und mit den verwandelten nach (n. 9.) verfahren, um aus jeder eine quadratiſche Exponentialgleichung zu erhalten, wie die Gleichungen III) und IV) in (n. 9.) waren.

Wäre nämlich das für jeden folgenden Coefficient D, E, F .... der Gleichung $Z=0$ in (n. 1.) wahr, was für die erſten Coefficienten A, B, C wegen (n. 4. 10.) wirklich gielt; ſo könnte man A den erſten, B den zweyten, C den dritten ... P den $(r-1)$ten, Q den rten, und R den $(r+1)$ten Coefficient der Gleichung $Z=0$ in (n. 1.) nennen

nennen, und sagen, daß die Gleichung $Z=0$ so oft wenigstens ein Paar unmöglicher Wurzeln haben muß, wie oft der rte Coefficient Q von den anliegenden P und R nach der folgenden Bedingung abhängt:

$$Q^2 < \frac{(r+1)(m-r+1)}{r(m-r)} PR.$$

Setzt man nämlich hier 1, 2, 3, 4 - - - statt r; so findet man die Bedingungen, wie jede drey zunächst nach einander folgende Coefficienten der Gleichung $Z=0$ in (n. 1.) von einander abhängen müssen, wenn man daraus sicher schließen soll, daß die Gleichung $Z=0$ wenigstens ein Paar unmöglicher Wurzeln hat. Diese Bedingungen sind nämlich:

$$A^2 < \frac{2m}{m-1} 1.B; \quad B^2 < \frac{3(m-1)}{2(m-2)} AC;$$

$$C^2 < \frac{4(m-2)}{3(m-3)} BD; \quad D^2 < \frac{5(m-3)}{4(m-4)} CE;$$

$$E^2 < \frac{6(m-4)}{5(m-5)} DF; \quad F^2 < \frac{7(m-5)}{6(m-6)} EG;$$

u. s. f.

Doch darf man nicht meynen, daß die Gleichung $Z=0$ soviel Paare unmöglicher Wurzeln haben muß, wie viel solche Bedingungen zutreffen, weil sonst wohl geschehen könnte, daß die Gleichung so viel Paare unmöglicher Wurzeln haben müßte, wieviel Coefficienten A, B, C - - -, das letzte Glied ausgenommen (n. 1.) bey derselben Gleichung vorhanden wären, wenn nämlich eine solche Bedingung bey

jedem

jedem Coefficienten Statt fände, da doch eine solche Anzahl unmöglicher Wurzeln bey einer Gleichung nicht möglich ist. Wenn nämlich die Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m ist; so hat sie in allen nur m Wurzeln (96. §.), und $m+1$ Glieder, das erste und letzte Glied mitgerechnet, folglich ist die Anzahl solcher Bedingungen $=m+1-2=m-1$ möglich: wenn also die Gleichung für jede solche Bedingung ein Paar unmöglicher Wurzeln haben müßte; so könnte eine Gleichung, welche in allen nur m Wurzeln hat, $m-1$ Paare, folglich $2m-2$ unmögliche Wurzeln haben.

12) Geschieht es aber, daß solche Kennzeichen wechselsweise zutreffen, wie wenn man fände

$$A^2 < \frac{2m}{m-1} B; \quad B^2 > \frac{3(m-1)}{2(m-2)} AC;$$

$$C^2 < \frac{4(m-2)}{3(m-3)} BD; \quad D^2 > \frac{5(m-3)}{4(m-4)} CE;$$

$$E^2 < \frac{6(m-4)}{5(m-5)} DF; \quad F^2 > \frac{7(m-5)}{6(m-6)} EG;$$

u. s. f.

weil alsdann die Kennzeichen von einander nicht abhängen können; so kann man sicher aus jedem Kennzeichen von der Art (n. 11.) auf ein Paar unmöglicher Wurzeln der Hauptgleichung $Z=0$ schließen.

13) Hieraus folgt indessen noch nicht, daß die Hauptgleichung $Z=0$ nur soviel Paare unmöglicher Wurzeln hat, als Kennzeichen (n. 12.) da sind, und daß alle ihre Wurzeln möglich sind, wenn keine von den Bedingungen

(n. 11.)

(n. 11.) zutrifft: es kann nämlich $Z=0$ auch mehrere unmögliche Wurzeln haben, als Kennzeichen (n. 12.) wirklich zutreffen, und wenn auch kein Kennzeichen (n. 11.) zuträffe, wenn demnach die Exponentialgleichungen (n. 9.) lauter mögliche Wurzeln hätten; so könnten doch ihre Hauptgleichungen (n. 8.) unmögliche Wurzeln haben (13. §. 7. Zuſ.), in welchem Fall auch die Hauptgleichung $Z=0$ in (n. 1.) unmögliche Wurzeln haben würde (n. 8.).

Der XIII. Abſchnitt.

Von der Auflöſung höherer Gleichungen überhaupt.

122. §. Aufgabe.

Zu unterſuchen, ob nicht eine vorgelegte rationale Gleichung unmögliche Wurzeln hat.

Auflöſung. I) Wenn eine Gleichung $Z=0$ gegeben iſt; ſo nehme man eine beliebige Zahl α, und multiplicire $Z=0$ mit $x+\alpha=0$ oder mit $x-\alpha=0$: findet man nun, daß bey $Z(x+\alpha)=0$ nicht ſo viele Abwechslungen der Zeichen (118. §.), oder bey $Z(x-\alpha)=0$ nicht ſo viele Folgen (daſ.) vorhanden ſind, als ihrer in der vorgelegten Gleichung $Z=0$ vorkommen; ſo wird dieſes ein Zeichen ſeyn, daß $Z=0$ nicht lauter mögliche Wurzeln hat (120. §. 6. Zuſ.).

Beyſpiele.

Beyspiele.

Sey die Gleichung $Z = x^2 - 2x + 7 = 0$ gegeben, und man soll untersuchen, ob es nicht für sie unmögliche Wurzeln giebt.

Man multiplicire $Z = 0$ mit $x + \alpha = 0$; so findet man folgende Gleichung.

$$Z(x+\alpha) = x^3 - 2)x^2 + 7)x + 7\alpha = 0.$$
$$+\alpha) \quad -2\alpha)$$

Machet man nun $\alpha > 2$, und doch $2\alpha < 7$, daher $\alpha < 3 + \frac{1}{2}$; so sind schon alle Glieder dieser Gleichung bejaht; es hat daher diese Gleichung keine Abwechslungen der Zeichen (118. §.), da doch $Z = 0$ zwo Abwechslungen hat: die Gleichung $Z = 0$ muß also unmögliche Wurzeln haben (120. §. 6. Zus.), und weil sie nur zwo Wurzeln haben kann (96. §.); so sind beyde unmöglich (115. §.).

Anmerkung.

Weil man nämlich $Z = 0$ mit $x + \alpha = 0$, welches $x = -\alpha$ giebt, multiplicirt hat; so muß die neue Gleichung $Z(x+\alpha) = 0$ ausser der verneinten Wurzel $-\alpha$ noch die beyden Wurzeln von $Z = 0$ haben (96. § 2. Zus.): da also für $\alpha > 2$ und $\alpha < 3 + \frac{1}{2}$, z. B. für $\alpha = 3$ die Gleichung $Z(x+\alpha) = 0$ lauter bejahte Glieder, folglich lauter Folgen der Zeichen hat (118. §.); so müßten alle ihre Wurzeln, daher auch die Wurzeln von $Z = 0$ verneint seyn, wenn alle möglich wären (120. §. 2. Zus.): weil ferner bey $Z = 0$ zwo Abwechslungen vorhanden sind (118. §.);

so

so müßten beyde Wurzeln von $Z=0$ bejaht seyn, wenn sie mögliche Wurzeln wären (120. §. 2. Zus.): wenn man daher annimmt, daß $Z=0$ nur mögliche Wurzeln hat; so müßte man auch annehmen, daß beyde Wurzeln zugleich bejaht und verneint sind, welches unmöglich ist.

So wie dieses allemahl ein sicheres Zeichen unmöglicher Wurzeln ist, eben so kann man doch nicht sagen, daß die vorgelegte Gleichung lauter mögliche Wurzeln hat, wenn sie mit $x+\alpha=0$ oder mit $x-\alpha=0$ multiplicirt eben so viele Abwechslungen der Zeichen, oder Folgen derselben erhält, wie viel ihrer sie vor der Multiplication gehabt hat. Man nehme z. B. die Gleichung $x^3+3x^2+2x+6=0$, welche drey Folgen der Zeichen hat, daher alle verneinte Wurzeln haben würde, wenn alle möglich wären (120. §. 2. Zus.); man multiplicire nun diese Gleichung mit $x-4=0$; so giebt sie eine neue Gleichung $x^4-x^3-10x^2-2x-24=0$, welche ebenfalls drey Folgen der Zeichen hat, und dennoch sind zwo Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung unmöglich, nämlich die eine Wurzel ist $=\sqrt{-2}$ und die andere $=-\sqrt{-2}$ (94. §.).

II) Wenn ein Glied bey der vorgelegten Gleichung fehlet, und man statt dessen erstlich $+0$ hierauf -0 nimmt; so muß man darauf Achtung geben, ob die Gleichung sowohl für $+0$ als für -0, statt des fehlenden Gliedes genommen, einerley Anzahl von Abwechslungen und Folgen erhält (118. §.): geschieht dieses; so wird man daraus nichts sicher schließen können: geschieht es aber nicht;

nicht; so wird man sicher seyn, daß die vorgelegte Gleichung unmögliche Wurzeln hat. Es ist nämlich gestattet, das Glied, welches $=0$ ist, sowohl bejaht, als verneint anzunehmen, ohne die Wurzeln der Gleichung dadurch zu ändern (94. §.): wenn nun alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung möglich sind; so hat dieselbe eine bestimmte Anzahl von bejahten und verneinten Wurzeln, folglich muß auch eine bestimmte Anzahl von Abwechslungen und Folgen der Zeichen (118. §.) da seyn, man mag das fehlende Glied für bejaht, oder $=+0$, oder für verneint $=-0$ annehmen (120. §. 2. Zus.): geschieht es also nicht; so muß die Gleichung unmögliche Wurzeln haben. Dieses trifft allemahl zu, wenn das nächst vorhergehende und das nächst folgende Glied einerley Zeichen haben: wenn nämlich die Ordnung der Zeichen bey den drey Gliedern $+*+$ oder $-*-$ ist; so findet man bey ihnen im ersten Fall für $+0$ zwo Folgen, und für -0 zwo Abwechslungen; im zweyten Fall aber findet man bey ihnen für $+0$ zwo Abwechslungen, und für -0 zwo Folgen.

Aus diesen Gründen und auf gleiche Art kann man sich davon leicht überzeugen, daß diejenige Gleichung, bey welcher mehrere zunächst auf einander folgende Glieder fehlen, allemahl unmögliche Wurzeln haben muß; man wird nämlich finden, daß, wenn man erstlich statt jedes fehlenden Gliedes $+0$, sodann -0 in der Gleichung setzt, nicht allemahl einerley Anzahl von Abwechslungen und Folgen heraus-

herauskömmt; da doch dieses geschehen müßte, wenn alle Wurzeln derselben Gleichung möglich wären, sie demnach eine bestimmte Anzahl von bejahten und von verneinten Wurzeln hätte (120. §. 2. Zus.).

III) Wenn man die erste Exponentialgleichung nimmt, welche der gegebenen Gleichung $Z=0$ zugehören soll (113. §. 9. Zus.), und man die Wurzeln derselben Exponentialgleichung bestimmen kann; so wird man vermittelst dieser Wurzeln auf folgende Art untersuchen können, ob nicht die gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln hat.

Man nenne a, b, c, d, e, f.---- in A) (wie es unten folgt) die Wurzeln der vorgelegten Gleichung $Z=0$, und in B) schreibe man die bekannten Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$---ihrer ersten Exponentialgleichung, welche so geordnet werden sollen, daß α die größte Wurzel sey, und darauf $\beta \prec \alpha$, $\gamma \prec \beta$, $\delta \prec \gamma$ u. s. f. folge, wobey die verneinten Wurzeln, wofern welche da sind, in der Bedeutung (7. §. Anm. I. n. 6.) genommen werden: man setze ferner unter α das Zeichen (—), unter β das Zeichen (+), unter γ das Zeichen (—), unter δ das Zeichen (+), und so wechsle man damit immer fort.

Nun suche man auch diejenigen Werthe, welche die Function Z bey der vorgelegten Gleichung $Z=0$ erlangen würde, wenn man in ihr erstlich α, hernach β, sodann γ und s. f. jede in B) folgende Wurzel der Exponentialgleichung statt x nähme, und schreibe dieselben Werthe mit ihren eigenen Zeichen (+ oder —; nachdem sie bejaht oder

verneint ſind) bey C) in p, q, r, s, t .... unter denjenigen Wurzeln von B), für welche ſie, ſtatt x in Z genommen, erhalten werden; ſo kömmt nun alles auf die Vergleichung dieſer Werthe in C) mit den bey B) darüber ſtehenden Zeichen an.

A) a b c d e f .....

B) α β γ δ ε .....

— + — + — .....

C) p q r s t .....

Findet man, daß die Werthe in C) mit eben den Zeichen verſehen ſind, die ſie über ſich in B) haben; ſo wird dieſes ein ſicheres Kennzeichen ſeyn; daß die vorgelegte Gleichung $Z=0$ eine mögliche Wurzel $a>\alpha$, eine andere b zwiſchen α und β, eine dritte c zwiſchen β und γ und ſ. f. hat (113. §. 7. Zuſ.).

Wenn es aber in C) ſolche Werthe giebt, welche vor ſich Zeichen haben, die mit den in B) darüber befindlichen Zeichen nicht übereinſtimmen, daher bejahte Werthe in C) unter verneinten Zeichen von B), und verneinte Werthe in C) unter bejahten Zeichen von B) vorkommen; ſo wird die vorgelegte Gleichung $Z=0$ wenigſtens ſo viel Paare unmöglicher Wurzeln haben, als es in C) Werthe giebt, welche mit den darüber bey B) befindlichen Zeichen nicht übereinſtimmen. Hat man z. B. in C den Werth + p unter dem Zeichen — bey α in B); ſo giebt es keine mögliche Wurzel für die Gleichung $Z=0$ zwiſchen ∞ und β: denn gäbe es eine; ſo müßte es auch mehrere geben (112.§.),

indem

indem Z für $x = \infty$, $x = \alpha$, $x = \beta$ bejahte Werthe $+\infty$, $+p$, $+q$ erlangen soll, und nun müßte es auch zwischen ∞ und β einen Werth für x geben, wobey Z ein verneintes Größte erlangen würde (112. §. n. 3. und 113. §. 1. Zus.) und dieser Werth wäre eine Wurzel der Exponentialgleichung von $Z = 0$ (113. §.), da doch zwischen ∞ und β ausser α keine andere Wurzel derselben Exponentialgleichung liegen soll: anstatt daß die Gleichung $Z = 0$ zwo mögliche Wurzeln a, b zwischen ∞ und β haben könnte, hat sie also in diesem Fall zwo unmögliche Wurzeln.

Kömmt q mit dem Zeichen (—) vor, welches dem darüber in B) befindlichen entgegengesetzt ist; so hat die Gleichung $Z = 0$ keine Wurzel zwischen α und γ, daher hat sie zwo unmögliche Wurzeln dafür, anstatt daß sie zwo mögliche Wurzeln b, c haben könnte, wenn q das Zeichen (+) vor sich hätte.

Kömmt r mit (+) vor, weil (—) darüber stehet; so hat die Gleichung $Z = 0$ keine Wurzel zwischen β und δ, folglich hat sie statt zwoer möglichen Wurzeln c, d ein Paar unmöglicher u. s. f.

Beyspiel.

Man soll beurtheilen, ob die Gleichung $Z = x^4 - 14x^2 + 24x - 12 = 0$ unmögliche Wurzeln hat.

Die Exponentialgleichung ist (113. §. 9. Zusatz) $L = 4x^4 - 28x^2 + 24x = 0$, oder, wenn man alles

durch 4x dividirt, $L = x^3 - 7x + 6 = 0$, und die Wurzeln dieser Gleichung sind 2, 1, — 3 nach (94. §.). Nun ist:

$Z = 2^4 - 14.2^2 + 24.2 - 12 = -4$ für $x = 2$;

$Z = 1^4 - 14.1^2 + 24.1 - 12 = -1$ für $x = 1$;

$Z = (-3)^4 - 14(-3)^2 + 24(-3) - 12 = -129$ für $x = -3$;

Man schreibe demnach die Wurzeln 2, 1, — 3, statt α, β, γ, und die Werthe — 4, — 1, — 129 statt p, q, r, wie folgt:

A)	a,	b,	c, d
B)	2,	1,	−3
	—	+	—
C)	−4	−1,	−129

Weil der Werth — 4 in C) von Z für $x = 2$ in B) mit dem darüber in B) befindlichen Zeichen übereinstimmt; so hat die vorgelegte Gleichung $Z = 0$ gewiß eine mögliche Wurzel a zwischen ∞ und 2, daher eine > 2. Der nächst folgende Werth — 1 von Z in C) für $x = 1$ in B) stimmt mit dem darüber in B) befindlichen Zeichen nicht überein: also hat die vorgelegte Gleichung $Z = 0$ keine Wurzeln b, c zwischen 2 und — 3, sie hat vielmehr statt derselben zwo unmögliche Wurzeln. Endlich stimmt der Werth — 129 von Z in C) für $x = -3$ in B) mit dem darüber stehenden Zeichen überein, daher, weil $Z = -129$ für $x = -3$, und $Z = \infty^4$ für $x = -\infty$ wird, muß die Gleichung $Z = 0$ die vierte, aber mögliche, Wurzel d gewiß zwischen — 3 und $-\infty$ haben (111. §.).

Anmer-

Anmerkung.

Bey höheren Gleichungen hat es freylich seine Schwierigkeiten, wenn man auf diese Art die Wirklichkeit unmöglicher Wurzeln bey einer Gleichung entdecken will: es ist nämlich ein seltner Fall, daß die Wurzeln der Exponentialgleichung bestimmt werden können. Wenn sich indessen dieser Fall ereignet, und man findet, daß die Exponentialgleichung ausser den bestimmten möglichen Wurzeln auch einige Paare unmöglicher Wurzeln hat; so wird auch die vorgelegte Gleichung ausser denjenigen unmöglichen Wurzeln, welche man vermittelst der möglichen Wurzeln der Exponentialgleichung auf die angeführte Art vielleicht entdecken wird, noch so viel Paare unmöglicher Wurzeln haben müssen, als ihrer die Exponentialgleichung hat (115. §. 2. Zus.).

Kann man die Wurzeln der Exponentialgleichung nicht genau angeben; so versuche man die höheren Exponentialgleichungen (113. §. 9. Zus.) zu nehmen, bis man auf die quadratische Exponentialgleichung kömmt, deren Wurzeln nach (94. §. 2. 3. Zus.) bestimmt werden können: wenn beyde Wurzeln dieser quadratischen Exponentialgleichung unmöglich sind; so wird auch die nächst vorhergehende cubische Exponentialgleichung, und so auch die Hauptgleichung selbst gewiß ein Paar unmöglicher Wurzeln haben (113. §. 8. 10. Zus.): sind aber beyde Wurzeln möglich; so wird man vermittelst dieser Wurzeln auf die angeführte Art untersuchen können, ob es nicht für die nächst vorhergehende cubische Exponentialgleichung ein Paar unmöglicher

Wurzeln giebt, welches ein sicheres Zeichen wäre, daß die Hauptgleichung selbst wenigstens ein Paar unmöglicher Wurzeln haben muß.

Zugabe des Herausgebers.

IV) Man kann bey diesen Untersuchungen die Neutons Regel (121. §) mit Vortheile benutzen.

Es mag nämlich eine Gleichung von der Ordnung m gegeben seyn, wie die nachstehende ist: nun schreibe man über jedem Gliede derselben, das erste und letzte Glied ausgenommen, einen Bruch nach dem Gesetze, welches man unten bemerken kann, hierauf multiplicire man den über jedem Gliede befindlichen Bruch mit dem Product aus den Coefficienten der nächst anliegenden Glieder, und sehe, ob das Quadrat des Coefficienten, worüber ein solcher Bruch stehet, grösser oder kleiner ist, als das gefundene Product; im ersten Fall setze man unter eben dem Gliede das Zeichen (+), im zweyten Fall aber das Zeichen (—), unter dem ersten und letzten Gliede setze man hingegen allemahl (+): denn es wird nun die vorgelegte Gleichung wenigstens so viele unmögliche Wurzeln haben müssen, als Abwechslungen der Zeichen (118. §.) unter ihren Gliedern befindlich seyn werden (121. §. n. 12.).

$$x^m + \frac{2m}{m-1} A x^{m-1} + \frac{3(m-1)}{2(m-2)} B x^{m-2} + \frac{4(m-2)}{3(m-3)} C x^{m-3} + \frac{5(m-3)}{4(m-4)} D x^{m-4} + \frac{6(m-4)}{5(m-5)} E x^{m-5} + \frac{7(m-5)}{6(m-6)} F x^{m-6} + \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Bey-

Beyspiel.

Sey eine Gleichung von der sechsten Ordnung gegeben $x^6+4x^5-7x^4+2x^3+3x^2-10x+16=0$.

Weil hier $m=6$ ist; so wird man die Gleichung so schreiben müssen.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \frac{12}{5} & & \frac{15}{8} & \frac{16}{9} & & \frac{15}{8} & & \frac{12}{5} & \\ x^6 & + & 4x^5 & - & 7x^4 & + & 2x^3 & + & 3x^2 & - & 10x+16=0 \\ + & & + & & + & & + & & + & & - \quad + \end{array}$$

Es ist nämlich $4^2 > -7\left(\frac{12}{5}\right)$; ferner $(-7)^2 > 4.2.\frac{15}{8}$; ferner $2^2 > -7.3.\frac{16}{9}$; ferner $3^2 > -10.2.\frac{15}{8}$; endlich ist $(-10)^2 < 3.16.\frac{12}{5}$: also müssen alle Glieder unter sich das Zeichen (+) bekommen, das vorletzte Glied allein ausgenommen, welches (—) bekömmt. Da also bey diesen Zeichen nur zwo Abwechslungen (118. §.) vorhanden sind; so hat die Gleichung wenigstens ein Paar unmöglicher Wurzeln.

123. §. Aufgabe.

Die gleichen Wurzeln, welche vielleicht eine Gleichung hat, zu finden.

Auflösung. Es sey eine Gleichung $Z=0$ gegeben, und nun nehme man ihre erste Exponentialgleichung $L=0$ nach (113. §. 9. Zus.); so ist $L=0$ um einen Grad niedriger als $Z=0$. Man dividire also Z durch L, und,

Wurzeln giebt, welches ein ſicheres Zeichen wäre, daß die Hauptgleichung ſelbſt wenigſtens ein Paar unmöglicher Wurzeln haben muß.

Zugabe des Herausgebers.

IV) Man kann bey dieſen Unterſuchungen die Neutons Regel (121. §.) mit Vortheile benutzen.

Es mag nämlich eine Gleichung von der Ordnung m gegeben ſeyn, wie die nachſtehende iſt: nun ſchreibe man über jedem Gliede derſelben, das erſte und letzte Glied ausgenommen, einen Bruch nach dem Geſetze, welches man unten bemerken kann, hierauf multiplicire man den über jedem Gliede befindlichen Bruch mit dem Product aus den Coefficienten der nächſt anliegenden Glieder, und ſehe, ob das Quadrat des Coefficienten, worüber ein ſolcher Bruch ſtehet, gröſſer oder kleiner iſt, als das gefundene Product; im erſten Fall ſetze man unter eben dem Gliede das Zeichen (+), im zweyten Fall aber das Zeichen (—), unter dem erſten und letzten Gliede ſetze man hingegen allemahl (+): denn es wird nun die vorgelegte Gleichung wenigſtens ſo viele unmögliche Wurzeln haben müſſen, als Abwechslungen der Zeichen (118. §.) unter ihren Gliedern befindlich ſeyn werden (121. §. n. 12.).

$$x^m + \frac{2m}{m-1} A x^{m-1} + \frac{3(m-1)}{2(m-2)} B x^{m-2} + \frac{4(m-2)}{3(m-3)} C x^{m-3} + \frac{5(m-3)}{4(m-4)} D x^{m-4} + \frac{6(m-4)}{5(m-5)} E x^{m-5} + \frac{7(m-5)}{6(m-6)} F x^{m-6} + \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Bey-

L Z

$$3x^2-10x+8\,(x^3-5x^2+8x-4)\,\frac{1}{3}x-\frac{5}{9}$$

$$L.\frac{1}{3}x= \quad x^3-\frac{10}{3}x^2+\frac{8}{3}x$$

$$Z-L.\frac{1}{3}x= \quad -\frac{5}{3}x^2+\frac{16}{3}x-4=A$$

$$L.\left(-\frac{5}{9}\right)= \quad -\frac{5}{3}x^2+\frac{50}{9}x-\frac{40}{9}$$

$$R=A-L.\left(-\frac{5}{9}\right)=-\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}.$$

$$\frac{L}{R}=\frac{3x^2-10x+8}{-\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}=-\frac{3\cdot 9}{2}x+18.$$

II. Die gleichen Wurzeln, wenn welche die Gleichung $Z=x^4-9x^3+30x^2-44x+24=0$ hat, zu finden.

Die erste Exponentialgleichung ist $L=4x^3-27x^2+60x-44=0$: suchet man nun, ob nicht Z und L einen größten gemeinschaftlichen Factor haben; so wird man einen $=(x-2)^2=0$ finden: also hat die vorgelegte Gleichung $Z=0$ gewiß drey gleiche Wurzeln, jede $=2$.

III. Die gleichen Wurzeln von $Z=x^4-5x^3+9x^2-7x+2=0$ zu finden, wenn einige da sind.

Die erste Exponentialgleichung ist $L=4x^3-15x^2+18x-7=0$, und man wird finden, daß die Functionen Z und L den größten gemeinschaftlichen Factor $=(x-1)^2$

haben: alſo hat auch $Z=0$ gewiß drey gleiche Wurzeln, wovon jede $=1$ iſt.

1. Zuſatz.

Wenn man gefunden hat, daß eine Gleichung $Z=0$ eine Anzahl n von gleichen Wurzeln hat, wovon jede $=\alpha$ oder $=-\alpha$ iſt; ſo kann man $Z=0$ durch $(x\mp\alpha)^n=0$ dividiren, und dadurch eine um n Grade niedrigere Gleichung zum Quotienten erhalten (96. §. 1. Zuſ.), welche nur die übrigen ungleichen Wurzeln von $Z=0$ enthält, und dieſe kann man hierauf leicht beſtimmen, wenn der Quotient eine einfache, oder quadratiſche Gleichung iſt.

Im erſten Beyſpiele hatte die Gleichung $Z=0$ zwo gleiche Wurzeln, jede $=2$: dividirt man daſelbſt $Z=0$ durch $(x-2)^2=x^2-4x+4=0$; ſo iſt der Quotient $x-1=0$, folglich iſt $x=1$ die dritte Wurzel von $Z=0$ im erſten Beyſpiele. Beym zweyten Beyſpiele hatte $Z=0$ drey gleiche Wurzeln, jede $=2$: dividirt man daſelbſt $Z=0$ durch $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8=0$; ſo iſt der Quotient $x-3=0$, folglich iſt $x=3$ die vierte Wurzel von $Z=0$ beym zweyten Beyſpiele.

Man wird ferner finden, daß die Gleichung $Z=x^4+13x^3+48x^2+45x-17=0$ zwo gleiche Wurzeln hat, jede $=-3$: man dividire demnach $Z=0$ durch $(x+3)^2=x^2+6x+9=0$; ſo giebt der Quotient die quadratiſche Gleichung $x^2+7x-3=0$. Nun aber hat dieſe Gleichung eine Wurzel $=\frac{1}{2}(-7+\sqrt{61})$, und

die

die andere $= \frac{1}{2}(-7-\sqrt{61})$: die Gleichung $Z = 0$ hat demnach diese vier Wurzeln; $-3; -3; \frac{1}{2}(-7+\sqrt{61})$; $\frac{1}{2}(-7-\sqrt{61})$.

2. Zusatz.

Weil jede Exponentialgleichung von den gleichen Wurzeln der Hauptgleichung um eine weniger haben muß, als die nächst vorhergehende Exponentialgleichung (114. §. Zus.); so kann man für eine Hauptgleichung $Z = 0$ alle Exponentialgleichungen, bis zur letzten einfachen Exponentialgleichung, nehmen, und dann versuchen, ob nicht die vorletzte quadratische Exponentialgleichung durch die letzte einfache ohne Rest dividirt werden kann: geschieht dieses; so hat die Hauptgleichung $Z = 0$ lauter gleiche Wurzeln, und jede von ihnen derjenigen gleich, welche der letzten einfachen Exponentialgleichung zugehört. Geschieht aber diese Division nicht ohne Rest; so versuche man, ob nicht die cubische Exponentialgleichung durch die quadratische ohne Rest dividirt werden kann: ist dieses möglich; so wird der Quotient eine von den gleichen Wurzeln geben, welche die Hauptgleichung haben soll: bleibt aber ein Rest übrig; so kann man eine solche Division mit der cubischen und der biquadratischen Exponentialgleichung versuchen, u. s. f. Dieses Verfahren kann keine Bequemlichkeiten haben, wofern die gegebene Gleichung nicht von einem sehr hohen Grad ist.

Es sey z. B. die Gleichung $Z=x^4+8x^3+24x^2+32x+16=0$ gegeben; so sind die zugehörigen Exponentialgleichungen nach (113. §. 9. Zus.)

$$L=4x^3+24x^2+48x+32=0.$$
$$L^2=12x^2+48x+48=0.$$
$$L^3=24x+48=0, \text{ oder } L^3=x+2=0.$$

Wenn man nun $L^2=0$ durch $L^3=0$ dividirt; so geschieht die Division ohne Rest, und der Quotient ist $x+2=0$, daher hat die Gleichung $Z=0$ vier gleiche Wurzeln, wovon jede $x=-2$ ist.

Nimmt man aber $Z=x^4-5x^3+9x^2-7x+2=0$; so sind die Exponentialgleichungen nach (113. §. 9. Zus.).

$$L=4x^3-15x^2+18x-7=0$$
$$L^2=12x^2-30x+18=0$$
$$L^3=24x-30=0; \text{ oder } L^3=x-\frac{5}{4}=0.$$

Dividirt man $L^2=0$ durch $L^3=0$; so erhält man den Quotienten $4x-5=0$ und den Rest $-\frac{1}{4}$: daher dividire man $L=0$ durch $L^2=0$. Da nun diese Division einen Rest $=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ giebt; so versuche man $L^2=0$ durch denselben Rest zu dividiren: diese Division geschieht ohne Rest; daher besteht $L^2=0$ aus dem Factor $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}=0$, oder $x-1=0$, $L_1=0$. aber aus dem Factor $(x-1)^2=0$, und $Z=0$ aus dem Factor $(x-1)^3=0$, welcher also drey gleiche Wurzeln, jede $x=1$, für die Gleichung $Z=0$ giebt.

3. Zusatz.

Wenn eine Wurzel $\pm\alpha$ einer Gleichung $Z=0$ bekannt ist, und man wissen will, ob nicht die Gleichung $Z=0$ mehrere Wurzeln $=\pm\alpha$ hat; so nehme man ihre erste

erste Exponentialgleichung $L=0$, und dividire dieselbe durch $x \mp \alpha = 0$: geschieht die Division ohne Rest; so wird dieses ein Beweis seyn, daß auch die erste Exponentialgleichung $L=0$ wenigstens eine Wurzel $x = \mp \alpha$ hat (95. §. 4. Zus.), daß daher die Hauptgleichung wenigstens zwo solche Wurzeln hat (114. §.).

124. §. Aufgabe.

Es ist eine Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m gegeben; man soll untersuchen, ob es nicht für sie eine rationale ganze Wurzel giebt.

Auflösung. Es wird vorausgesetzt, daß die Gleichung rational (91. §.) ist, und nur ganze Zahlen zu ihren Coefficienten hat. Da nun das letzte Glied jeder Gleichung $Z=0$ das Product aus allen Wurzeln derselben Gleichung seyn muß (98. §.); so müssen die Wurzeln unter den Factoren des letzten Gliedes stecken, wenn die Gleichung mögliche ganze Zahlen zu ihren Wurzeln hat.

Daher zerlege man das letzte Glied der gegebenen Gleichung in seine Factoren, nach (51. §.), und versuche hierauf, einen Factor nach dem andern, vom kleinsten an, statt x in Z zu setzen, wobey man jeden Factor bejaht nehmen muß, wenn man vermuthet, daß alle Wurzeln bejaht sind, (120. §. 2. Zus.), hingegen muß man jeden Factor verneint statt x nehmen, wenn die Gleichung lauter verneinte Wurzeln zu haben scheinet (a. a. O.), endlich muß man jeden Factor erstlich bejaht, hernach verneint statt x nehmen,

wenn

wenn die Gleichung bejahte und verneinte Wurzeln zu haben scheinet (a. a. O.): wenn nun die Function Z für einen gewissen Factor gleich Null wird; so kann man versichert seyn, daß dieser Factor eine Wurzel von $Z=0$ ist (94.§.): wird aber die Function Z für keinen Factor gleich Null; so wird dieses ein Zeichen seyn, daß die Gleichung $Z=0$ keine mögliche ganze Wurzel hat.

Beyspiele.

I. Man soll untersuchen, ob nicht die Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ ganze mögliche Zahlen zu ihren Wurzeln hat.

Die Factoren des letzten Gliedes 24 sind nach (51.§.) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Nun aber scheint die Gleichung zwo bejahte Wurzeln, und eine verneinte zu haben (120. §. 2. Zus.): man setze daher erstlich $x=1$, dann $x=2$, $x=3$, $x=4$ u. s. f. hernach versuche man auch $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$ und s. f. zu nehmen: bey dieser Arbeit wird man finden, daß die bey der vorgelegten Gleichung vorhandene Function für $x=2$, $x=4$, und $x=-3$ gleich Null wird, und so hat man die verlangten Wurzeln gefunden.

II. Man soll die möglichen ganzen Wurzeln bestimmen, welche die Gleichung $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ haben mag.

Die Factoren des letzten Gliedes 120 sind nach (51.§.) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

Die

Die Gleichung scheint nun drey bejahte Wurzeln, und eine verneinte zu haben; (122. §. 2. Zus.): man nehme also in ihr erstlich $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$ u. s. f. hernach $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$ u. s. f.; so wird man wahrnehmen, daß die bey der gegebenen Gleichung herrschende Function von x allemahl gleich Null wird, wenn man $x=2$, oder $x=3$, oder $x=4$, oder $x=-5$ nimmt, daher sind diese Zahlen die möglichen Wurzeln, welche dieselbe Gleichung hat.

1. Zusatz.

Wenn eine solche Gleichung gegeben wird, welche lauter bejahte, oder lauter verneinte Wurzeln zu haben scheinet (120. §. 3. Zus.); so kann kein Factor des letzten Gliedes eine Wurzel von ihr geben, welcher gröſſer ist, als der Coefficient des zweyten Gliedes (98. §.): bey der vorhergehenden Untersuchung kann man demnach in einem solchen Fall alle Factoren des letzten Gliedes weglassen, welche gröſſer sind, als der Coefficient des zweyten Gliedes.

2. Zusatz.

Wenn die Anzahl der Factoren des letzten Gliedes einer vorgelegten Gleichung sehr groß ist; so versuche man das zweyte Glied aus derselben Gleichung nach (102. §.) wegzuschaffen: es wird nämlich eine neue Gleichung entstehen, deren letztes Glied weniger Factoren hat, und nun wird man auch leichter untersuchen können, ob es für diese neue Gleichung mögliche ganze Wurzeln giebt, aus welchen hierauf

die

die Wurzeln der vorgelegten Gleichung durch bloße Addition oder Subtraction gefunden werden. Denn wenn x jede Wurzel der gegebenen, und y jede der neuen Gleichung heißt, und $+\alpha$ oder $-\alpha$ den Quotient bedeutet, um welchen nach (102. §.) jede Wurzel der gegebenen Gleichung vermehrt wird; so ist allemahl $y = x + \alpha$ oder $y = x - \alpha$: sobald also jede Wurzel y der neuen Gleichung bekannt seyn wird, sogleich wird man daraus jede Wurzel der gegebenen Gleichung im ersten Fall $x = y - \alpha$, und im zweyten $x = y + \alpha$ finden können.

Anmerkung.

Doch gehet dieses nicht allemahl an, ja man kömmt dadurch oft auf eine solche Gleichung, deren letztes Glied mehrere Factoren hat, als das letzte Glied der gegebenen Gleichung. Es giebt freylich verschiedene andere Kunstgriffe, die Anzahl der Factoren des letzten Gliedes bey dergleichen Untersuchungen zu vermindern; ich will aber hier nur eine Methode beybringen, indem das folgende genügen wird, solche Untersuchungen auf das möglichste zu erleichtern.

125. §. Aufgabe.

Aus einer gegebenen Gleichung $Z = 0$ eine andere zu machen, aus deren Wurzeln die Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ sich finden lassen, und bey der das letzte Glied weniger Factoren hat, als das letzte Glied der Gleichung $Z = 0$.

Auflösung. Man setze eine beliebige Zahl α statt x in Z, und sehe, ob nicht die Function Z für $x=\alpha$ einen Werth erlanget, welcher aus wenigeren Factoren bestehet, als das letzte Glied der Gleichung $Z=0$: hat man eine solche Zahl α getroffen, sie mag bejaht oder verneint seyn; so mache man $x-\alpha=y$, folglich $x=y+\alpha$, und nehme dieses statt x in $Z=0$, da dann gewiß eine andere Gleichung $X=0$ entstehen wird, aus deren jeder Wurzel y eine Wurzel $x=y+\alpha$ von $Z=0$ folgt, und deren letztes Glied gewiß weniger Factoren haben wird, als das letzte Glied von $Z=0$ hat.

Beweis. Sey

$$Z=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Px+Q=0;$$

und $S=\alpha^m+A\alpha^{m-1}+B\alpha^{m-2}+\ldots+P\alpha+Q$; für $x=\alpha$. Setzt man nun $x=y+\alpha$ in $Z=0$; so wird man aus $Z=0$ folgende Gleichung finden:

$$X=(y+\alpha)^m+A(y+\alpha)^{m-1}+B(y+\alpha)^{m-2}+\ldots+P(y+\alpha)+Q=0.$$

Wenn man aber die Glieder der verschiedenen Potenzen von $y+\alpha$ bey $X=0$ nach (76. §. 4. Zus.) entwickeln wollte; so würde man offenbar y^m für die höchste Potenz von y finden, und so wäre die neue Gleichung $X=0$ von mter Ordnung; folglich hätte sie m Wurzeln (96. §.), aus welchen, wofern sie bekannt wären, die m Wurzeln der Gleichung $Z=0$ sich bestimmen ließen. Weil ferner m eine bestimmte ganze Zahl seyn soll; so sind $\alpha^m, \alpha^{m-1}, \alpha^{m-2}\ldots\alpha$ die letzten Glieder der Potenzen von $y+\alpha$ bey $X=0$ (76. §. 9. Zus.): ausser denjenigen Gliedern also, worinn

verschiedene Potenzen von y stecken, hat die neue Gleichung noch die Glieder α^m, $A\alpha^{m-1}$, $B\alpha^{m-2}$ ..... $P\alpha$, Q; welche zusammen ihr letztes Glied ausmachen, und dieses ist demnach mit dem Werthe S gleich, welchen die Function Z für $x=\alpha$ erlangen soll. Wenn man also gefunden hat, daß der Werth S von Z für $x=\alpha$ weniger Factoren hat, als das letzte Glied von $Z=0$; so muß auch das letzte Glied von $X=0$ weniger Factoren haben, als das letzte von $Z=0$.

Beyspiel.

Sey $Z=x^4+x^3-29x^2-9x+180=0$.

Weil $Z=2^4+2^3-29.2^2-9.2+180=70$ für $x=2$ wird, und 70 gewiß weniger Factoren als 180 hat; so mache man $y=x-2$, daher $x=y+2$, und setze diesen Werth statt x in $Z=0$, die neue Gleichung $X=0$ zu erhalten.

$$X=(y+2)^4+(y+2)^3-29(y+2)^2-9(y+2)+180=0,$$

oder $X=y^4+9y^3+y^2-81y+70=0$.

Man wird nun nach (124. §.) finden, daß 1, 2, −5, −7 die zwoen bejahten und zwoen verneinten Wurzeln sind, welche die Gleichung $X=0$ nach (120. §. 2. Zus.) zu haben scheinet: da also $x=y+2$ war; so findet man daraus auch die zwoen bejahten und zwoen verneinten Wurzeln, welche die Gleichung $Z=0$ nach (120. §. 2. Zus.) haben muß, es wird nämlich seyn:

$x=y$

$x = y + 3 = 1 + 2 = 3.$
$x = y + 2 = 2 + 2 = 4.$
$x = y + 2 = -5 + 2 = -3.$
$x = y + 2 = -7 + 2 = -5.$

126. §. Aufgabe.

Die Gränzen anzugeben, wozwischen die mögliche Wurzeln, welche eine gegebene Gleichung haben mag, liegen.

Auflösung. Alle bejahte mögliche Wurzeln einer Gleichung $Z = 0$ müssen zwischen der 0 und einer bejahten Zahl α liegen, welche gröſſer ist, als die gröſte bejahte Wurzel von $Z = 0$: und alle mögliche verneinte Wurzeln derselben Gleichung müssen sich zwischen der 0 und einer verneinten Zahl $-\alpha$ befinden, welche gröſſer ist, als die gröſte verneinte Wurzel derselben Gleichung: wenn man also die Gränzen aller bejahten und verneinten möglichen Wurzeln, welche eine Gleichung $Z = 0$ haben mag, bestimmen will; so muß man die Zahlen $+\alpha$ und $-\alpha$ von der erwähnten Beschaffenheit suchen.

I) Wenn Z bey der vorgelegten Gleichung $Z = 0$ eine Function von x ist; so mache man $y = x - \alpha$, daher $x = y + \alpha$, und setze diesen Werth statt x überall in $Z = 0$, so wird man eine neue Gleichung $X = 0$ erhalten, welche die um α verminderten Wurzeln von $Z = 0$ zu ihren eigenen Wurzeln haben wird (99. §.). Man suche nun aus der Beschaffenheit der Glieder bey $X = 0$, wie groß muß α

bey dieſer Gleichung genommen werden, wenn alle ihre Glieder bejaht, daher alle ihre Wurzeln verneint (120. §. 2. Zuſ.) ſeyn ſollen; ſo wird eben die Zahl α gröſſer ſeyn, als die gröſßte bejahte Wurzel von $Z=0$ iſt (99. § 2. Zuſ.), und ſo wird man die Gränzen 0 und $+\alpha$ aller bejahten Wurzeln von $Z=0$ haben (108. §.).

Beyſpiel.

Sey $Z=x^4-16x^3+88x^2-192x+128=0$ gegeben, welche Gleichung vier bejahte Wurzeln zu haben ſcheint (120. §. 2. Zuſ.).

Setzt man $x=y+\alpha$; ſo findet man daraus dieſe Gleichung:

$$X=\left\{\begin{array}{r} x^4=y^4+4\alpha y^3+6\alpha^2y^2+4\alpha^3y+\alpha^4 \\ -16x^3=\ldots\ldots-16y^3-48\alpha y^2-48\alpha^2y-16\alpha^3 \\ +88x^2=\ldots\ldots\ldots+88y^2+176\alpha y+88\alpha^2 \\ -192x=\ldots\ldots\ldots\ldots-192y-192\alpha \\ +128=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+128 \end{array}\right\}=0$$

Nun verfahre man auf dieſe Art, um zu beſtimmen, wie groß α ſeyn muß, wenn alle Glieder dieſer Gleichung bejaht werden ſollen.

1) Wenn das zweyte Glied bejaht ſeyn ſoll; ſo muß $4\alpha>16$, daher $\alpha>\frac{16}{4}$, oder $\alpha>4$ ſeyn.

2) Soll aber auch das dritte Glied bejaht ſeyn; ſo muß die nachſtehende Bedingung Statt haben.

$$6\alpha^2+88>48\alpha, \text{ daher } \alpha+\frac{88}{6\alpha}>8.$$

Man

Man darf nun hier $\alpha < 4$ nicht nehmen (n. 1.); für $\alpha = 5$ aber wäre $\alpha + \frac{88}{6\alpha} = 5 + \frac{88}{30} = 7\frac{14}{15} < 8$, da es doch gröſſer seyn muß: man versuche also $\alpha = 6$, und dann wird $\alpha + \frac{88}{6\alpha} = 6 + \frac{88}{36} = 8 + \frac{1}{6} > 8$; folglich wird das dritte Glied bejaht, sobald man α wenigstens $= 6$ machet.

3) Um nun auch das vierte Glied bejaht zu machen, muß man α so nehmen, daß dafür diese Bedingung erfüllt werden möge.

$$4\alpha^3 + 176\alpha > 48\alpha^2 + 192$$

daher $\alpha + \frac{44}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2} > 12$.

Weil nun α gewiß nicht kleiner als 6 seyn kann (n. 2.); so muß diese Bedingung durch 6 oder eine gröſſere Zahl erfüllt werden: für $\alpha = 6$ wäre

$$\alpha + \frac{44}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2} = 6 + \frac{44}{6} - \frac{48}{36} < 12;$$

nimmt man daher 7 statt α; so hat man

$$\alpha + \frac{44}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2} = 7 + \frac{44}{7} - \frac{48}{49} = 7 + 6\frac{2}{7} - \frac{48}{49} > 12.$$

Man wird also derselben Bedingung durch $\alpha = 7$ ein Genüge thun.

4) Endlich wird auch das letzte Glied bejaht werden, wenn man α so nimmt, daß dadurch die nachstehende Bedingung erfüllt werde.

$$\alpha^4 + 88\alpha^2 + 128 - 192\alpha > 16\alpha^3$$

$$\text{daher } \alpha + \frac{88}{\alpha} + \frac{128}{\alpha^3} - \frac{192}{\alpha^2} > 16.$$

Es darf aber α nicht kleiner als 7 seyn (n. 3.); machet man aber $\alpha = 8$; so ist

$$\alpha + \frac{88}{\alpha} + \frac{128}{\alpha^3} - \frac{192}{\alpha^2} = 8 + \frac{88}{8} + \frac{128}{8^3} - \frac{192}{8^2} > 16.$$

Versuchet man daher $\alpha = 9$; so wird man finden:

$$\alpha + \frac{88}{\alpha} + \frac{128}{\alpha^3} - \frac{192}{\alpha^2} = 9 + \frac{88}{9} + \frac{128}{9^3} - \frac{192}{9^2} > 16.$$

5) Für $\alpha = 9$ müssen alle Glieder der Gleichung $X = 0$ bejaht werden (n. 1. 2. 3. 4.): zwischen 0 und 9 liegen also die bejahten Wurzeln von $Z = 0$.

II) Wenn aber die vorgelegte Gleichung $Z = 0$ lauter verneinte Wurzeln hat (120. §. 2. Zus.); so mache man $y = x + \alpha$, daher $x = y - \alpha$, und setze diesen Werth statt x überall in der Gleichung $Z = 0$, welche dafür eine andere Gleichung $X = 0$ geben, und die um eine Zahl α vermehrten Wurzeln von $Z = 0$ zu ihren eigenen Wurzeln haben wird (99. §.): man suche also aus der Beschaffenheit der Glieder von $X = 0$ zu bestimmen, wie groß die Zahl α genommen werden muß, wenn das erste, dritte, fünfte u. s. f. jedes in ungerader Ordnung folgende Glied von $X = 0$ bejaht, das zweyte aber, das vierte, sechste u. s. f. jedes in gerader Ordnung folgende Glied von $X = 0$ verneint seyn soll; so werden für eine solche Zahl α alle Wurzeln der neuen Gleichung $X = 0$ bejaht seyn müssen (120. §. 2. Z.),

und

und die Zahl α wird demnach gröſſer seyn, als die gröſte, für sich ohne Rücksicht auf das Verneinte genommene, verneinte Wurzel von $Z=0$ ist (99. §. 2. Zus.), folglich wird man die Gränzen 0 und $-\alpha$ aller verneinten Wurzeln von $Z=0$ haben (108. §.).

Beyspiel.

Sey die Gleichung $Z=x^3+8x^2+17x+10=0$ gegeben.

Für $x=y-\alpha$ giebt $Z=0$ folgende Gleichung.

$$X=\left\{\begin{array}{l} x^3=\ldots y^3-3\alpha y^2+3\alpha^2 y-\alpha^3 \\ +8x^2=\ldots\ldots+8y^2-16\alpha y+8\alpha^2 \\ +17x=\ldots\ldots\ldots+17y-17\alpha \\ +10=\ldots\ldots\ldots\ldots+10 \end{array}\right\}=0$$

1) Soll nun das zweyte Glied verneint seyn; so muß $3\alpha > 8$, daher $\alpha > \frac{8}{3}$, oder $\alpha > 2\frac{2}{3}$ seyn.

2) Soll ferner das dritte Glied bejaht werden; so muß man $3\alpha^2+17 > 16\alpha$, daher $\alpha+\frac{17}{3\alpha} > \frac{16}{3}$, oder $\alpha+\frac{17}{3\alpha} > 5\frac{1}{3}$ machen. Weil aber schon wegen (n. 1.) $\alpha > 2\frac{2}{3}$ seyn muß; so versuche man $\alpha=3$ zu setzen, um dadurch diese neue Bedingung zu erfüllen. Man findet nun $\alpha+\frac{17}{3\alpha}=3+\frac{17}{9}=4\frac{8}{9}<5\frac{1}{3}$ für $\alpha=3$, da es doch gröſſer als $5\frac{1}{3}$ seyn müßte: also nehme man $\alpha=4$,

und dann ist $\alpha + \frac{17}{3\alpha} = 4 + \frac{17}{12} = 5\frac{5}{12} > 5\frac{1}{3}$, daher muß α wenigstens $= 4$ seyn.

3) Weil endlich das vierte Glied verneint werden soll; so muß seyn $\alpha^3 + 17\alpha > 8\alpha^2 + 10$, daher $\alpha + \frac{17}{\alpha} - \frac{10}{\alpha^2} > 8$, und dieser Bedingung geschieht durch $\alpha = 6$ gewiß ein Genüge.

4) Sobald man also $\alpha = 6$ machet; sogleich wird die Gleichung $X = 0$ lauter Abwechslungen der Zeichen (118. §), folglich auch lauter bejahte Wurzeln haben (120. §. 2. Zus.), wegen (n. 1. 2. 3.), folglich wird $-\alpha = -6$ gröſſer seyn, als die gröſte verneinte Wurzel von $Z = 0$ ist (99. §. 2. Zus.), daher werden 0 und $-\alpha = -6$ die Gränzen aller verneinten Wurzeln von $Z = 0$ seyn müssen.

III) Wenn eine Gleichung $Z = 0$ gegeben wird, welche mögliche bejahte und verneinte Wurzeln hat; so suche man die Gränzen aller bejahten Wurzeln nach I), und die Gränzen aller verneinten nach II).

1. Zusatz.

Wenn einmahl die Gränzen 0 und $+\alpha$ aller bejahten Wurzeln einer Gleichung bekannt sind, und diese Gleichung ganze Zahlen zu ihren Wurzeln hat; so darf man nur die zwischen 0 und $+\alpha$ liegenden Zahlen 1, 2, 3 - - - (107. §.) statt x in der Gleichung nehmen, um die bejahten Wurzeln

nach

nach (94. §.) zu entdecken: und wenn die Gränzen o und $-\infty$ aller verneinten Wurzeln einer Gleichung $Z=o$ bekannt sind; so setze man die zwischen o und $-\infty$ befindlichen Zahlen $-1, -2, -3 \ldots$ statt x in Z, und auch die ganzen verneinten Wurzeln nach (94. §.) zu entdecken, wenn es solche bey der Gleichung wirklich giebt.

2. Zusatz.

Und wenn unter den möglichen Wurzeln einer Gleichung $Z=o$ solche vorkommen, welche keine ganze Zahlen, sondern gebrochene, ja auch irrationale Zahlen sind; so wird man doch durch das Verfahren (1. Zus.) allemahl zwo ganze um Eins unterschiedene Zahlen finden können, wozwischen eine solche Wurzel liegen muß, und so werden die Gränzen einzelner Wurzeln bekannt werden. Denn wenn man die Werthe merket, welche die Function Z erlanget, indem man die bejahten oder verneinten Zahlen (1. Zus) statt x in ihr nimmt; so wird zwischen zwoen bejahten oder verneinten Zahlen, wovon die eine einen bejahten und die andere einen verneinten Werth für Z giebt, allemahl wenigstens eine Wurzel der Gleichung $Z=o$ liegen (111. §.).

Zwischen zwoen Gränzen aber, welche nur um die Einheit unterschieden sind, liegen noch unzählige gebrochene Zahlen, und eine davon ist gewiß die verlangte Wurzel: man kann also auch diese statt x zu nehmen versuchen, und dadurch die Gränzen einer Wurzel immer näher bringen, bis der Unterschied derselben unbeträchtlich wird, da dann

auch die dazwischen liegende Wurzel von einer dieser Gränzen nicht sonderlich unterschieden seyn wird: auf diese Art kann man sich daher einer möglichen irrationalen Wurzel so lang man will nähern; genau wird man sie nie finden, aber der noch fehlende Theil von ihr wird kleiner werden können, als jeder wie immer kleine Theil von der Einheit seyn mag.

Beyspiel.

Sey die Gleichung $Z = x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0$ vorgelegt, welche lauter bejahte Wurzeln haben mag (120. §. 2. Zus.).

Wenn man $x = y + \alpha$ nimmt; so verwandelt sich dafür die Gleichung $Z = 0$ in diese:

$$X = \left.\begin{array}{r} y^3 + 3\alpha \\ -15 \\ \\ \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} y^2 + 3\alpha^2 \\ -30\alpha \\ +63 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} y + \alpha^3 \\ -15\alpha^2 \\ +63\alpha \\ -50 \end{array}\right) = 0.$$

\# 2ten Band 65ste Seite

Und nun findet man, daß für $\alpha = 2$ das zweyte Glied dieser Gleichung verneint bleibt und alle übrigen Glieder bejaht werden müssen; also ist 2 größer, als eine bejahte Wurzel von $Z = 0$, und so liegen alle Wurzeln dieser Gleichung zwischen 0 und 2 (Auflös. I.). Es ist aber gewiß, daß ausser 1 keine ganze Zahl zwischen 0 und 2 liegt, daher ist auch gewiß, daß wenn die Gleichung $Z = 0$ mögliche Wurzeln hat, diese gebrochene, zwischen 0 und 2 liegende Zahlen seyn müssen, und nun muß man sehen, auf welche Art eine solche Wurzel durch Näherung bestimmt werden kann.

Für

Für $x=1$ wird $Z=-1$,

und Für $x=2$ wird $Z=+24$.

Eine Wurzel liegt also zwischen 1 und 2 (111. §.), folglich ist dieselbe eine gebrochene Zahl >1 und <2; man versuche daher $x=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1,5$ zu machen.

Für $x=1,5$ wird $Z=+14,125$.

Eine Wurzel liegt demnach zwischen 1 und 1,5 (111. §.), und eine mittlere Zahl ist $\frac{1+1,5}{2}=\frac{2,5}{2}=1,25$.

Für $x=1,25$ wird $Z=+28,35$.

Daher liegt eine Wurzel zwischen 1 und 1,25 (111. §.), und zwischen diesen Zahlen liegt $\frac{1+1,25}{2}=\frac{2,25}{2}=1,125$.

Für $x=1,125$ wird $Z=+3,315$.

Also liegt eine Wurzel zwischen 1 und 1,125 (111. §.), und man kann versuchen $x=\frac{1+1,125}{2}=\frac{2,125}{2}=1,0625$ zu nehmen. Und so muß man fortfahren, bis für einen gewissen Werth von x die Function Z, welche schon $=3,315$ für $x=1,125$ war, einen Werth erlanget, der von der 0 sehr wenig abweichet, indem alsdann auch der damit zusammenhängende Werth von x der wahren Wurzel von $Z=0$ (94. §.) sehr nahe kommen muß. Auf diese Art wird man hier finden, daß, wenn man $x=1,09$ setzte, dieser Werth von der wahren Wurzel nicht um ein Hundertel unterschieden wäre.

127. §. Aufgabe.

Wenn man findet, daß eine vorgelegte Gleichung mögliche irrationale Wurzeln hat; wie kann man sich denselben schneller als nach (126. §. 2. Zus.) nähern?

Auflösung. 1) Die gegebene Gleichung mag von einer völlig unbestimmten Ordnung seyn.

$$Z = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \ldots + p = 0.$$

Nun kann man zwar ihre irrationalen Wurzeln nach (126. §. 2. Zus.) suchen: man nehme aber an, daß man auf die daselbst erklärte Art nur die ersten Ziffern einer solchen Wurzel gefunden hat, wie man z. B. bey der daselbst angeführten cubischen Gleichung die ersten Ziffern 1,02 einer Wurzel genau angeben konnte. Diesen ersten Theil einer Wurzel von $Z = 0$ nenne man y, und der noch fehlende Theil sey ω, daß die ganze Wurzel $x = y + \omega$ heiße: also muß seyn.

$$Z = (y+\omega)^m + a(y+\omega)^{m-1} + b(y+\omega)^{m-2} + c(y+\omega)^{m-3} + \ldots + p = 0.$$

2) Nun ist nach (76. §. 4. Zus.).

$$(y+\omega)^m = y^m + m y^{m-1}\omega + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} y^{m-2}\omega^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{m-3}\omega^3 + \ldots + \omega^m$$

$$(y+\omega)^{m-1} = y^{m-1} + (m-1) y^{m-2}\omega + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} y^{m-3}\omega^2 + \ldots + \omega^{m-1}$$

$$(y+\omega)$$

$$(y+\omega)^{m-2} = y^{m-2} + (m-2)y^{m-3}\omega + \frac{(m-2)(m-3)}{1\cdot 2}y^{m-4}\omega^2 + \ldots\ldots + \omega^{m-2}$$

$$(y+\omega)^{m-3} = y^{m-3} + (m-3)y^{m-4}\omega + \frac{(m-3)(m-4)}{1\cdot 2}y^{m-5}\omega^2 + \ldots\ldots + \omega^{m-3}$$

u. s. f.

3) Es ist aber gewiß, daß, wenn ω den noch fehlenden Decimalbruch bedeutet, welcher mit y eine Wurzel von $Z = 0$ geben soll, die Potenzen $\omega^2, \omega^3, \omega^4 \ldots \omega^m$ sehr klein seyn müssen, wenn nur der erste Theil y der verlangten Wurzel genau genug bestimmt, demnach ω ein kleiner Bruch ist (10. §. 13. Zus.): man wird also bey dieser Rechnung, wobey ohnehin alles auf eine genugsame Näherung ankömmt, nicht sonderlich fehlen, wenn man in (n. 2.) alle Glieder wegläßt, welche die höheren Potenzen $\omega^2, \omega^3, \omega^4 \ldots \omega^m$ enthalten, und nur diejenigen behält, worinn ω steckt, da dann aus (n. 1. 2.) die nachstehende Gleichung folgt, welche von der gegebenen in diesen Umständen unbeträchtlich unterschieden ist, wenn man y so bestimmt hat, daß ω einen kleinen Decimalbruch bedeuten muß.

$$\left.\begin{array}{l} Z = y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} + ey^{m-5} + \ldots + p \\ \quad + m\omega y^{m-1} + a\omega(m-1)y^{m-2} + b\omega(m-2)y^{m-3} \\ \quad + c\omega(m-3)y^{m-4} + d\omega(m-4)y^{m-5} + \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

Und

Und nun iſt

$$\omega\left(my^{m-1}+a(m-1)y^{m-2}+b(m-2)y^{m-3}+c(m-3)y^{m-4}\right.$$
$$\left.+d(m-4)y^{m-5}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$
$$=-y^m-ay^{m-1}-by^{m-2}-cy^{m-3}-dy^{m-4}-ey^{m-5}-\ldots-p$$

Daher

$$\omega=\frac{-y^m-ay^{m-1}-by^{m-2}-cy^{m-3}-dy^{m-4}-ey^{m-5}-\ldots-p}{my^{m-1}+a(m-1)y^{m-2}+b(m-2)y^{m-3}+c(m-3)y^{m-4}+\ldots}$$

4) Es ſoll aber $x=y+\omega$ ſeyn, daher iſt aus (n. 3.).

$$x=y-\frac{-y^m-ay^{m-1}-by^{m-2}-cy^{m-3}-dy^{m-4}-\ldots-p}{my^{m-1}+a(m-1)y^{m-2}+b(m-2)y^{m-3}+c(m-3)y^{m-4}+\ldots}$$

Und alles auf einen Nenner gebracht.

$$x=\frac{my^m+a(m-1)y^{m-1}+b(m-2)y^{m-2}+c(m-3)y^{m-3}+\ldots}{-y^m-ay^{m-1}-by^{m-2}-cy^{m-3}-\ldots-p}$$
$$\overline{my^{m-1}+a(m-1)y^{m-2}+b(m-2)y^{m-3}+c(m-3)y^{m-4}+\ldots}$$

Alſo

$$x=\frac{(m-1)y^m+a(m-2)y^{m-1}+b(m-3)y^{m-2}+c(m-4)y^{m-3}+\ldots-p}{my^{m-1}+a(m-1)y^{m-2}+b(m-2)y^{m-3}+c(m-3)y^{m-4}+\ldots}$$

5) Setzt man nun $m=2$, $m=3$, $m=4$, $m=5$ u. ſ. f.; ſo findet man die dazu gehörigen Formuln für die Gleichungen von jeder beſtimmten Ordnung: nämlich

I. Für die quadratiſche Gleichung.

$$x^2+ax+b=0$$
$$x=\frac{y^2-b}{2y+a}.$$

II. Für die cubiſche Gleichung.

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$
$$x=\frac{2y^3+ay^2-c}{3y^2+2ay+b}.$$

III. Für

III. Für die biquadratische Gleichung.

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

$$x=\frac{3y^4+2ay^3+by^2-d}{4y^3+3ay^2+2by+c}$$

u. s. f.

Beyspiel.

Aus (126. §. 2. Zus.) ist bekannt, daß alle bejahte Wurzeln der Gleichung $Z=x^3-15x^2+63x-50=0$ zwischen 1 und 2 liegen: will man sich demnach einer dazwischen liegenden Wurzel nähern; so kann es auf diese Art geschehen.

Eine solche Wurzel ist grösser als 1 und kleiner als 2; daher bestehet dieselbe aus 1 und einem gewissen Decimalbruche: sey $y=1$, und der noch fehlende Decimalbruch wie immer beschaffen; so hat man, wenn die hier angeführte cubische Gleichung mit der allgemeinen II) verglichen wird

$a=-15$; $b=63$; $c=-50$; $y=1=y^2=y^3$:

$2y^3+ay^2-c=2-15+50=37$.

$3y^2+2ay+b=3-30+63=36$:

also $x=\frac{2y^3+ay^2-c}{3y^2+2ay+b}=\frac{37}{36}=1,02$.

Nimmt man nämlich $x=1,02$; so ist schon diese Zahl einer Wurzel von $Z=0$ so nahe, daß der Fehler nicht ein Hundertel beträgt: um aber derselben Wurzel noch näher zu kommen, setze man $y=1,02$; daher $y^2=1,0404$; $y^3=1,06121$; so ist:

$$2y^3+ay^2-c=3,1224-15,606+50=36,5164,$$
$$3y^2+2ay+b=3,1212-30,6+63=35,5212:$$

also $x=\frac{2y^3+ay^2-c}{3y^2+2ay+b}=\frac{36,5164}{35,5212}=1,0280.$

Behält man diesen Werth für x; so ist man einer Wurzel von Z=o dadurch so nahe gekommen, daß der Fehler nicht ein Zehntausendtel beträgt: wollte man aber derselben Wurzel noch näher kommen; so müßte man nun y=1,0280 setzen u. s. f.

128. §. Aufgabe.

Wenn eine höhere Gleichung Z=o vorgelegt wird, wie kann man zu Werke gehen, um die möglichen Wurzeln zu bestimmen, welche dieselbe haben mag.

Auflösung. 1) Wenn die Gleichung Z=o irrational ist (91. §.); so verwandle man dieselbe in eine rationale Gleichung (86. §.).

2) Wenn die schon rationale Gleichung Z=o gebrochene Zahlen zu ihren Coefficienten hat; so muß man diese Brüche wegschaffen (100. §. 1. Zus.): man wird freylich eine andere Gleichung X=o dadurch erhalten, doch aber werden die Wurzeln von Z=o sich aus den Wurzeln von X=o bestimmen lassen, wenn diese einmal bekannt seyn werden; jede Wurzel von Z=o wird nämlich bey dieser Arbeit mit einer gewissen Zahl m multiplicirt (100. §. 1. Z.), daher wird jede Wurzel von X=o durch eben die Zahl m dividirt eine Wurzel von Z=o geben müssen.

3) Sol-

3) Sollen nun die möglichen Wurzeln bestimmt werden, welche eine rationale Gleichung, die lauter ganze Zahlen zu ihren Coefficienten hat, haben mag; so kann man eine vorläufige Untersuchung nach (122. §.) anstellen, um zu erfahren, ob es nicht bey ihr unmögliche Wurzeln giebt.

4) Vermuthet man wirklich mögliche Wurzeln bey der vorgelegten Gleichung $Z=0$; so suche man, ob sie nicht ganze Zahlen zu ihren Wurzeln hat (124. §. 1. 2. Zus. und 125. §.).

5) Bisweilen wird räthsam seyn, auch beym Verfahren nach (125. §.) die Gränzen aller bejahten und verneinten Wurzeln zu suchen (126. §.), und dann die Wurzeln selbst nach (126. §. 1. Zus.) zu bestimmen, oder, wenn die Gleichung irrationale Wurzeln hat, sich denselben nach (126. §. 2. Zus. und 127. §.) zu nähern.

6) Man kann auch ohne alle Vorbereitung bey jeder Gleichung $Z=0$ allemahl versuchen, zwo Zahlen α und β statt x in Z zu nehmen, um zu sehen, ob man nicht auf solche Zahlen kommen kann, für derer eine α die Function Z einen bejahten, für die andere aber einen verneinten Werth erlanget: findet man sie; so kann man versichert seyn, daß wenigstens eine mögliche Wurzel derselben Gleichung zwischen eben den Zahlen α und β liegen muß (111. §.). Wenn man demnach die zwischen α und β liegenden Zahlen statt x in $Z=0$ zu nehmen versuchet; so wird man dadurch die ganzen Wurzeln, welche die Gleichung haben mag, nach (94. §.) entdecken, oder doch die Gränzen der irrationalen

Wurzeln bestimmen, und sich hierauf diesen Wurzeln leicht nähern können, wie (126. §. 2. Zus. und 127. §.).

7) Es ist aber nicht nothwendig, daß man alle Wurzeln einer vorgelegten Gleichung durch diese, noch immer mühsame, Arbeiten suche; denn die Wurzeln einer quadratischen Gleichung können leicht nach (88. §.) gefunden werden; ist also eine cubische Gleichung gegeben; so suche man nur eine Wurzel α dieser Gleichung, hierauf dividire man dieselbe durch $x-\alpha=0$, um eine quadratische Gleichung zu erhalten, welche die zwoen übrigen Wurzeln der cubischen Gleichung zu ihren eigenen Wurzeln haben wird: und überhaupt wenn eine Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m gegeben ist; so suche man $m-2$ Wurzeln, welche $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$ heißen mögen, und mache aus diesen eine Gleichung $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\mu)=0$ von der Ordnung $m-2$, durch welche die vorgelegte Gleichung $Z=0$ dividirt eine quadratische Gleichung zum Quotienten geben wird, welche die zwoen übrigen Wurzeln von $Z=0$ darbiethet (96. §. 1. Zus.).

Der

Der XIV. Abschnitt.

Von den Reihen überhaupt, und der Verwandlung gebrochener Functionen in Reihen.

129. §. Erklärungen.

Eine Reihe ist eine Menge von Gröſſen, welche ihre Theile oder Glieder genannt werden, und so beſchaffen sind, daß jede von ihnen nach einem beſtimmten Geſetze erhalten wird. Das allgemeine, unbeſtimmte nte Glied einer Reihe heißt eine ſolche Function von n (23. §.), welche das erwähnte Geſetz dergeſtalt ausdrückt, daß man daraus das erſte, zweyte, dritte, vierte u. ſ. f. Glied derſelben Reihe ſogleich erhält, wenn man nur 1, 2, 3, 4 u. ſ. f. ſtatt n in eben der Function ſetzt, wo alſo n allemahl die Zahl bedeutet, welche die Stelle des Gliedes anzeigen ſoll, ob es nämlich das erſte, oder zweyte, oder dritte u. ſ. f. ſeyn ſoll.

Z. B. Die Gröſſen $a+d; a+2d; a+3d; a+4d$---- machen eine Reihe aus: das beſtimmte Geſetz, nach welchem jedes Glied dieſer Reihe erhalten wird, beſtehet in dem, daß man zu a die beſtändige Gröſſe d einmahl, zweymahl, dreymahl u. ſ. f. addiren muß, wenn man das erſte, zweyte, dritte u. ſ. f. Glied haben will, welches man mit andern Worten ſo ausdrücken kann: wenn man zu a das Product aus der beſtändigen Gröſſe d in diejenige Zahl, welche die Stelle des verlangten Gliedes durch ihre Einheiten anzeiget, addirt; ſo giebt die Summe das verlangte Glied. Wenn

3. Zuſatz.

Das ſummatoriſche Glied jeder Reihe drückt die Summe von n erſten Gliedern derſelben Reihe aus; und das nte Glied iſt das allgemeine Glied der Reihe (129. §.): wenn man alſo beym ſummatoriſchen Gliede n — 1 ſtatt n nimmt; ſo kömmt die Summe von n — 1 erſten Gliedern heraus, welche demnach um das allgemeine nte Glied weniger beträgt, als das ſummatoriſche Glied. Aus dem ſummatoriſchen Gliede einer Reihe wird demnach ihr allgemeines Glied erhalten, wenn man vom ſummatoriſchen Gliede das abziehet, was daſſelbe giebt, indem man bey ihm n — 1 ſtatt n ſetzt.

Z. B. Bey der Reihe (130. §.) war das ſummatoriſche Glied $na + \frac{n(n+1)d}{2}$: ſetzt man hier n — 1 ſtatt n; ſo findet man $na - a + \frac{(n-1)nd}{2}$: und ziehet man dieſes von $na + \frac{n(n+1)d}{2}$ ab: ſo giebt der Reſt a + nd das allgemeine Glied eben derſelben Reihe (129. §.).

131. §. Aufgabe.

Es iſt eine gebrochene oder ſolche Function von x gegeben, welche ſowohl im Zähler als Nenner oder wenigſtens im Nenner x hat; man ſoll dieſelbe in eine gleichgültige Reihe verwandeln.

Auflösung. 1) Sey die gegebene Function $\frac{Z}{Y^m}$, wo m auch $= 1$, übrigens bejaht oder verneint, ganz oder gebrochen seyn kann: weil $\frac{Z}{Y^m} = ZY^{-m}$ ist; so kann man die Potenz Y^{-m} nach (76. §. 85. §.) durch eine Reihe ausdrücken, welche mit Z multiplicirt die Reihe geben muß, die der gegebenen Function $\frac{Z}{Y^m}$ gleich seyn muß.

Für den Fall, wo $m = 1$ wäre, würde man $\frac{Z}{Y}$ in eine gleichgültige Reihe durch die wirkliche Division des Zählers Z mit dem Nenner Y am sichersten verwandeln; doch aber kann man sich in der Ausübung einer andern Methode bedienen, welche dasselbe auf einem bequemeren Wege giebt, wofern man sie gut anwendet.

2) Diese Methode bestehet nämlich in dem, daß man die gegebene Function $\frac{Z}{Y}$ durch eine Reihe der Potenzen von x ausdrücket, z. B.

$$\frac{Z}{Y} = Ax^m + Bx^n + Cx^p + Dx^q + \text{- - - -}$$

setzt, wobey die Coefficienten A, B, C, D - - - - völlig unbestimmt seyn müssen: es kömmt nun alles darauf an, daß man die Werthe von A, B, C, D - - - - so bestimmen möge, daß dafür die angenommene Gleichung Statt finde. Ob es aber solche Werthe giebt, dieses kann man so untersuchen:

Es ist $Z=(Ax^m+Bx^n+Cx^p+Dx^q+\ldots)Y$:

da also diese Gleichung für jeden Werth von x gelten muß; so muß auch der Coefficient jeder Potenz von x in Z dem Coefficienten gleich seyn, welcher einer gleichen Potenz von x beym Producte $(Ax\ldots)Y$ zugehört (83. §. Zus.): wenn man demnach solche Coefficienten vergleichet; so wird man aus diesen Gleichungen die verlangten Werthe von A, B, C ... leicht bestimmen, wenn es solche wirklich giebt.

Man braucht nicht viel Ueberlegung, um es einzusehen, daß bey dieser Methode, welche allenfalls die vortrefflichsten Dienste in der Analysis leistet, alles auf eine geschickte, von den Exponenten m, n, p, q .... abhängende Gestalt der unbestimmten Reihe $Ax^m+Bx^n+\ldots$ ankömmt, als welche der gegebenen gebrochenen Function gleich gesetzt wird: folgende Anmerkungen werden einigermaßen die Art erläutern, wie man sich bey der Bestimmung derselben Gestalt zu verhalten hat.

I. Wenn die gebrochene Function unter der Form $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots}{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots}$ gegeben ist; so kann man sie sicher durch eine Reihe von der Form $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$ ausdrücken (25. §. 2. Zus.).

II. Man kann übrigens alle dergleichen Functionen auf eine Function, wie $\frac{1}{Y}$ zurückführen, welche einen beständigen Zähler $=1$ hat: denn hätte man $\frac{Z}{Y}$; so wäre

$\frac{Z}{Y}$

$\frac{Z}{Y} = \frac{1}{Y} \times Z$: wenn man demnach die Reihe findet, welche $\frac{1}{Y}$ ausdrückt; so wird dieselbe mit Z multiplicirt die Reihe geben, welche $\frac{Z}{Y}$ ausdrücken soll.

III. Um aber $\frac{1}{Y}$ durch eine Reihe auszudrücken, muß man dieser eine Gestalt geben, daß sie aus den nach einander folgenden Potenzen einer Potenz von x, die sich beym Nenner Y befindet, bestehe: vom kleinsten Exponenten der Grösse x an, sollen die Exponenten von x bey einer solchen Reihe zunehmen: wenn also bey Y nicht lauter ganze Exponenten vorkommen, sondern auch gebrochene; so wird solche auch die verlangte Reihe bekommen müssen.

IV. Will man eine Function $\frac{Z}{Y}$ auf die Form $\frac{1}{Y}$ nicht zurückführen, wie dieses nach II) geschehen kann; so muß man die Exponenten von x bey der verlangten Reihe nach den Exponenten des Zählers Z ordnen, wenn zwischen ihnen die Exponenten des Nenners Y liegen (107. §.); oder man ordne dieselben nach den Exponenten des Nenners, wenn dazwischen die Exponenten des Zählers sich befinden: wenn aber keines von beyden geschieht, welches bey gebrochenen Exponenten bisweilen zutrifft; so kann man die Exponenten des Zählers Z und Nenners Y auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen, und dann die Exponenten der verlangten Reihe so ordnen, daß jene Exponenten dazwischen liegen mögen (107. §.).

Beyspiele.

I. Man soll die Function $\frac{1+2x}{3-x+5x^2}$ in eine Reihe verwandeln.

Es sey $\frac{1+2x}{3-x+5x^2} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots$;

so ist $1+2x=(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots)(3-x+5x^2)$,

und $(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots)(3-x+5x^2)-1-2x=0$,

und wenn man die Multiplication wirklich vornimmt, hernach alles gehörig reducirt; so wird seyn:

$$\begin{matrix} 3A)x^0 & +3B)x & +3C)x^2 & +3D)x^3 & +3E)x^4+\cdots=0 \\ -1) & -A) & -B) & -C) & -D) \\ & -2) & +5A) & +5B) & +5C) \end{matrix}$$

Also ist aus (83. §.).

$3A-1=0$; daher $A=\frac{1}{3}$.

$3B-A-2=0$; $\quad B=\frac{A+2}{3}=\frac{7}{9}=\frac{7}{3\cdot 3}$.

$3C-B+5A=0$; $\quad C=\frac{B-5A}{3}=\frac{-8}{27}=\frac{-8}{3\cdot 3\cdot 3}$.

$3D-C+5B=0$; $\quad D=\frac{C-5B}{3}=\frac{-113}{81}=\frac{-113}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}$.

$3E-D+5C=0$; $\quad E=\frac{D-5C}{3}=\frac{-233}{243}=\frac{-233}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}$.

Demnach ist

$$\frac{1+2x}{3-x+5x^2}=\frac{1}{3}+\frac{7}{9}x-\frac{8}{27}x^2-\frac{113}{81}x^3-\frac{233}{243}x^4+\cdots$$

II. Man

II. Man ſoll die Function $\frac{1-x}{1-\sqrt{x+2x^2}} = \frac{1-x}{1-x^{\frac{1}{2}}+2x^2}$

in eine Reihe verwandeln.

Sey

$$\frac{1-x}{1-x^{\frac{1}{2}}+2x^2} = 1+Ax^{\frac{1}{2}}+Bx+Cx^{\frac{3}{2}}+Dx^2+Ex^{\frac{5}{2}}+\cdots;$$

ſo iſt

$$\left(1+Ax^{\frac{1}{2}}+Bx+Cx^{\frac{3}{2}}+Dx^2+Ex^{\frac{5}{2}}+\cdots\right)\left(1-x^{\frac{1}{2}}+2x^2\right)-1+x=0;$$

daher

$$\begin{matrix} A)x^{\frac{1}{2}} & +B)x & +C)x^{\frac{3}{2}} & +D)x^2 & +E)x^{\frac{5}{2}} \\ -1) & -A) & -B) & -C) & -D) \\ & +1) & +2) & +2A) & \end{matrix} \pm \cdots = 0$$

Alſo wegen (83. §.).

$A-1=0$; daher $A=1$.

$B-A+1=0$; $B=A-1=0$.

$C-B=0$; $C=B=0$.

$D-C+2=0$; $D=C-2=-2$.

$E-D+2A=0$; $E=D-2A=-4$.

Demnach iſt

$$\frac{1-x}{1-\sqrt{x+2x^2}} = 1+x^{\frac{1}{2}}+0.x+0.x^{\frac{3}{2}}-2x^2-4x^{\frac{5}{2}}\pm\cdots\cdots$$

$$= 1+\sqrt{x}-2x^2-4x^2\sqrt{x}\pm\cdots\cdots$$

III. Die Function $\frac{2-\sqrt{x+x^2}}{1-x} = \frac{2-x^{\frac{1}{2}}+x^2}{1-x}$

in eine Reihe zu verwandeln.

Sey

Sey

$$\frac{2-x^{\frac{3}{2}}+x^2}{1-x}=A+Bx^{\frac{1}{2}}+Cx+Dx^{\frac{3}{2}}+Ex^2+Fx^{\frac{5}{2}}+\ldots;$$

so ist

$$\left(A+Bx^{\frac{1}{2}}+Cx+Dx^{\frac{3}{2}}+Ex^2+Fx^{\frac{5}{2}}+\ldots\right)(1-x)-2+x^{\frac{3}{2}}-x^2=0,$$

oder

$$\begin{array}{cccccccc} A)x^0+B)x^{\frac{1}{2}}+C)x+D)x^{\frac{3}{2}}+E)x^2+F)x^{\frac{5}{2}}\pm\ldots=0 \\ -2) \quad +1) \quad -A) \quad -B) \quad -C \quad -D) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -1) \end{array}$$

Daher $A-2=0$; folglich $A=2$.

$B+1=0$;	$B=-1$.
$C-A=0$;	$C=A=2$.
$D-B=0$;	$D=B=-1$.
$E-C-1=0$;	$E=C+1=3$.
$F-D=0$;	$F=D=-1$.

Demnach

$$\frac{2-\sqrt{x}+x^2}{1-x}=2-x^{\frac{1}{2}}+2x-x^{\frac{3}{2}}+3x^2-x^{\frac{5}{2}}+\ldots\ldots$$

IV. Die Function $\frac{2x^{\frac{1}{3}}+3}{1-4x^{\frac{1}{3}}+x}$ in eine Reihe zu verwandeln.

Diese Function ist $=\frac{2x^{\frac{2}{6}}+3}{1-4x^{\frac{2}{6}}+x}$, und nun setze man

$$\frac{2x^{\frac{2}{6}}+3}{1-4x^{\frac{2}{6}}+x}=A+Bx^{\frac{2}{6}}+Cx^{\frac{3}{6}}+Dx^{\frac{4}{6}}+Ex^{\frac{5}{6}}+Fx+\ldots;$$

so

so ist

$$\left(A+Bx^{\frac{1}{6}}+Cx^{\frac{2}{6}}+Dx^{\frac{3}{6}}+Ex^{\frac{4}{6}}+Fx+\cdots\right)\left(1-4x^{\frac{1}{6}}+x\right)-2x^{\frac{1}{6}}-3=0;$$

daher

$$\begin{array}{llll} A)x^0 & +B)x^{\frac{1}{6}} & +C)x^{\frac{2}{6}} & +D)x^{\frac{3}{6}}+E)x^{\frac{4}{6}}+F)x\cdots=0 \\ -3) & -2) & -4A) & -4B)-4C) \\ & & & +A) \end{array}$$

Also ist

$A-3=0$;	daher	$A=3$.
$B-2=0$;		$B=2$.
$C-4A=0$;		$C=4A=12$.
$D\quad=0$;		$D=0$.
$E-4B=0$;		$E=4B=8$.
$F-4C+A=0$;		$F=4C-A=45$.

Demnach ist

$$\frac{2x^{\frac{1}{3}}+3}{1-4x^{\frac{1}{3}}+x}=3+2x^{\frac{1}{6}}+12x^{\frac{2}{6}}+8x^{\frac{3}{6}}+45x+\cdots$$

1. Zusatz.

Wenn x in allen Gliedern des Zählers vorkömmt, wie z. B. bey $\frac{ax^2+bx^5+cx^7}{Y}$; so kann man den Zähler durch die kleinste Potenz von x dividiren, und die Function auf die Form $\frac{a+bx^3+cx^5}{Y}\times x^2$ bringen: hat man nun den gebrochenen Factor durch eine Reihe ausgedrückt; so muß dieselbe noch mit x^2 multiplicirt werden. Wenn sich aber ein solcher Fall beym Nenner ereignet, wie in $\frac{Z}{\alpha x^5-\beta x^2+\gamma x^7}$; so kann man auch diese Functionen auf

die

die Form $\frac{Z}{\alpha x^3 - \beta + \gamma x^5} : x^2$ bringen, und die Reihe, welche den gebrochenen Dividendus ausdrücken soll, mit x^2 dividiren.

2. Zusatz.

Man kann jede gebrochene Function, wobey die Exponenten von x im Zähler und Nenner ganze bejahte Zahlen sind, auf nachstehende Form bringen.

$$\frac{Z}{Y} = \frac{1+ax+bx^2+cx^3+\cdots+px^{n-1}+qx^n+rx^{n+1}+\cdots}{1+Ax+Bx^2+Cx^3+\cdots+Px^{n-1}+Qx^n+Rx^{n+1}+\cdots}$$

Will man nun die Reihe haben, welche diese Function ausdrücken soll; so bezeichne man die unbestimmten Coefficienten dieser Reihe mit $L, L^2, L^3, L^4 \cdots L^{n-1}, L^n, L^{n+1} \cdots$ Eben so nenne man $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \cdots \alpha^{n-1}, \alpha^n, \alpha^{n+1} \cdots$ die Coefficienten des Zählers Z, und $\beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4 \cdots \beta^{n-1}, \beta^n, \beta^{n+1}$ die Coefficienten des Nenners Y: setze also

$$Z = 1+\alpha x+\alpha^2 x^2+\alpha^3 x^3+\alpha^4 x^4+\cdots + \alpha^{n-1}x^{n-1}+\alpha^n x^n+\alpha^{n+1}x^{n+1}+\cdots,$$

$$Y = 1+\beta x+\beta^2 x^2+\beta^3 x^3+\beta^4 x^4+\cdots + \beta^{n-1}x^{n-1}+\beta^n x^n+\beta^{n+1}x^{n+1}+\cdots$$

$$\frac{Z}{Y} = 1+Lx+L^2x^2+L^3x^3+L^4x^4+\cdots + L^{n-1}x^{n-1}+L^n x^n+L^{n+1}x^{n+1}+\cdots;$$

also $(1+Lx+L^2x^2+L^3x^3+L^4x^4+\cdots + L^{n-1}x^{n-1}+L^n x^n+L^{n+1}x^{n+1}+\cdots)Y-Z=0.$

aber $\left.\begin{array}{l} L \\ +\beta \\ -\alpha \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} x+L^2 \\ +\beta L \\ +\beta^2 \\ -\alpha^2 \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} x^2+L^3 \\ +\beta L^2 \\ +\beta^2 L \\ +\beta^3 \\ -\alpha^3 \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} x^3+L^4 \\ +\beta L^3 \\ +\beta^2 L^2 \\ +\beta^3 L \\ +\beta^4 \\ -\alpha^4 \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} x^4+\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0,$

Demnach ist I. $L+\beta-\alpha=0$;

II. $L^2+\beta L+\beta^2-\alpha^2=0$;

III. $L^3+\beta L^2+\beta^2 L+\beta^3-\alpha^3=0$;

IV. $L^4+\beta L^3+\beta^2 L^2+\beta^3 L+\beta^4-\alpha^4=0$;

u. s. f.

Aus diesen Gleichungen findet man also die ersten Coefficienten der verlangten Reihe sehr leicht: es wird nämlich seyn.

$L=\alpha-\beta$.

$L^2=\alpha^2-\beta L-\beta^2$.

$L^3=\alpha^3-\beta L^2-\beta^2 L-\beta^3$.

$L^4=\alpha^4-\beta L^3-\beta^2 L^2-\beta^3 L-\beta^4$.

u. s. f.

Und wenn man die unbestimmte Reihe $1+Lx+L^2x^2\ldots$ mit Y multiplicirte, aus dem ganzen Producte aber nur diejenigen Glieder behielte, wo x^n stecken muß; so könnte man von dem zugehörigen Coefficienten den Coefficient α^n von x^n bey Z abziehen, den Rest $=0$ setzen, und daraus den unbestimmten Coefficient L^n der verlangten Reihe herleiten, welcher das Gesetz ganz allgemein ausdrücken muß, wornach die ersten Coefficienten L, L^2, L^3, L^4 erhalten werden:

den: man würde nämlich finden, auf eine ähnliche Art, wie (85. §.).

$$L^n = \alpha^n - \beta L^{n-1} - \beta^2 L^{n-2} - \beta^3 L^{n-3} - \ldots\ldots$$
$$- \beta^{n-2} L^2 - \beta^{n-1} L - \beta^n.$$

Weil übrigens das erste Glied der Reihe $= 1 = x^0$ war; so kann man es wie $L^0 x^0$ betrachten, und $L^0 = 1$ allemahl setzen.

Beyspiele.

I. Man soll $\frac{1}{1+x}$ durch eine Reihe ausdrücken.

Die Reihe soll seyn

$$1 + Lx + L^2x^2 + L^3x^3 + L^4x^4 + \ldots + L^n x^n.$$

Weil hier $\alpha = 0$; $\alpha^2 = 0$; $\alpha^3 = 0$ ---- und $\beta = 1$, $\beta^2 = 0$, $\beta^3 = 0$ u. s. f. ist; so muß der allgemeine Coefficient der verlangten Reihe $L^n = -\beta L^{n-1} = -L^{n-1}$ seyn, und aus diesem findet man nun die Coefficienten L, L^2, L^3, L^4 ---, wenn man 1, 2, 3, 4 ---- statt n nimmt: nämlich:

$L = -L^0 = -1$; $L^2 = -L = 1$.
$L^3 = -L^2 = -1$; $L^4 = -L^3 = 1$. u. s. f.
$L^5 = -L^4 = -1$; $L^6 = -L^5 = 1$.

Also ist $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \ldots$.

II. Man soll $\frac{1-x}{1-x-2x^2}$ in eine Reihe verwandeln.

Hier

Hier iſt $\alpha = -1$, aber $\alpha^2 = 0$, $\alpha^3 = 0$, $\alpha^4 = 0 \ldots$; ferner iſt $\beta = -1$; $\beta^2 = -2$, aber $\beta^3 = 0$, $\beta^4 = 0 \ldots$: alſo iſt der allgemeine Coefficient der verlangten Reihe:

$$L^n = \alpha^n - \beta L^{n-1} - \beta^2 L^{n-2} = \alpha^n + L^{n-1} + 2L^{n-2}.$$

Alſo iſt

$L = \alpha + 1 = -1 + 1 = 0$. $L^2 = \alpha^2 + L + 2L^0 = 0 + 0 + 2 = 2$.

$L^3 = \alpha^3 + L^2 + 2L = 0 + 2 + 0 = 2$.

$L^4 = \alpha^4 + L^3 + 2L^2 = 0 + 2 + 4 = 6$.

$L^5 = \alpha^5 + L^4 + 2L^3 = 0 + 6 + 4 = 10$.

$L^6 = \alpha^6 + L^5 + 2L^4 = 0 + 10 + 12 = 22$.

$L^7 = \alpha^7 + L^6 + 2L^5 = 0 + 22 + 20 = 42$.

$L^8 = \alpha^8 + L^7 + 2L^6 = 0 + 42 + 44 = 86$.

u. ſ. f.

Daher iſt

$$\frac{1-x}{1-x-2x^2} = 1 + 0x + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + 42x^7 + 86x^8 + \ldots\ldots$$

III. Man ſoll $\frac{1-x}{1-5x+6x^2}$ in eine Reihe verwandeln.

Hier muß ſeyn $\alpha = -1$, $\alpha^2 = 0$, $\alpha^3 = 0 \ldots\ldots$ $\beta = -5$, $\beta^2 = 6$; $\beta^3 = 0$, $\beta^4 = 0$ u. ſ. f. alſo iſt der allgemeine Coefficient:

$$L^n = \alpha^n - \beta L^{n-1} - \beta^2 L^{n-2} = \alpha^n + 5L^{n-1} - 6L^{n-2}.$$

Demnach iſt

$L = \alpha + 5 L^0 = -1 + 5 = 4.$

$L^2 = \alpha^2 + 5 L - 6 L^0 = 0 + 20 - 6 = 14.$

$L^3 = \alpha^3 + 5 L^2 - 6 L = 0 + 70 - 24 = 46.$

$L^4 = \alpha^4 + 5 L^3 - 6 L^2 = 0 + 230 - 84 = 146.$

$L^5 = \alpha^5 + 5 L^4 - 6 L^3 = 0 + 730 - 276 = 454.$

Alſo iſt

$$\frac{1-x}{1-5x+6x^2} = 1 + 4x + 14x^2 + 46x^3 + 146x^4 + 454x^5 + \ldots$$

IV. Die Function $\frac{1 - 2x + 3x^3}{1 - x^3 + 2x^5 - x^8}$ in eine Reihe zu verwandeln.

Es muß ſeyn $\alpha = -2$; $\alpha^2 = 0$; $\alpha^3 = 3$; $\alpha^4 = 0$; $\alpha^5 = 0$ u. ſ. f. ferner $\beta = 0$; $\beta^2 = 0$; $\beta^3 = -1$; $\beta^4 = 0$; $\beta^5 = 2$; $\beta^6 = 0$; $\beta^7 = 0$; $\beta^8 = -1$; $\beta^9 = 0$; $\beta^{10} = 0$ u. ſ. f.

Der allgemeine Coefficient iſt demnach:

$$L^n = \alpha^n - \beta^3 L^{n-3} - \beta^5 L^{n-5} - \beta^8 L^{n-8},$$

oder $L^n = \alpha^n + L^{n-3} - 2 L^{n-5} + L^{n-8}$.

Alſo iſt

$L = \alpha = -2$; $L^2 = 0$;

$L^3 = \alpha^3 + L^0 = 3 + 1 = 4$;

$L^4 = \alpha^4 + L = 0 - 2 = -2$;

$L^5 = \alpha^5 + L^2 - 2 L^0 = 0 + 0 - 2 = -2$;

$L^6 = \alpha^6 + L^3 - 2 L = 0 + 4 + 4 = 8$;

$L^7 = \alpha^7 + L^4 - 2 L^2 = 0 - 2 - 2 \cdot 0 = -2$;

$L^8 = \alpha^8 + L^5 - 2 L^3 + L^0 = 0 - 2 - 8 + 1 = -9$;

$L^9 = \alpha^9 + L^6 - 2 L^4 + L = 0 + 8 + 4 - 2 = 10$;

u. ſ. f.

Folglich

Folglich ist

$$\frac{1-2x+3x^3}{1-x^3+2x^5-x^8} = 1-2x+4x^3-2x^4-2x^5+8x^6 - 2x^7-9x^8+10x^9+\text{- - - - -}$$

V. Die Function $\frac{3+2x}{5+7x^2}$ in eine Reihe zu verwandeln.

Es ist

$$\frac{3+2x}{5+7x^2} = \frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)3}{\left(1+\frac{7}{5}x^2\right)5} = \frac{1+\frac{2}{3}x}{1+\frac{7}{5}x^2} \times \frac{3}{5}.$$

Nun setze man $\alpha = \frac{2}{3}$; $\alpha^2 = 0$; $\alpha^3 = 0$ - - - -; $\beta = 0$; $\beta^2 = \frac{7}{5}$; $\beta^3 = 0$; $\beta^4 = 0$, u. s. f. so ist das allgemeine Glied für die Reihe, welche die gebrochene Function $\frac{1+\frac{2}{3}x}{1+\frac{7}{5}x^2}$ ausdrücken soll:

$$L^n = \alpha^n - \beta^2 L^{n-2} = \alpha^n - \frac{7}{5} L^{n-2}.$$

Also ist

$$L = \alpha = \frac{2}{3}; L^2 = \alpha^2 - \frac{7}{5} L^0 = 0 - \frac{7}{5} = -\frac{7}{5};$$

$$L^3 = \alpha^3 - \frac{7}{5} L = 0 - \frac{14}{15} = -\frac{14}{15};$$

$$L^4 = \alpha^4 - \frac{7}{5} L^2 = 0 + \frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 5} = \frac{49}{25}; \text{ u. s. f.}$$

Es ist daher

$$\frac{1+\frac{2}{3}x}{1+\frac{7}{5}x^2} = 1+\frac{2}{3}x-\frac{7}{5}x^2-\frac{14}{15}x^3+\frac{49}{25}x^4\pm\cdots,$$

Folglich, wenn man dieses mit $\frac{3}{5}$ multiplicirt,

$$\frac{3+2x}{5+7x^2} = \frac{3}{5}+\frac{2}{5}x-\frac{7\cdot3}{5\cdot5}x^2-\frac{7\cdot2}{5\cdot5}x^3+\frac{3\cdot7\cdot7}{5\cdot5\cdot5}x^4\pm\cdots$$
$$= \frac{3}{5}+\frac{2}{5}x-\frac{21}{25}x^2-\frac{14}{25}x^3+\frac{147}{125}x^4\pm\cdots.$$

132. §. Erklärungen.

Man sagt, daß die Glieder einer Reihe steigen, wenn dieselben verschiedene Potenzen von einer gewissen Grösse x enthalten, und so geordnet sind, daß jedes folgende Glied eine höhere Potenz von x enthält, als das nächst vorhergehende: wenn aber sich das Gegentheil ereignet, wenn jedes folgende Glied einer Reihe eine niedrigere Potenz von x enthält, als das nächst vorhergehende; so sagt man, daß die Glieder fallen. Z. B. Bey der Reihe $ax; bx^2; cx^3; dx^4\cdots$ steigen die Glieder, hingegen fallen sie bey $ax^8; bx^7; cx^6; dx^5; ex^4\cdots$.

133. §. Erklärungen.

Wenn eine Reihe von der Beschaffenheit ist, daß die Summe von einigen ersten Gliedern der Summe der ganzen Reihe desto näher kömmt, je mehr man von den ersten Gliedern dazu nimmt; so sagt man, die Reihe nähere

sich

ſich (ſeries convergit): iſt aber eine Reihe ſo beſchaffen, daß, je mehr man von ihren erſten Gliedern zuſammen addirt, die Summe derſelben ſich von der Summe der ganzen Reihe deſto mehr entfernet; ſo pflegt man zu ſagen, die Reihe entferne ſich (ſeries divergit).

1. Zuſatz.

Beym wirklichen Gebrauch der Reihen, wenn man ihre ganzen Summen nicht genau angeben kann (130. §.), begnüget man ſich mit einigen erſten Gliedern, derer Summe ſtatt der Summe der ganzen Reihe genommen wird: die Ergänzung (130. §.) iſt alſo der Fehler, den man dabey begehet, und man muß ſorgen, dieſen Fehler ſo klein, als es ſich immer thun läßt zu machen. Man muß demnach ſuchen, ſolche Reihen in der Rechnung zu gebrauchen, die ſich nähern, und bey ihnen die Einrichtung zu treffen, daß ſie ſich ſo ſchnell, als möglich, nähern mögen: eine Reihe nähert ſich nämlich deſto ſchneller, je weniger man von ihren erſten Gliedern brauchet, um ihrer ganzen Summe nahe genug zu kommen.

2. Zuſatz.

Da es alſo offenbar iſt, daß eine Reihe ſich alsdann nähert, wenn ihre folgenden Glieder immer kleiner werden, und ſich deſto ſchneller nähert, je kleiner jedes folgende Glied in Anſehung des nächſt vorhergehenden wird; ſo kömmt beym wirklichen Gebrauch der Reihen (1. Zuſ.) alles darauf an, daß man die Glieder einer Reihe, wie ſie auf einander folgen, auf das möglichſte abnehmen laſſe: daß dieſes oft

in unſrer Gewalt ſey, davon kann man ſich durch nachſtehende Beyſpiele überzeugen.

I. Man wird den Bruch $\frac{c}{a+b}$ in eine Reihe verwandeln, wenn man $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{\left(1+\frac{b}{a}\right)a} = \frac{1}{1+\frac{b}{a}} \times \frac{c}{a}$ ſetzt: denn wenn man nun $\frac{b}{a} = x$ nimmt; ſo findet man nach (131. §. 2. Zuſ. 1. Beyſp.) die Reihe für $\frac{1}{1+\frac{b}{a}}$, und wenn dieſe mit $\frac{c}{a}$ multiplicirt wird; ſo kömmt heraus:

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - \frac{b^5c}{a^6} + \frac{b^6c}{a^7} \cdots \pm \frac{b^rc}{a^{r+1}}.$$

II. Hätte man aber $\frac{c}{a-b}$ in eine Reihe zu verwandeln, weil dieſes $= \frac{1}{1-\frac{b}{a}} \times \frac{c}{a}$ iſt; ſo müßte man $x = -\frac{b}{a}$ in (131. §. 2. Zuſ. 1. Beyſp.) ſetzen, die Reihe für $\frac{1}{1-\frac{b}{a}}$ zu erhalten, welche mit $\frac{c}{a}$ multiplicirt geben würde:

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} + \frac{b^5c}{a^6} + \cdots + \frac{b^rc}{a^{r+1}}.$$

III. Nun

III. Nun ist einleuchtend, daß beyde Reihen in I) und II) sich nähern müssen, wenn $a > b$ genommen wird, und daß sie sich desto schneller nähern werden, je grösser a in Vergleichung mit b seyn wird.

Man soll z. B. einen Bruch $\frac{c}{d}$ in eine solche Reihe verwandeln, daß die ersten Glieder derselben schon sehr genau eben den Bruch geben, welcher offenbar die Summe der ganzen Reihe seyn muß. Zu dieser Absicht kann man eine grosse ganze Zahl m nehmen, und $\frac{c}{d} = \frac{cm}{md} = \frac{cm}{md+1-1}$ $= \frac{c}{md+1-1} \times m$ setzen: wenn man also $md+1 = a$ und $1 = b$ bey der Formul II) setzt; so findet man die verlangte Reihe:

$$\frac{c}{d} = \left(\frac{c}{md+1} + \frac{c}{(md+1)^2} + \frac{c}{(md+1)^3} + \frac{c}{(md+1)^4} + \cdots\right)^m.$$

Sey $\frac{c}{d} = \frac{3}{2}$, und daher $c = 3$, $d = 2$, und man nehme $m = 10000$; so ist

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{20001} + \frac{3}{(20001)^2} + \frac{3}{(20001)^3} + \cdots\right)^{10000}.$$

Und nun ist klar, daß, obgleich die Anzahl der Glieder dieser Reihe völlig unbestimmt, ja unendlich groß ist, dennoch schon die ersten Glieder mit 10000 multiplicirt den Bruch $\frac{3}{2}$ sehr genau geben, und noch genauer geben würden, wenn man für m eine noch grössere Zahl nähme.

IV. Wenn man in der Formul I) $c=1$, $a=1$, $b=1$ setzt; so findet man

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1\ldots\pm 1.$$

Da nun $1-1=0$ ist; so scheint diese Reihe $\frac{1}{2}=0+0+0+0\ldots\ldots+0$ zu geben: daß dieses nur eine scheinbare Schwierigkeit ist, kann man aus der folgenden allgemeinen Betrachtung der Ergänzungen leicht abnehmen.

V. Es ist

$$\pm\frac{b^rc}{a^{r+1}}\mp\frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}}\pm\frac{b^{r+2}c}{a^{r+3}}\mp\frac{b^{r+3}c}{a^{r+4}}\pm\ldots\ldots=$$

$$=\pm\frac{b^rc}{a^{r+1}}\mp\frac{b^{r+1}}{a^{r+1}}\left(\frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}+\ldots\ldots\right)$$

$$=\pm\frac{b^rc}{a^{r+1}}\mp\frac{b^{r+1}}{a^{r+1}}\left(\frac{c}{a+b}\right)\text{ aus I)}$$

$$=\pm\frac{b^rc}{a^{r+1}}\mp\frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}b}.$$

Demnach ist aus I) der ganze Werth von $\frac{c}{a+b}$

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}+\ldots\pm\frac{b^rc}{a^{r+1}}\mp\frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}b}$$

Das letzte Glied dieser Reihe ist ein allgemeiner Ausdruck der zugehörigen Ergänzung (130. §.), und es ist klar, daß bey $\frac{b^rc}{a^{r+1}}$ das Zeichen + oder — befindlich seyn muß, nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Wollte

Wollte man z. B. nur 5 Glieder der Reihe zusammenrechnen; so wäre ihre Summe $=\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}+\frac{b^4c}{a^5}$, und, wegen $r=4$, folglich $r+1=5, r+2=6$, die zugehörige Ergänzung wäre $=-\frac{b^5c}{a^6+a^5b}$, und man kann sich auch leicht davon überzeugen, daß das, was auf der andern Seite der folgenden Gleichung stehet, dem Bruche $\frac{c}{a+b}$ gleich ist.

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}+\frac{b^4c}{a^5}-\frac{b^5c}{a^6+a^5b}\cdot$$

Wenn demnach c, a, b in Zahlen gegeben sind; so kann man leicht den Fehler bestimmen, welchen man begehen würde, indem man die Summe von einigen ersten Gliedern der zugehörigen Reihe statt der Summe der ganzen Reihe in einer Rechnung brauchte (1. Zus.), ohne diese Summe erst zu suchen, ja ohne den Bruch $\frac{c}{a+b}$ in die zugehörige Reihe zu verwandeln.

Z. B. Sey $c=3$, $a=100$, $b=2$, daher $\frac{c}{a+b}=\frac{3}{102}=\frac{3}{100+2}$. Nun nehme man $r=4$, daher $r+1=5$, $r+2=6$; so ist

$$\frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}b}=\frac{2^5.3}{100^6+100^5.2}=\frac{32.3}{1000000000000+200000000000}$$

$$=\frac{96}{1020000000000}=\frac{1}{10625000000}.$$

Weil aber $r=4$ eine gerade, daher $r+1=5$ eine ungerade Zahl war; so muß man eigentlich $\frac{-1}{10625000000}$ schreiben, das heißt nun: wenn man den Bruch $\frac{3}{102}=\frac{3}{100+2}$ in eine Reihe verwandelte, und davon nur fünf $r+1=5$ erste Glieder in eine Summe brächte; so würde diese Summe mit $\frac{-1}{10625000000}$ die Summe der ganzen Reihe, daher den Bruch $\frac{3}{102}$ genau geben, folglich wäre jene Summe nur um $\frac{1}{106250000}$ grösser als der Bruch $\frac{3}{102}$.

Will man diese Betrachtungen auf IV) anwenden; so setze man $c=1$, $b=1$, $a=1$, und dann ist die Ergänzung überhaupt $\frac{\mp b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}b}=\mp\frac{1}{2}$: also ist die Reihe IV)

$$\frac{1}{2}=1-\overset{\alpha}{1}+1-1+1-1\ldots\ldots\mp 1\pm\underset{\mu}{1}\mp\frac{1}{2}.$$

Nimmt man daher von α an so viel man will Glieder bis μ; so muß doch ihre Anzahl allemahl gerad oder ungerad seyn: ist sie gerad; so stehet $+$ bey μ, und die ganze Reihe verwandelt sich offenbar in $1+0+0+0\ldots\ldots\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$: ist aber die Anzahl der Glieder von α an bis μ ungerad; so stehet

stehet das Zeichen — bey μ, und die Reihe verwandelt sich gewiß in $1+0+0\ldots+0-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

VI. Man kann auch der Formul (76. §. 4. Zus.) eine solche Einrichtung geben, daß man sich derselben bey der Ausziehung der Wurzeln aus gegebenen Zahlen mit Vortheile bedienen kann.

Man setze nämlich bey der dortigen Formul $m=\frac{1}{\mu}$, und $a=c^\mu$; so findet man: $\ldots\ldots$ $b=-\frac{c^\mu b}{c^\mu+b}$

$$\sqrt[\mu]{(c^\mu+b)}=c\left(1+\frac{b}{\mu(c^\mu+b)}+\frac{(\mu+1)b^2}{\mu.2\mu(c^\mu+b)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(\mu+1)(2\mu+1)b^3}{\mu.2\mu.3\mu(c^\mu+b)^3}+\frac{(\mu+1)(2\mu+1)(3\mu+1)b^4}{\mu.2\mu.3\mu.4\mu(c^\mu+b)^4}+\ldots\right).$$

Es sey x diejenige Zahl, aus welcher man die Wurzel μ zu ziehen hat, und man setze $xA^\mu=c^\mu+b$; so ist $\sqrt[\mu]{(c^\mu+b)}=\sqrt[\mu]{xA^\mu}=A\sqrt[\mu]{x}$, und $\sqrt[\mu]{x}=\frac{\sqrt[\mu]{(c^\mu+b)}}{A}$: also ist:

$$\sqrt[\mu]{x}=\frac{c}{A}\left(1+\frac{b}{\mu xA^\mu}+\frac{(\mu+1)b^2}{\mu.2\mu x^2A^{2\mu}}+\frac{(\mu+1)(2\mu+1)b^3}{\mu.2\mu.3\mu x^3A^{3\mu}}\right.$$
$$\left.+\frac{(\mu+1)(2\mu+1)(3\mu+1)b^4}{\mu.2\mu.3\mu.4\mu x^4A^{4\mu}}+\ldots\right).$$

Um nun diese Formul gehörig zu gebrauchen, muß man die Zahlen A, c, b allemahl so bestimmen, daß $xA^\mu=c^\mu+b$, daher $xA^\mu-c^\mu=b$ wird: man muß also für A und c

solche

solche Zahlen nehmen, daß das Product xA^{μ} so viel möglich groß, und zugleich die Differenz $xA^{\mu} - c^{\mu}$ so viel möglich klein sey, indem alsdann die Reihe, welche $\sqrt[\mu]{x}$ geben soll, sich sehr schnell nähern wird: hat man demnach die gegebene Zahl x mit der Potenz A^{μ} einer Zahl A multipliçirt; so muß eine eben so grosse Potenz c^{μ} einer andern Zahl c möglich seyn, welche um eine kleine Differenz vom Producte xA^{μ} übertroffen wird, oder dasselbe übertrifft; im ersten Fall wird $xA^{\mu} - c^{\mu} = b$ eine kleine bejahte, und im andern Fall verneinte Zahl seyn.

Setzt man übrigens $\mu = 2$; $\mu = 3$; $\mu = 4$ u. s. f. so findet man aus der allgemeinen Formul die nachstehenden besondern Formuln:

$$\sqrt{x} = \frac{c}{A}\left(1 + \frac{b}{2xA^2} + \frac{3.b^2}{2.4x^2A^4} + \frac{3.5b^3}{2.4.6x^3A^6} + \frac{3.5.7b^4}{2.4.6.8x^4A^8} + \text{----}\right).$$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{c}{A}\left(1 + \frac{b}{3xA^3} + \frac{4.b^2}{3.6.x^2A^6} + \frac{4.7b^3}{3.6.9x^3A^9} + \frac{4.7.10b^4}{3.6.9.12x^4A^{12}} + \text{----}\right).$$

$$\sqrt[4]{x} = \frac{c}{A}\left(1 + \frac{b}{4xA^4} + \frac{5.b^2}{4.8x^2A^8} + \frac{5.9b^3}{4.8.12x^3A^{12}} + \frac{5.9.13b^4}{4.8.12.16x^4A^{16}} + \text{----}\right).$$

u. s. f.

Bey-

Beyspiele.

Man soll die Quadratwurzel von 2 bestimmen.

Die Zahl 2 mit dem Quadrat 25 von 5 multiplicirt giebt zum Product 50, und dieses übertrifft das Quadrat 49 von 7 nur um die Einheit: man setze also $x=2$, $\mu=2$, $A=5$, $c=7$; so ist $xA^{\mu}-c^{\mu}=2.25-49=50-49=1$, daher $b=1$. Für diese Werthe hat man demnach:

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{2.50}+\frac{3}{2.4.50^2}+\frac{3.5}{2.4.6.50^3}+\frac{3.5.7}{2.4.6.8.50^4}+\ldots\right);$$

$$=\frac{7}{5}+\frac{7}{500}+\frac{21}{100000}+\frac{7}{2000000}+\frac{49}{800000000}+\ldots\right);$$

$$=1{,}40000000+0{,}01400000+0{,}00021000+0{,}00000350+0{,}00000006+\ldots$$

oder $\sqrt{2}=1{,}41421356+\ldots$

Fünf Glieder dieser Reihe geben demnach die Quadratwurzel von 2 so nahe, daß sie von der wahren Wurzel nicht um $\frac{1}{100000000}$ abweichet.

Man soll die Cubikwurzel von 3 sehr nahe angeben.

Wenn man die Zahl 3 mit dem Cubus 8 von 2 multiplicirt; so ist das Product 24 vom Cubus 27 der Zahl 3 nur

nur um 3 unterschieden: man kann also $\mu = 3$, $x = 3$, $A = 2$, $c = 3$ setzen, und dann ist $xA^{\mu} = 3.2^3 = 24$, und $c^{\mu} = 3^3 = 27$, daher $b = xA^{\mu} - c^{\mu} = 24 - 27 = -3$.

Für diese Werthe, wenn man sie bey der Formul $\sqrt[3]{x}$ brauchet, findet sich

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{3.24} + \frac{4.3^2}{3.6.24^2} - \frac{4.7.3^3}{3.6.9.24^3} + \text{----}\right).$$

Man sieht schon, daß diese Reihe sich sehr schnell nähert; man kann aber andere Zahlen für A, c, b nehmen, wobey die Näherung noch schneller wird. Denn wenn man die gegebene Zahl 3 mit dem Cubus 729 von 9 multiplicirt; so wird das Product 2187 vom Cubus 2197 der Zahl 13 um 10 übertroffen: man setze also $x = 3$, $\mu = 3$, $A = 9$, $c = 13$; so ist $b = xA^3 - c^3 = 2187 - 2197 = -10$, und für diese Werthe findet man:

$$\sqrt[3]{3} = \frac{13}{9}\left(1 - \frac{10}{3.2187} + \frac{4.10^2}{3.6.2187^2} - \frac{4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \text{---}\right).$$

Der

Der XV. Abſchnitt.

Von der Berechnung der Logarithmen.

134. §. Erklärungen.

Ich billige die Gewohnheit, den Urſprung der Logarithmen aus der Zuſammenſetzung der Verhältniſſe zu erklären, weil aber dieſes in allen gut abgefaßten Anfangsgründen der Rechenkunſt bekannt genug iſt; ſo werde ich hier den kürzeſten Weg wählen, die Hauptgründe, welche zu der Berechnung der Logarithmen und ihrem Gebrauch dienen, in einem Zuſammenhange darzuſtellen.

Man nehme eine beliebige Zahl a, und davon beliebige Potenzen a^m, a^n, a^p, a^q und dgl.; ſo iſt jede Potenz auch eine Zahl, z. B. $a^m = A$, $a^n = B$; $a^p = C$, $a^q = D$, und jede dieſer Zahlen iſt durch die Zahl a und den Exponent der zugehörigen Potenz völlig beſtimmt: die Exponenten m, n, p, q ---- derjenigen Potenzen von der beſtimmten Zahl a, welche die Zahlen A, B, C, D---- geben, heißen die Logarithmen dieſer Zahlen; die beſtimmte Zahl a heißt die ihnen zugehörige Grundzahl oder Baſis; die Logarithmen m, n, p, q--- mit den zugehörigen Zahlen A, B, C, D--- machen ein Logarithmiſches Syſtem aus.

1. Zuſatz.

Jedes logarithmiſche Syſtem iſt durch die angenommene Baſis völlig beſtimmt, ſo, daß bey verſchiedenen logarithmiſchen

miſchen Syſtemen, welche nämlich verſchiedene Grundzahlen haben, einerley Logarithmen ungleiche Zahlen, bey jedem Syſteme aber einerley Logarithmen gleiche Zahlen zugehören. Wenn z. B. die Baſis eines Syſtems a und eines anderen b heißt, und $b > a$ iſt; ſo wird auch $b^m > a^m$, $b^n > a^n$, $b^p > a^p$ ſeyn müſſen: bey dem Syſteme der Baſis b müſſen demnach den Logarithmen m, n, p gröſſere Zahlen b^m, b^n, b^p zugehören, als die Zahlen a^m, a^n, a^p ſind, welche denſelben Logarithmen beym Syſteme der Baſis a zugehören.

2. Zuſatz.

Wenn $a^n = A$ und $a^m = B$ iſt, und man annimmt, daß $A = B$ iſt; ſo iſt auch $a^n = a^m$, daher auch $n = m$: und wenn man $n = m$ ſetzt; ſo iſt auch $a^n = a^m = A = B$: ſetzt man aber $A > B$, folglich $a^n > a^m$; ſo muß $n > m$ ſeyn, und für $n > m$ wäre auch $a^n > a^m$, daher $A > B$. Bey jedem logarithmiſchen Syſteme, deſſen Grundzahl a ſeyn mag, ſtehen alſo gleiche Zahlen allemahl mit gleichen Logarithmen, und ungleiche Zahlen mit ungleichen Logarithmen, nämlich gröſſere mit gröſſeren und kleinere mit kleineren, in Verbindung.

3. Zuſatz.

Wenn a die Grundzahl eines beliebigen logarithmiſchen Syſtems bedeutet, und eine Zahl $A = a^x$ iſt; ſo hat man $x = \log A$. Iſt nun $A = 1$; ſo muß auch $a^x = 1$, daher $x = 0$, folglich auch $\log A = \log 1 = 0$ ſeyn. Iſt aber $A = a$; ſo muß $a^x = a$, daher $x = 1$, und nun auch

log

$\log A = \log a = 1$ seyn. Das heißt: bey jedem logarithmischen Systeme ist der Logarithme von 1 allemahl gleich Null, und der Logarithme der zugehörigen Grundzahl allemahl $= 1$.

4. Zusatz.

Die Grundzahl eines logarithmischen Systems kann eine ganze oder gebrochene Zahl, gröſſer oder kleiner als Eins seyn: wenn man annimmt, daß die Basis eines Systems $a > 1$ und die Basis eines andern Systems $b < 1$ ist, und x eine ganze oder gebrochene bejahte Zahl bedeutet; so muß $a^x = A$ gewiß eine Zahl > 1, folglich eine ganze Zahl, oder ein unächter Bruch, hingegen muß $b^x = B$ gewiß < 1, daher gewiß ein ächter Bruch seyn. Es erhellet hieraus, daß einer ganzen Zahl oder einem unächten Bruche A eben der bejahte Logarithme x beym Systeme der Basis $a > 1$ zugehört, welcher bey dem andern Systeme der Basis $b < 1$ mit einem ächten Bruche B in Verbindung stehet. Unter allen Systemen aber, welche ächte Brüche b zu ihren Grundzahlen haben mögen, befindet sich auch ein System, wo die Grundzahl $b = \frac{1}{a}$ ist, und hier ist $B = b^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, und $A = a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$: man kann also aus der Basis a den ächten Bruch B, welcher bey der Basis $\frac{1}{a} = b$ mit einem bejahten Logarithmen x in Verbindung stehet, dadurch erhalten, wenn man den zugehörigen Logarithmen verneint nimmt; und eben so kann man die ganze Zahl oder

den unächten Bruch A, womit bey der Basis a ein bejahter Logarithme x zusammenhängen soll, aus der Basis $b = \frac{1}{a}$ erhalten, wenn man denselben Logarithmen verneint nimmt.

5. Zusatz.

Wenn in einem logarithmischen Systeme der Logarithme einer ganzen Zahl und eines unächten Bruches für bejaht angenommen wird; so stehen ächte Brüche bey demselben Systeme mit verneinten Logarithmen in Verbindung.

135. §. Lehrsatz.

Der Logarithme des Products aus zwoen Zahlen A und B, ist bey jedem logarithmischen Systeme, mit der Summe der Logarithmen derselben Zahlen gleich groß; und der Logarithme des Quotienten bey der Division zwoer Zahlen ist so groß, als der Unterschied des dem Divisor zugehörigen Logarithmen, vom Logarithmen, welcher dem Dividendus zugehört.

Beweis. Die Grundzahl des Systems sey a, und Log $A = x$, Log $B = y$; so hat man $A = a^x$, $B = a^y$ (134. §.), daher $AB = a^{x+y}$: also Log $AB = x + y$ (134. §.), oder Log AB = Log A + Log B.

Es ist auch $\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. Ist nun $x > y$; so sey $x = y + u$, und nun hat man $\frac{A}{B} = a^{x-y} = a^u$, daher Log $\frac{A}{B} = u$ (134. §.) $= x - y =$ Log $A -$ Log B.

Ist

Ist $x = y$; so hat man $\frac{A}{B} = a^{x-y} = a^0 = 1$: also $\text{Log}\frac{A}{B} = 0$ (134. §. 3. Zus.) $= x - y = \text{Log}\,A - \text{Log}\,B$.

Ist endlich $x < y$; so sey $x = y - u$, da dann ist $\frac{A}{B} = a^{x-y} = a^{-u} = \frac{1}{a^u}$: also ist $\text{Log}\frac{A}{B} = -u$ (134. §. 4. Zus.) $= x - y = \text{Log}\,A - \text{Log}\,B$.

136. §. Lehrsatz.

Der Logarithme jeder $n$ten Potenz von einer Zahl A, ist bey jedem Systeme so groß, als das Product aus dem Logarithmen derselben Zahl A, in den Exponent n ihrer Potenz.

Beweis. Die Basis des Systems sey a, und die Zahl $A = a^m$; so ist die $n$te Potenz davon $A^n = a^{mn}$: also ist $\text{Log}\,A^n = mn$ (134. §.), und $\text{Log}\,A = m$ (das.), folglich auch $\text{Log}\,A^n = n\,\text{Log}\,A$.

Daß dieses auch für eine Bruchpotenz gielt, ist offenbar: denn es sey was immer für ein gebrochener Exponent $= \frac{u}{v}$: also die Bruchpotenz der Zahl A sey $A^{\frac{u}{v}} = Z$; so muß auch $A^u = Z^v$ seyn, folglich auch $\text{Log}\,A^u = \text{Log}\,Z^v$. Es ist aber $\text{Log}\,A^u = u\,\text{Log}\,A$ und $\text{Log}\,Z^v = v\,\text{Log}\,Z$: also ist $u\,\text{Log}\,A = v\,\text{Log}\,Z$, daher $\text{Log}\,Z = \frac{u}{v}\,\text{Log}\,A$, und Z ist ohnehin $= A^{\frac{u}{v}}$.

Zusatz.

Daher ist $\text{Log } A^{\frac{1}{n}} = \text{Log } \sqrt[n]{A} = \frac{\text{Log } A}{n}$: wenn man nämlich den Logarithmen einer Zahl A durch eine Zahl n dividirt; so giebt der Quotient den Logarithmen der nten Wurzel von A.

137. §. Lehrsatz.

Es giebt bey jedem logarithmischen Systeme ausser seiner Grundzahl, welche a heißen mag, noch eine bestimmte Zahl μ, wodurch die demselben Systeme zugehörigen Logarithmen gewisser Zahlen eben so, wie durch die Grundzahl (134. §. 1. Zus.) bestimmt sind.

Beweis. 1) Eine völlig unbestimmte Zahl sey $1+x$, und der zugehörige Logarithme $= z$; so ist dieser dadurch völlig bestimmt, daß $1+x = a^z$, und $z = \text{Log}(1+x)$ seyn muß (134. §. und 1. Zus.).

2) Nun aber ist möglich für jede Zahl z zwo Zahlen n und m so zu nehmen, daß $n\,m = z$, daher auch $n\,m = \text{Log}(1+x)$, und $1+x = a^{n\,m}$ wird.

Es mögen ferner m, n, a was immer für Zahlen seyn; so kann man doch allemahl daraus eine Zahl $\mu = \frac{a^m - 1}{m}$ bestimmen, daß $m\mu + 1 = a^m$, und nun $(1+m\mu)^n = a^{n\,m} = 1+x$ aus (n. 2.), folglich auch $1+m\mu = (1+x)^{\frac{1}{n}}$, und $m\mu = (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1$, daher

mn

$\ln n = \frac{n}{\mu}\left((1+x)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, oder aus (n. 2.) auch

$\text{Log}\,(1+x) = \frac{n}{\mu}\left((1+x)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ wird.

3) Nun ist nach (76. §. 4. Zus.)

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}x + \frac{1-n}{n\cdot 2n}x^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{n\cdot 2n\cdot 3n}x^3$$
$$+ \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 4n}x^4 + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)(1-4n)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 4n\cdot 5n}x^5$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Also ist aus (n. 4.).

$$\text{Log}(1+x) = \frac{1}{\mu}\left(x + \frac{1-n}{2n}x^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2n\cdot 3n}x^3\right.$$
$$\left. + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{2n\cdot 3n\cdot 4n}x^4 + \ldots\ldots\right).$$

4) Es ist ferner aus (n. 3.) nach (76. §. 4. Zus.)

$$1+x = 1 + nm\mu + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}m^2\mu^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}m^3\mu^3 + \ldots$$

Oder wegen $nm = z$ aus (n. 2), folglich $m = \frac{z}{n}$,

$$1+x = 1 + \mu z + \frac{(n-1)}{1\cdot 2n}\mu^2 z^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3n^2}\mu^3 z^3 + \ldots\ldots$$

5) Und man hat aus (n. 3.) $\mu = \frac{a^m - 1}{m}$, daher

$a = (1+m\mu)^{\frac{1}{m}}$, folglich nach (76. §. 4. Zus.)

$$a = 1 + \mu + \frac{1-m}{2}\mu^2 + \frac{(1-m)(1-2m)}{2\cdot 3}\mu^3$$
$$+ \frac{(1-m)(1-2m)(1-3m)}{2\cdot 3\cdot 4}\mu^4 + \ldots\ldots$$

6) Setzt man aber $-x$ statt x in der Formul (n. 3.); so findet man:

$$\text{Log}(1-x)=\frac{1}{\mu}\left(-x+\frac{1-n}{2n}x^2-\frac{(1-n)(1-2n)}{2n\cdot 3n}x^3\right.$$
$$\left.+\frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{2n\cdot 3n\cdot 4n}x^4-\ldots\ldots\right).$$

7) Es ist ferner $\text{Log}(1+x)-\text{Log}(1-x)=\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ wegen (135. §.): den Ausdruck für diesen Logarithmen findet man daher, wenn man die Reihe (n. 6.) von der Reihe (n. 3.) abzieht, und dann ist

$$\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{\mu}\left(x+\frac{(1-n)(1-2n)}{2n\cdot 3n}x^3\right.$$
$$\left.+\frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)(1-4n)}{2n\cdot 3n\cdot 4n\cdot 5n}x^5+\ldots\ldots\right).$$

8) Weil endlich x einen völlig unbestimmten Werth haben soll; so müssen alle diese Formuln auch für $x=\frac{a-1}{a+1}$ gelten; alsdann ist aber $a=\frac{1+x}{1-x}$, daher $\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\text{Log}\,a=1$ nach (134. §. 3. Zus.): für diese Werthe erhält man also aus (n. 7.)

$$\mu=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(1-n)(1-2n)}{2n\cdot 3n}\cdot\frac{(a-1)^3}{(a+1)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)(1-4n)}{2n\cdot 3n\cdot 4n\cdot 5n}\cdot\frac{(a-1)^5}{(a+1)^5}+\ldots\right).$$

9) Alle

9) Alle diese Reihen müssen nun allemahl bestehen, wie immer auch die Zahlen m und n beschaffen seyn mögen, wenn nur $mn = z$, und $\mu = \frac{a^m - 1}{m}$ allemahl ist (n. 2. 3.). Man kann sich also bey jeder Zahl z einbilden, daß n immer grösser wird, wenn man sich nur zugleich einbildet, daß die andere Zahl allemahl $m = \frac{z}{n}$ bleibt, daß sie daher immer abnimmt, indem n fortwächst; es ist daher auch gestattet, die Zahl n bis zur Gränze $n = \infty$ fortwachsen zu lassen, wenn nur $m = \frac{z}{n}$ allemahl bleibt, folglich $m = \frac{z}{\infty}$ für $n = \infty$ angenommen wird. Sobald man aber $n = \infty$, und $m = \frac{z}{\infty}$ annimmt; sogleich muß $n - 1 = n$, $n - 2 = n$, $n - 3 = n$, u. s. f.; ferner $1 - m = 1$, $1 - 2m = 1$, $1 - 3m = 1$ u. s. f. seyn (106. §. 1. Zus.): für $n = \infty$ und $m = \frac{z}{\infty}$ verwandelt sich also die Formul (n. 3.) in die nachstehende I), die (n. 4.) in II) die (n. 5.) in III), die (n. 6.) in IV) die (n. 7.) in V) und die (n. 8.) in VI).

I) $\text{Log}(1+x) = \frac{1}{\mu}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \dots\right)$.

II) $1 + x = 1 + \mu z + \frac{1}{2}\mu^2 z^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\mu^3 z^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}\mu^4 z^4 + \dots$

III) $a = 1 + \mu + \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{2.3}\mu^3 + \frac{1}{2.3.4}\mu^4 + \ldots$

IV) $\text{Log}(1-x) = \frac{1}{\mu}\left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \ldots\right)$.

V) $\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2}{\mu}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \ldots\right)$.

VI) $\mu = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \frac{(a-1)^7}{7(a+1)^7} + \ldots\right)$.

10) Eigentlich sind dieses nur die wahren Gränzen, welchen man, so nahe man will, kommen kann, weil man die Zahl n der Gränze $n = \infty$, und mithin auch die andere Zahl m der Gränze $m = \frac{z}{\infty}$ so nahe man immer will bringen kann. Und nun ist einleuchtend, daß es bey jedem logarithmischen Systeme, dessen Grundzahl a ausdrücken soll, noch eine Zahl μ giebt, welche einen eben so bestimmten Werth hat, wie die Basis a selbst, wegen der Formul VI); und durch welche der Logarithme jeder Zahl $1+x$ oder $1-x$ völlig bestimmt ist, wegen der Formuln I) IV); und wodurch endlich die Grundzahl a selbst leicht bestimmt werden kann, wenn jene Zahl einmahl gegeben wird, wegen

der

der Formul III), so wie dieselbe auch zur Bestimmung jeder Zahl $1+x$, welche einem gegebenen Logarithmen z zugehörte, dienen würde, wegen der Formul II).

138. §. Erklärungen.

Die bey jedem logarithmischen Systeme bestimmte Zahl μ (137. §.) heißt der **Modul** desselben Systems: man kann statt μ was immer für eine Zahl nehmen, und für jede Zahl μ eine Grundzahl a und ein logarithmisches System (134. §.) nach (137. §. I. II. III. Form.) bestimmen. Wenn man $\mu = 1$ setzt; so heißt das System, dessen Modul $= 1$ ist, das System der **natürlichen Logarithmen**: alle übrige Logarithmen und logarithmische Systeme, wobey der Modul $\mu > 1$ oder $\mu < 1$ genommen wird, heißen **künstliche Logarithmen** und **logarithmische Systeme**, worunter das gemeine oder das **Briggische** System am merkwürdigsten ist; dieses System ist bekanntlich durch die Grundzahl (134. §.) $a = 10$ bestimmt worden.

1. Zusatz.

Aus (137. §. III. Form.) findet man also die Grundzahl a der natürlichen Logarithmen, wenn man ihren Modul $\mu = 1$ setzt: es wird nämlich seyn:

$$a = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6}$$

$$+ \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \ldots = 2,718281828\ldots\ldots.$$

2. Zusatz.

Und aus (137. §. VI. Form.) wird der Modul der gemeinen Logarithmen gefunden, wenn man ihre Grundzahl $a=10$ setzt.

$$\mu=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\frac{9^7}{7.11^7}+\frac{9^9}{9.11^9}+\cdots\right)$$

daher

$\mu=2,30258509299\ldots\ldots\ldots$

3. Zusatz.

Wenn α, β die Moduln derjenigen logarithmischen Systeme bedeuten, wobey einer und eben derselben Zahl $1+x$, die Logarithmen $\text{Log}(1+x)=A$, $\text{Log}(1+x)=B$ zugehören; so hat man aus (137. §. I. Form.)

$$A=\frac{1}{\alpha}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right),$$

$$B=\frac{1}{\beta}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right).$$

Also ist $A:B=\frac{1}{\alpha}:\frac{1}{\beta}=\beta:\alpha$, das heißt: die Logarithmen A und B, welche einer und eben derselben Zahl in zwey verschiedenen Systemen zugehören, verhalten sich gegen einander verkehrt, wie die Moduln der Systeme.

4. Zusatz.

Daher ist $A=B.\frac{\beta}{\alpha}$: sobald also der Logarithme B für den Modul β bekannt ist, sogleich kann man daraus den

Loga-

Logarithmen A, welcher einer und eben derselben Zahl, aber bey einem andern Modul α zugehören soll, bestimmen, wofern man nämlich den bekannten Logarithmen B mit dem zugehörigen Modul β multiplicirt, und das Product durch den Modul α für den noch unbekannten Logarithmen dividirt.

5. Zusatz.

Die in der angewandten Mathematik gebräuchlichsten Logarithmen sind die natürlichen und gemeinen: wenn A der natürliche Logarithme einer Zahl $1+x$, und B ihr gemeiner Logarithme heißt; so hat man aus (2. 3. 4. Zus.).

$$A = B \cdot \frac{2{,}302585092\,99}{1} = 2{,}302585092\,99\,B,$$

und $$B = A \cdot \frac{1}{2{,}302585092\,99} = 0{,}434294819\,A.$$

Sobald man also die gemeinen Logarithmen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ---- wird berechnet haben, sogleich wird man daraus die denselben Zahlen zugehörigen natürlichen Logarithmen bestimmen können, wenn man jene mit 2,302585092 99 multiplicirt: sind aber die natürlichen Logarithmen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ---- einmahl berechnet worden; so kann man aus ihnen die gemeinen bestimmen, wenn man die natürlichen mit 0,434294819 multiplicirt.

139. §. Aufgabe.

Die natürlichen Logarithmen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 zu berechnen.

Auflö-

Auflösung. Man setze $\frac{1+x}{1-x}=\frac{p+q}{p}$; so ist $x=\frac{q}{2p+q}$: also ist aus (137. §. V. Form.).

$$\text{Log}\left(\frac{p+q}{p}\right)=\frac{2}{\mu}\left(\frac{q}{2p+q}+\frac{q^3}{3(2p+q)^3}+\frac{q^5}{5(2p+q)^5}+\frac{q^7}{7(2p+q)^7}+\text{----}\right).$$

Aus dieser Formul kann man die Logarithmen aller Zahlen von 1 an bis 10 für jedes System sehr genau berechnen, wenn nur der Modul μ desselben Systems gegeben wird: für die natürlichen Logarithmen ist der Modul $\mu=1$ (138. §.); diese Logarithmen wird man also so finden:

I) Sey $p=1$, $q=0$; so ist $\frac{p+q}{p}=1$, und $\text{Log}\left(\frac{p+q}{p}\right)=\text{Log}\,1=0$.

II) Sey $p=q=1$; so ist $\frac{p+q}{p}=2$, und $\frac{q}{2p+q}=\frac{1}{3}$: also ist

$$\text{Log}\,2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\text{----}\right).$$

III) Sey $p=2$, $q=1$; so hat man $\frac{p+q}{p}=\frac{3}{2}$, und $\frac{q}{2p+q}=\frac{1}{5}$: also

$$\text{Log}\frac{3}{2}=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}+\text{----}\right).$$

Es

Es ist aber $\text{Log}\frac{3}{2} = \text{Log}\,3 - \log 2$ (135. §.), daher $\text{Log}\,3 = \text{Log}\,2 + \text{Log}\frac{3}{2}$: also ist

$$\text{Log}\,3 = \text{Log}\,2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} + \cdots\right).$$

Und Log 2 ist aus II) bekannt.

IV) $\text{Log}\,4 = \text{Log}\,2^2 = 2\,\text{Log}\,2$ (136. §.), und Log 2 ist aus II) schon bekannt.

V) Sey ferner $p = 4$, $q = 1$, daher $\frac{p+q}{p} = \frac{5}{4}$, und $\frac{q}{2p+q} = \frac{1}{9}$; so ist:

$$\text{Log}\frac{5}{4} = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \frac{1}{9\cdot 9^9} + \cdots\right).$$

Nun ist $\text{Log}\frac{5}{4} = \text{Log}\,5 - \text{Log}\,4$ (135. §.), daher $\text{Log}\,5 = \text{Log}\,4 + \text{Log}\frac{5}{4}$, und Log 4 aus IV) bekannt; also ist

$$\text{Log}\,5 = \text{Log}\,4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \frac{1}{9\cdot 9^9} + \cdots\right).$$

VI) $\text{Log}\,6 = \text{Log}\,3\cdot 2 = \text{Log}\,3 + \text{Log}\,2$, und diese Logarithmen sollen aus II) und III) bekannt seyn.

VII) Sey $p = 6$, $q = 1$, daher $\frac{p+q}{p} = \frac{7}{6}$ und $\frac{q}{2p+q} = \frac{1}{13}$; so hat man

Log

$$\text{Log}\frac{7}{6} = 2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3\cdot 13^3} + \frac{1}{5\cdot 13^5} + \frac{1}{7\cdot 13^7} + \frac{1}{9\cdot 13^9} + \ldots\right).$$

Es ist ferner $\text{Log}\frac{7}{6} = \text{Log}\,7 - \text{Log}\,6$, daher $\text{Log}\,7 = \text{Log}\,6 + \text{Log}\frac{7}{6}$, und Log 6 aus VI) bekannt: also

$$\text{Log}\,7 = \text{Log}\,6 + 2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3\cdot 13^3} + \frac{1}{5\cdot 13^5} + \frac{1}{7\cdot 13^7} + \frac{1}{9\cdot 13^9} + \ldots\right).$$

VIII) $\text{Log}\,8 = \text{Log}\,4.2 = \text{Log}\,4 + \text{Log}\,2$ (135. §.), und diese Logarithmen sollen schon aus IV) und II) bekannt seyn.

IX) $\text{Log}\,9 = \text{Log}\,3^2 = 2\,\text{Log}\,3$ (136. §.), und Log 3 ist aus III) bekannt.

X) $\text{Log}\,10 = \text{Log}\,5.2 = \text{Log}\,5 + \text{Log}\,2$ (135. §.), und diese Logarithmen sind schon aus (V. II.) bekannt.

Auf diese Art kann man also die natürlichen Logarithmen der ersten zehn Zahlen sehr genau berechnen: hier folgen sie, wie sie beym Hrn. Euler stehen:

Log 1 = 0,00000 00000 00000 00000 00000
Log 2 = 0,69314 71805 59945 30941 72321
Log 3 = 1,09861 22886 68109 69139 52452
Log 4 = 1,38629 43611 19890 61883 44642
Log 5 = 1,60943 79124 34100 37460 07593
Log 6 = 1,79175 94692 28055 00081 24773
Log 7 = 1,94591 01490 55313 30510 54639
Log 8 = 2,07944 15416 79835 92825 16964
Log 9 = 2,19722 45773 36219 38279 04905
Log 10 = 2,30258 50929 94045 68401 79914

1. Zusatz.

Weil Log AB = Log A + L B (135. §.) und Log A^m = m L A ist (136. §.); so kann man aus den einmahl berechneten Logarithmen der ersten zehn Zahlen die Logarithmen ihrer Vielfachen und Potenzen leicht berechnen: so wäre z. B. Log 12 = Log 4 + Log 3 = Log 4 . 3; Log 14 = L 7 . 2 = Log 7 + Log 2; Log 15 = Log 5 . 3 = Log 5 + Log 3; Log 16 = Log 4^2 = 2 Log 4, oder = Log 8 . 2 = L 8 + Log 2; Log 18 = Log 9 . 2 = Log 9 + Log 2 u. s. f.

Aber die Logarithmen der dazwischen liegenden Primzahlen (36. §.), 11, 13, 17 u. s. f. muß man besonders berechnen, welches sehr genau, und bequem auf diese Art geschehen kann.

Eine solche Primzahl heiße A, und man setze p = A^2 − q, daher p + q = A^2: ist nun q = 1; so hat man p = A^2 − 1, und 2 p + q = 2 A^2 − 1: für diese Werthe von p + q;

p, q.

p, q, und $2p+q$ verwandelt ſich alſo die Formel (139. §.) in die folgende, vorausgeſetzt, daß $\mu = 1$ iſt, wie dieſes bey den natürlichen Logarithmen, von welchen hier die Rede iſt, ſeyn muß:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{A^2}{A^2-1}\right) = 2\left(\frac{1}{2A^2-1} + \frac{1}{3(2A^2-1)^3} + \frac{1}{5(2A^2-1)^5} + \frac{1}{7(2A^2-1)^7} + \cdots\right).$$

Es iſt aber $A^2-1=(A+1)(A-1)$: alſo iſt

$$\mathrm{Log}\frac{A^2}{A^2-1} = \mathrm{Log}A^2 - \mathrm{Log}(A^2-1) = \mathrm{Log}A^2 - \mathrm{Log}(A+1)(A-1)$$
$$= 2\,\mathrm{Log}A - \mathrm{Log}(A+1) - \mathrm{Log}(A-1),$$

daher

$$\mathrm{Log}A = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Log}(A+1) + \mathrm{Log}(A-1)\Big) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{A^2}{A^2-1}:$$

alſo iſt

$$\mathrm{Log}A = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Log}(A+1) + \mathrm{Log}(A-1)\Big) + \frac{1}{2A^2-1} + \frac{1}{3(2A^2-1)^3} + \frac{1}{5(2A^2-1)^5} + \cdots\cdots$$

Z. B. Sey $A=11$, daher $A+1=12$, $A-1=10$; ſo iſt

$$\mathrm{Log}11 = \frac{1}{2}(\mathrm{Log}12 + \mathrm{Log}10) + \frac{1}{241} + \frac{1}{3\cdot 241^3} + \frac{1}{5\cdot 241^5} + \cdots\cdots$$

Sey $A=13$, daher $A+1=14$ und $A-1=12$; ſo iſt

$$\mathrm{Log}13 = \frac{1}{2}(\mathrm{Log}14 + \mathrm{Log}12) + \frac{1}{337} + \frac{1}{3\cdot 337^3} + \frac{1}{5\cdot 337^5} + \cdots\cdots$$

Sey

Sey $A = 17$, daher $A + 1 = 18$, $A - 1 = 16$; so ist.

$$\text{Log } 17 = \frac{1}{2}(\text{Log } 18 + \text{Log } 16) + \frac{1}{577} + \frac{1}{3 \cdot 577^3} + \frac{1}{5 \cdot 577^5} + \text{- - - -}$$

u. s. f.

2. Zusatz.

Wenn man jede von so berechneten natürlichen Logarithmen einer gewissen Zahl mit 0,43429819 multiplicirt; so giebt das Product den gemeinen Logarithmen derselben Zahl (138. §. 5. Zus.): aus den berechneten Tafeln der natürlichen Logarithmen können also die Tafeln der gemeinen Logarithmen sehr leicht durch bloße Multiplication jener Logarithmen mit dem angeführten beständigen Factor berechnet werden.

Anmerkung des Herausgebers.

Die Theorie von der Berechnung der Logarithmen, welche hier (137. §.) vollkommen nach Eulers Angabe (a) vorgetragen worden ist, scheinet mir vor vielen andern den Vorzug zu haben, daß sie alles aus der Natur der Sache, wovon hier gehandelt wird, herleitet, so, daß man die Grundursache leicht einsieht, warum die daselbst angeführten Reihen so, und nicht anders beschaffen sind. Was die Einrichtung und den Gebrauch logarithmischer Tafeln anbelangt, habe ich es für überflüßig gehalten, das hier

beyzubringen, was ich davon in des Hrn. Verfassers Papieren gefunden habe, indem das Wesentliche davon schon in jeden Anfangsgründen der Rechenkunst, welche hier vorausgesetzt werden, vorgetragen wird, und jeder angehende Analyst sich ohnehin mit einer Ausgabe solcher Tafeln versehen muß, wo gemeiniglich nicht nur die Einrichtung derselben, sondern auch ihr Gebrauch umständlich genug gezeigt zu werden pflegt: umständliche Nachrichten von dergleichen Tafeln wird man beym Hrn. Hofrath Kästner (b), Hrn. Scheibel (c), und die neuesten beym Hrn. Hindenburg (d) finden; die in (52. §. Anm.) angeführte von Hrn. Vega veranstaltete Ausgabe verdient aus manchen Ursachen besonders empfohlen zu werden.

(a) Introduct. in Alyf. Infin. Tom. I. Cap. VII.

(b) Astronom. Abhandlung. II. Samml. S. 1—79.

(c) Einleit. zur Mathem. Bücherkennt. 7. St. S. 1—88. und 11. St. S. 403—424.

(d) Leipziger Magaz. für reine und angewandte Mathem. aufs Jahr 1787. 1. St. S. 120.

Der XVI. Abſchnitt.

Das Merkwürdigſte von der Summirung der Reihen.

140. §. Willkührlicher Satz.

Wenn Z das allgemeine Glied einer gewiſſen Reihe, als eine Function von der unbeſtimmten Zahl n, welche durch ihre Einheiten die Stelle des Gliedes in der Reihe anzeiget (129. §.), und in der Folge der Index des Gliedes genannt wird, bezeichnet; ſo ſoll ſZ das ſummatoriſche Glied eben der Reihe, als eine Function von eben dem Index n (130. §.) bedeuten.

Zuſatz.

Wenn A, B, C ... P, Q lauter Functionen von dem Index n der Glieder einer Reihe ſind, und das allgemeine Glied derſelben Reihe $Z = A + B + C + D + \ldots + P + Q$ iſt; ſo iſt offenbar, daß, wenn man daraus die Glieder derſelben Reihe nach (129. §.) entwickelte, jeder Theil A, B, C ... P, Q eine eigene Reihe von Gliedern geben würde; daher iſt das allgemeine Glied Z aus allgemeinen Gliedern A, B, C ... P, Q mehrerer Reihen zuſammengeſetzt, und die Summe aller dieſer Reihen muß die Summe der Reihe geben, wovon das allgemeine Glied Z ſeyn ſoll: alſo iſt das ſummatoriſche Glied dieſer Reihe $\int Z = \int A + \int B + \int C + \ldots + \int P + \int Q$

Und wäre a eine beſtändige Gröſſe, die nämlich den Index n gar nicht enthält, A aber eine Function von n, und $y = aA$ das allgemeine Glied einer Reihe; ſo würde dieſes bedeuten, daß jedes Glied dieſer Reihe aus jedem Gliede derjenigen Reihe, welche A zum allgemeinen Gliede hätte, entſtehen würde, wenn man es mit a multiplicirte: alſo iſt auch $\int y = a \int A$ das ſummatoriſche Glied der Reihe, deren allgemeines Glied $y = aA$ ſeyn ſoll.

141. §. Aufgabe.

Es ſoll $Z = n^m$ eine ganze bejahte Zahl m zum Exponenten haben, und das allgemeine Glied der Reihe $1^m; 2^m; 3^m \ldots (n-1)^m; n^m$ von mten Potenzen der natürlichen Zahlen $1, 2, 3 \ldots n-1, n$ ſeyn: wie kann man das ſummatoriſche Glied $\int Z = \int n^m$ beſtimmen?

Auflöſung. 1) Bey der Reihe $0^{m+1}; 1^{m+1}; 2^{m+1}; 3^{m+1}; \ldots$ iſt $(n-1)^{m+1}$ das allgemeine Glied (129. §.); das ſummatoriſche Glied iſt daher $\int (n-1)^{m+1}$ (140. §.), folglich iſt bey dieſer Reihe (130. §.)

$$\int (n-1)^{m+1} = 0^{m+1} + 1^{m+1} + 2^{m+1} + 3^{m+1} + \ldots + (n-1)^{m+1}.$$

2) Hingegen iſt n^{m+1} das allgemeine Glied der Reihe $1^{m+1}; 2^{m+1}; 3^{m+1}; 4^{m+1} \ldots$ (129. §.); folglich iſt das ſummatoriſche Glied dieſer Reihe $= \int n^{m+1}$ (140. §.), oder es iſt (130. §.)

$$\int n^{m+1} = 1^{m+1} + 2^{m+1} + 3^{m+1} + \ldots + (n-1)^{m+1}$$

3) Aus (n. 1. 2.) folgt $\int n^{m+1} - \int (n-1)^{m+1} = n^{m+1}$.

4) Nun ist das allgemeine Glied $(n-1)^{m+1}$ der Reihe in (n. 1.) nach (77. §.)

$$(n-1)^{m+1} = n^{m+1} - \frac{(m+1)}{1} n^m + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} n^{m-1}$$

$$- \frac{(m+1))m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^{m-2}$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} n^{m-3} - \cdots$$

$$\pm \frac{(m+1)m(m-1)\cdots(m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r(r+1)} n^{m-r} \mp \cdots \pm 1.$$

Daß bey dem unbestimmten Gliede dieser Potenz für jede gerade Zahl r das untere Zeichen (—), und für jede ungerade Zahl r das obere Zeichen (+) gelten muß, folgt aus (76. §. 8. Zus.): daß ferner das letzte Glied derselben Potenz = 1 seyn muß, erhellet aus (76. §. 9. Zus.), indem m eine ganze Zahl, folglich das letzte Glied $= \pm 1^{m+1} = \pm 1$ ist, so, daß (+) für eine ungerade, und (—) für eine gerade Zahl m gielt, weil m+1 im ersten Fall gerad, und im andern Fall ungerad ist, wie dieses nach (70. §. 1. 2. Z.) nöthig ist.

5) Das summatorische Glied der Reihe (n. 1.) erhält man demnach aus (n. 4.) nach (140. §. Zus.).

$$\int(n-1)^{m+1} = \int n^{m+1} - \frac{m+1}{1}\int n^m + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}\int n^{m-1}$$

$$- \frac{(m+1)m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\int n^{m-2}$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\int n^{m-3} - \cdots\cdots$$

$$\cdots \pm \frac{(m+1)m(m-1)\cdots(m-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r(r+1)}\int n^{m-r} \mp \cdots \pm \int n^0.$$

6) Es ist aber $\int n^0$ das summatorische Glied derjenigen Reihe, wovon das allgemeine Glied n^0 seyn soll (140. §.), daher der Reihe 1; 1; 1; - - - - 1, welche aus n^0 nach (129. 10. §. 4. Zus.) folgt, indem $1^0 = 1$; $2^0 = 1$; $3^0 = 1$; $4^0 = 1$; u. s. f. ist: da also die Summe von n Gliedern dieser Reihe gewiß $= n$ ist; so ist auch $\int n^0 = n$.

7) Wenn man den Werth von $\int n^0$ aus (n. 6.) in (n. 5.) nimmt, und überdem $\int n^{m+1} - \int(n-1)^{m+1} = n^{m+1}$ wegen (n. 3.) setzt; so findet man aus (n. 5.) folgende Formul:

$$\frac{m+1}{1}\int n^m = n^{m+1} + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}\int n^{m-1} - \frac{(m+1)m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\int n^{m-2}$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\int n^{m-3} - \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots \pm \frac{(m+1)m(m-1)\cdots(m-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r(r+1)}\int n^{m-r} \mp \cdots \pm n;$$

also ist $\int n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{m}{1,2}\int n^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1,2,3}\int n^{m-2}$

$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}\int n^{m-3} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.5}\int n^{m-4}$

$+ \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1,2,3\ldots r(r+1)}\int n^{m-r} \mp \ldots \pm \frac{n}{m+1}$.

1. Zusatz.

Nach dieser Formul kann man demnach jede Reihe von gewissen Potenzen natürlicher Zahlen summiren, wenn einmahl die Summen der Reihen aller niedrigeren Potenzen bekannt sind: man setze nämlich erstlich $m=0$, dann $m=1$, $m=2$, $m=3$, $m=4$, $m=5$, $m=6$ u. s. f.; so findet man aus der angeführten Formul nachstehende besondere Formuln.

I) $\int n^0 = n$.

II) $\int n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\int n^0$.

III) $\int n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \int n - \frac{1}{3}\int n^0$.

IV) $\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{3}{2}\int n^2 - \int n + \frac{1}{4}\int n^0$.

V) $\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + 2\int n^3 - 2\int n^2 + \int n - \frac{1}{5}\int n^0$.

Wenn man aber den Werth von I) in II), hierauf die Werthe I) II) in III), dann die Werthe von I) II) III) in IV) u. s. f. substituirt; so hat man:

$$\int n^0 = n.$$

$$\int n = \frac{1}{2}(n^2+n).$$

$$\int n^2 = \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n).$$

$$\int n^3 = \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2).$$

$$\int n^4 = \frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n).$$

u. s. f.

2. Zusatz.

Wenn also eine von den Reihen $1; 1; 1; \cdots 1$; oder $1; 2; 3 \cdots n$; oder $1^2; 2^2; 3^2; \cdots n^2$; oder $1^3; 2^3; 3^3 \cdots n^3$; oder $1^4; 2^4; 3^4 \cdots n^4$ u. s. f. gegeben wird, und die Anzahl n ihrer Glieder bekannt ist; so kann man auch die Summe der ganzen Reihe leicht angeben.

Z. B. Bey $1; 1; 1; 1; 1; 1$; ist $n=6$, und nach (1. Zus.) ist nun die Summe $\int n^0 = n = 6$.

Bey $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ ist $n=8$, und nach (1. Zus.) die Summe $\int n = \frac{1}{2}(8^2+8) = \frac{1}{2}\cdot 72 = 36$; es ist auch wirklich $1+2+3+4+5+6+7+8=36$.

Bey $1^2; 2^2; 3^2; 4^2; 5^2; 6^2; 7^2$ ist $n=7$, und nach (1. Zus.) die Summe $\int n^2 = \frac{1}{6}(2\cdot 7^3 + 3\cdot 7^2 + 7)$ $= \frac{1}{6}(2\cdot 343+3\cdot 49+7) = 140$; und man findet auch wirklich $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2 = 1+4+9+16+25+36+49 = 140$.

142. §. Aufgabe.

Es soll $Z = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + \ldots + Pn^m$ das allgemeine Glied einer Reihe seyn; wie muß das summatorische Glied derselben Reihe beschaffen seyn? Vorausgesetzt, daß A, B, C ..... P beständige von n unabhängige Zahlen bedeuten.

Auflösung. Das verlangte summatorische Glied ist nach (140. §. Zus.)

$$\int Z = \int An^0 + \int Bn + \int Cn^2 + \int Dn^3 + \int En^4 + \ldots + \int Pn^m,$$

oder $\int Z = A\int n^0 + B\int n + C\int n^2 + D\int n^3 + E\int n^4 + \ldots + P\int n^m$.

Die Summirung der Reihe, deren allgemeines Glied Z ausdrückt, hängt demnach von der Summirung der Potenzen natürlicher Zahlen ab: da also diese Summirung bekannt ist (141. §.), vermöge welcher die Werthe von $\int n^0$; $\int n$; $\int n^2$; $\int n^3$ u. s. f. als bekannt vorausgesetzt werden können; so wird man auch jene Summirung allemahl bewerkstelligen können.

1. Zusatz.

Nach dieser Formul kann man also alle Reihen summiren, derer allgemeine Glieder ganze Functionen von dem Index n sind, nämlich solche, welche n nie im Nenner enthalten, und nur solche Potenzen von n in sich begreifen, derer Exponenten ganze und bejahte Zahlen sind. Ist das allgemeine Glied einer solchen Reihe gegeben; so muß man die bey ihm befindlichen Coefficienten von den Potenzen des Index n mit den bey $Z = A + Bn + Cn^2 + \ldots$ zu eben

denſelben Potenzen gehörigen Coefficienten vergleichen, und die auf dieſe Art beſtimmten Werthe von A, B, C - - - beym ſummatoriſchen Gliede $\int Z$ brauchen, um es in das ſummatoriſche Glied derjenigen Reihe zu verwandeln, deren allgemeines Glied gegeben iſt.

Beyſpiele.

I) Man ſoll das ſummatoriſche Glied der Reihe finden; deren allgemeines Glied $Z = 5 + 2n^2 - 3n$ ſeyn ſoll.

1) Die Reihe, zu welcher dieſes allgemeine Glied gehört, iſt nach (129. §.)

$$4; 7; 14; 25; 40; 59; \text{- - - } 5 + 2n^2 - 3n.$$

2) Vergleichet man aber daſſelbe Glied mit $Z = A + Bn' + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + \text{- - -}$; ſo findet man $A = 5$; $B = -3$; $C = 2$; $D = 0$; $E = 0$ u. ſ. f.: ſetzt man alſo dieſe Werthe in $\int Z = A\int n^0 + B\int n + C\int n^2 + D\int n^3 + \text{- - -}$; ſo findet man das verlangte ſummatoriſche Glied:

$$\int Z = 5\int n^0 - 3\int n + 2\int n^2.$$

3) Nimmt man endlich die Werthe von $\int n^0$; $\int n$; $\int n^2$ aus (141. §. Zuſ.); ſo hat man eben daſſelbe Glied völlig beſtimmt.

$$\int Z = 5n - \frac{3}{2}(n^2 + n) + \frac{2}{6}(2n^3 + 3n^2 + n),$$

$$\text{oder } \int Z = \frac{1}{6}(4n^3 + 23n - 3n^2).$$

4) Ge-

4) Gesetzt, man will die Summe von fünf ersten Gliedern haben; so ist $n=5$, daher die verlangte Summe

$$\int = \frac{1}{6}(4.5^3+23.5-3.5^2)=90.$$

Und es ist wirklich in (n. 1.) $4+7+14+25+40=90$.

II) Das allgemeine Glied einer Reihe soll $Z=3n^3-5n$ seyn; welches ist das summatorische Glied derselben Reihe?

1) Die zugehörige Reihe ist nach (129. §.) diese: $-2; 14; 66; 172; 350; \ldots\ldots 3n^3-5n$.

2) Die Vergleichung des gegebenen Gliedes mit $Z=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+\ldots$ giebt $A=0, B=-5, C=0, D=3, E=0, F=0$ u. s. f. setzt man also diese Werthe in $\int Z=A\int n^0+B\int n+C\int n^2+D\int n^3$; so hat man das verlangte summatorische Glied.

$$\int Z=-5\int n+3\int n^3; \text{ oder nach (141. §. Zus.)}$$

$$\int Z=-\frac{5}{2}(n^2+n)+\frac{3}{4}(n^4+2n^3+n^2),$$

$$\int Z=\frac{1}{4}(3n^4+6n^3-7n^2-10n).$$

Gesetzt, man will die Summe von vier ersten Gliedern haben; so ist $n=4$, und die Summe selbst:

$$\int = \frac{1}{4}(3.4^4+6.4^3-7.4^2-10.4)=250.$$

Und es ist auch in (n. 1.) die Summe von vier ersten Gliedern $-2+14+66+172=250$.

2. Zuſatz.

Aus dem allgemeinen Gliede $Z = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + \ldots + Pn^m$, und dem damit verbundenen ſummatoriſchen Gliede $\int Z = A\int n^0 + B\int n + C\int n^2 + \ldots$ kann man verſchiedene allgemeine Glieder, die zugehörigen Reihen, und ihre ſummatoriſchen Glieder erhalten, wenn man erſtlich die nach A folgenden, hierauf die nach B folgenden, dann die nach C folgenden Coefficienten u. ſ. f. gleich Null ſetzt.

I.

Das allgemeine Glied.

$$Z = An^0.$$

Die zugehörige Reihe. (129. §.).

$$A; A; A; A; A; A; A; \ldots\ldots A;$$

Das ſummatoriſche Glied.

$$\int Z = A\int n^0.$$

II.

Das allgemeine Glied.

$$Z = An^0 + Bn.$$

Die zugehörige Reihe.

$$A+B;\ A+2B;\ A+3B;\ A+4B \ldots A+nB.$$

Das ſummatoriſche Glied.

$$\int Z = A\int n^0 + B\int n.$$

III.

Das allgemeine Glied.

$$Z = An^0 + Bn + Cn^2.$$

Die

Die zugehörige Reihe.

$A+B+C;\ A+2B+4C;\ A+3B+9C.$

$A+4B+16C;\ A+5B+25C \cdots A+nB+n^2C.$

Das ſummatoriſche Glied.

$\int Z = A\int n^0 + B\int n + C\int n^2.$

IV.

Das allgemeine Glied.

$Z = A + Bn + Cn^2 + Dn^3.$

Die zugehörige Reihe.

$A+B+C+D;\ A+2B+4C+8D;\ A+3B+9C+27D;$

$A+4B+16C+64D \cdots\cdots A+nB+n^2C+n^3D.$

Das ſummatoriſche Glied.

$\int Z = A\int n^0 + B\int n + C\int n^2 + D\int n^3.$

u. ſ. f.

143. §. Erklärungen.

Es ſey eine Reihe A; B; C; D; E; F; G....P gegeben, und man ziehe jedes Glied dieſer Reihe von dem nächſt folgenden ab, ſchreibe hierauf die Differenzen $B-A=A^I$; $C-B=B^I$; $D-C=C^I$; u. ſ. f. wie unten in I): nun ziehe man auch jede Differenz von der in I) nächſt folgenden ab, und ſchreibe die neuen Differenzen $B^I-A^I=A^{II}$; $C^I-B^I=B^{II}$; $D^I-C^I=C^{II}$ u. ſ. f. in II): ferner ziehe man auch jede neue Differenz von der in II) nächſt folgenden ab, und ſchreibe $B^{II}-A^{II}=A^{III}$; $C^{II}-B^{II}=B^{III}$ $D^{II}-C^{II}=C^{III}$ u. ſ. f. in III): aus den Differenzen in III) kann man eben ſo die neuen Differenzen $B^{III}-A^{III}=A^{IV}$;

C^{III}

$C^{III} - B^{III} = B^{IV}$; $D^{III} - C^{III} = C^{IV}$, u. ſ. f. in IV) ſuchen, u. ſ. f.

	A	B	C	D	E	F	G . . . . P
I)	A^{I}	B^{I}	C^{I}	D^{I}	E^{I}	F^{I}	
II)		A^{II}	B^{II}	C^{II}	D^{II}	E^{II}	
III)			A^{III}	B^{III}	C^{III}	D^{III}	
IV)				A^{IV}	B^{IV}	C^{IV}	

Nun heißt A, B, C, D . . . . P eine Hauptreihe, und I) II) III) IV) ſind ihre Differenzreihen; I) iſt die erſte, II) die zweyte, III) die dritte u. ſ. f. Differenzreihe; die Glieder in I) ſind die erſten, in II) die zweyten, in III) die dritten u. ſ. f. Differenzen der Glieder der Hauptreihe A, B, C, D . . . P.

Wenn man auf eine Differenzreihe kömmt, deren Glieder alle einander gleich ſind; ſo nennt man die Hauptreihe A, B . . . P eine arithmetiſche Reihe, und zwar vom erſten, zweyten, dritten, vierten Range u. ſ. f. nachdem die erſten, zweyten, dritten, oder vierten Differenzen ihrer Glieder gleich ſind: die arithmetiſche Reihe vom erſten Range wird ſchlechtweg eine arithmetiſche Reihe, oder arithmetiſche Progreſſion genannt.

Z. B. Die Reihe 2, 5, 8, 11, 14 iſt eine arithmetiſche Progreſſion, oder eine arithmetiſche Reihe vom erſten Range, weil die erſten Differenzen ihrer Glieder $5 - 2 = 3$; $8 - 5 = 3$; $11 - 8 = 3$; $14 - 11 = 3$ alle einander gleich ſind: hingegen iſt 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

eine

eine arithmetiſche Reihe vom zweyten, und 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343 vom dritten Range; bey jener ſind nämlich die zweyten, und bey dieſer die dritten Differenzen einander gleich, denn es ſind:

bey	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49
Die erſten Differ.	3,	5,	7,	9,	11,	13,	
Die zweyten Differ.	2	2	2	2	2		

bey	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343
Die erſten Differ.	7,	19,	37,	61,	91,	127	
Die zweyten Differ.	12,	18,	24,	30,	36		
Die dritten Differ.	6,	6,	6,	6,			

1. Zuſatz.

Die Reihen II) III) IV) in (142. §. 2. Zuſ.), welche aus zwey, drey, vier erſten Gliedern von $Z = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + \ldots + Pn^m$ (142. §. Aufg.) beſtimmt wurden, ſind alſo arithmetiſche Reihen, II) vom erſten, III) vom zweyten, IV) vom dritten Range: und hätte man in (142. §. 2. Zuſ.) fünf, ſechs, ſieben u. ſ. f. erſte Glieder von $Z = A + Bn + \ldots + Pn^m$ genommen; ſo würde man aus ihnen die arithmetiſchen Reihen vom vierten, fünften, ſechſten Range u. ſ. f. erhalten haben.

2. Zuſatz.

Nach (142. §.) kann man demnach ſowohl das allgemeine Glied als das ſummatoriſche jeder gegebenen arithmetiſchen Reihe vom erſten, zweyten, dritten Range u. ſ. f. leicht beſtimmen: wenn nämlich eine ſolche Reihe gegeben

wird;

wird; ſo muß man dieſelbe mit einer zu eben demſelben Range in (142. §. 2. Zuſ.) gehörigen Reihe (1. Zuſ.) vergleichen; man muß ſo viele erſte Glieder der gegebenen Reihe mit den gleichnahmichten erſten Gliedern der damit in (142. §. 2. Zuſ.) verbundenen Reihe vergleichen, wie viele Coefficienten A, B, C --- bey dem (daſ.) vorhandenen allgemeinen und ſummatoriſchen Gliede befindlich ſind; auf dieſe Art wird man eben ſo viele Gleichungen erhalten, woraus ſich die unbeſtimmten Coefficienten A, B, C --- werden beſtimmen laſſen; und wenn man hierauf die gefundenen Werthe ſtatt A, B, C --- bey dem allgemeinen und ſummatoriſchen Gliede (142. §. 2. Zuſ.) nimmt; ſo werden dieſelben Glieder in das allgemeine und ſummatoriſche Glied der gegebenen Reihe verwandelt werden.

3. Zuſatz.

Soll daher a, b, c --- p eine arithmetiſche Reihe vom erſten Range ſeyn; ſo kann man, wegen (2. Zuſ.), das allgemeine Glied Z, und das ſummatoriſche $\int Z$ derſelben Reihe aus (142. §. 2. Zuſ. II. Form.) ſo ſuchen.

$$a = A + B; \quad b = A + 2B:$$

alſo $A = a - B$, und $b = a - B + 2B$,

oder $b = a + B$, daher $B = b - a$,

und nun $A = a - b + a = 2a - b$.

$$Z = A + Bn = 2a - b + (b - a)n.$$

$$\int Z = A\int n^0 + B\int n = (2a - b)\int n^0 + (b - a)\int n,$$

oder nach (141. §. 1. Zuſ.).

$$\int Z = \frac{1}{2}(n^2(b - a) + n(3a - b)).$$

Z. B. Sey eine völlig bestimmte Reihe 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 ---- gegeben, welche gewiß eine arithmetische Reihe vom ersten Range ist. Hier muß also seyn $a=3$, $b=5$; das allgemeine und summatorische Glied dieser Reihe ist daher:

$$Z=2.3-5+(5-3)n=1+2n.$$

$$\int Z=\frac{1}{2}(n^2(5-3)+n(3.3-5))=n^2+2n.$$

Die Richtigkeit des allgemeinen Gliedes erhellet aus (129. §.), und weil für $n=1$ sowohl $Z=3$ als $\int Z=3$ wird; so erhellet dieselbe auch aus (130. §. 2. Zus.): gesetzt ferner, man will die Summe von fünf ersten Gliedern haben; so ist $n=5$, und die verlangte Summe $\int Z=5^2+2.5=35$: es ist aber auch $3+5+7+9+11=35$.

Wäre hingegen a, b, c, d ---- p eine arithmetische Reihe vom zweyten Range; so würde man, wegen (2. Zus.) das allgemeine Glied Z und das summatorische $\int Z$ für sie aus (142. §. 2. Zus. III. Form.) auf die nachstehende Art finden:

$$A+B+C=a;\ A+2B+4C=b;\ A+3B+9C=c;$$

also ist:

$$A=\frac{6a-6b+2c}{2};\ B=\frac{8b-5a-3c}{2};\ C=\frac{a+c-2b}{2}.$$

Aus Z, und $\int Z$ in (142. §. 2. Zus. III. Form.) mit Zuziehung der Werthe von $\int n^0$, $\int n$, $\int n^2$ aus (141. §. 1. Z.) findet man daher:

$$Z = \frac{(6a+2c-6b)+(8b-5a-3c)n+(a+c-2b)n^2}{2},$$

$$\int Z = \frac{1}{6}(11a+2c-7b)n+\frac{1}{6}(9b-6a-3c)n^2+\frac{1}{6}(a+c-2b)n^3 \ldots$$

Zum Beyſpiele kann die Reihe 5, 8, 13, 20, 29, 40 dienen, welche eine arithmetiſche Reihe vom zweyten Range iſt.

Bey dieſer Reihe muß man ſetzen $a=5, b=8, c=13$, und für dieſe Werthe findet man das allgemeine Glied Z und das ſummatoriſche $\int Z$ derſelben Reihe, wie folgt, beſchaffen:

$$Z = 4+n^2; \quad \int Z = \frac{1}{6}(25n+3n^2+2n^3).$$

Setzt man in Z erſtlich $n=1$, ſodann $n=2, n=3$, $n=4$ u. ſ. f.; ſo kommen die Glieder der gegebenen Reihe heraus, wie dieſes nach (129. §.) geſchehen muß: für $n=1$ wird $Z=5$, und auch $\int Z=5$, welches nach (130. §. 2. Zuſ.) geſchehen muß: verlangt man ferner die Summe von zehn erſten Gliedern der gegebenen Reihe; ſo ſetze man $n=10$, und dann iſt die verlangte Summe:

$$\int Z = \frac{1}{6}(25.10+3.10^2+2.10^3) = 425.$$

Und man findet daſſelbe, wenn man die gegebene Reihe bis zum zehnten Gliede fortſetzt: denn ſie wird ſeyn 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, 68, 85, 104, und nun iſt $5+8+13+20+29+40+53+68+85+104 = 425$.

Dieſe

Diese Beyspiele sind hinreichend, die Art zu erläutern, wie man sich zu verhalten hat, wenn eine arithmetische Reihe vom dritten, vierten u. s. f. Range gegeben wird, und man sowohl das allgemeine als summatorische Glied derselben wegen (2. Zus.) aus (142. §. und 2. Zus.) bestimmen will.

144. §. Aufgabe.

Wenn a das erste Glied einer arithmetischen Progression, ω das nte Glied derselben, folglich n die Anzahl ihrer ersten Glieder von a bis ω, dann d die beständige Differenz dieser Glieder, und s ihre Summe heißt; wie kann man jedes von den fünf Dingen a, ω, n, d, s bestimmen, wenn was immer für drey Dinge von den vier übrigen gegeben werden?

Auflösung. Man kann jedes von den fünf Dingen aus jeden drey Dingen von den vier übrigen nach den folgenden Formuln bestimmen:

Für a

I. $a = \omega + d(1 - n)$. II. $a = \frac{2s}{n} - \omega$.

III. $a = \frac{1}{2}d + \sqrt{\left(\omega^2 + d\left(\omega + \frac{1}{4}d - 2s\right)\right)}$.

IV. $a = \frac{2s + dn - dn^2}{2n}$.

Für d

V. $d = \frac{\omega - a}{n - 1}$. VI. $d = \frac{2(s - an)}{n(n - 1)}$.

VII. $d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - \omega - a}$. VIII. $d = \frac{2(\omega n - s)}{n(n - 1)}$.

Für n

IX. $n = \frac{d+\omega-a}{d}$. X. $n = \frac{2s}{a+\omega}$.

XI. $n = \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{d}\right)\left(1 + \sqrt{\left(1 + \frac{8ds}{d^2+4a^2-4ad}\right)}\right)$.

XII. $n = \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega}{d}\right)\left(1 + \sqrt{\left(1 + \frac{8ds}{d^2+4d\omega+4\omega^2}\right)}\right)$.

Für ω

XIII. $\omega = a + d(n-1)$. XIV. $\omega = \frac{2s}{n} - a$.

XV. $\omega = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\left(2ds + a^2 + \frac{1}{4}d^2 - ad\right)}$.

XVI. $\omega = \frac{2s+dn(n-1)}{2n}$.

Für s

XVII. $s = \frac{a+\omega}{2} \cdot n$. XVIII. $s = \frac{(2a+d(n-1))n}{2}$.

XIX. $s = \frac{a+\omega}{2}\left(1 + \frac{\omega-a}{d}\right)$.

XX. $s = \frac{(2\omega+d(1-n))n}{2}$.

Beweis. 1) Die arithmetische Progression, wovon hier die Rede seyn soll, mag a, b, c ... ω heißen; so ist die Differenz der Glieder $d = b - a$ (143. §.), daher $b = d + a$. Weil also dieses eine arithmetische Reihe vom ersten Range ist, (a. a. O.), und das nte oder allgemeine Glied derselben (129. §.) ω, die Summe aber von n ersten Gliedern,

Gliedern, folglich das summatorische Glied (130. §.) s heißt; so hat man aus (143. §. 3. Zus.)

$$\omega = 2a - b + (b - a)n,$$

$$s = \frac{1}{2}(n^2(b-a) + n(3a-b)).$$

Weil ferner $b = d + a$ war; so wird man für diesen Werth von b aus den hier angeführten Formuln die Formuln XIII) und XVIII) erhalten.

Aus der Formul XIII), welche die Dinge ω, a, d, n enthält, kann man nun die Formuln I) V) IX), und aus der Formul XVIII), worinn die Dinge a, d, n, s stecken, kann man die Formuln IV) VI) XI) herleiten, und so erhellet die Richtigkeit der Formuln I) IV) V) VI) IX) XI) XIII) XVIII).

2) Ferner erhält man aus den Formuln I) und IV) folgende Gleichung:

$$\omega + d(1-n) = \frac{2s + dn - dn^2}{2n}.$$

Aus dieser Gleichung aber kommen die Formuln XVI) XX) VIII) heraus. Sodann findet man aus den Formuln V) VI) die nachstehende Gleichung.

$$\frac{\omega - a}{n-1} = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}.$$

Und aus ihr findet man die Formuln XIV) XVII) X) II). Endlich folgt aus den Formuln IX) X) die Gleichung:

$$\frac{d + \omega - a}{d} = \frac{2s}{a + \omega}.$$

Und diese giebt die übrigen Formuln III) VII) XV) XIX).

Zusatz.

Die vornehmsten Eigenschaften arithmetischer Progressionen geben die Formuln V); IX); X); XIII); XVII); wenn nämlich ω das letzte Glied, daher n die Anzahl und s die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression bedeutet; so kann man daraus folgende Sätze ziehen.

Aus V). Wenn man die Differenz des ersten Gliedes einer arithmetischen Progression von ihrem letzten Gliede, durch die um Eins verminderte Anzahl ihrer Glieder dividirt; so giebt der Quotient die beständige Differenz ihrer Glieder.

Z. B. Bey 5; 8; 11; 14; 17; 20 ist die Differenz der Glieder $= 3$, und auch $\frac{20-5}{6-1} = \frac{15}{5} = 3$.

Aus. IX). Wenn man zur beständigen Differenz der Glieder, die Differenz des ersten Gliedes vom letzten addirt, und die Summe durch die gemeinschaftliche Differenz der Glieder dividirt; so giebt der Quotient die Anzahl der Glieder.

Beym vorigen Beyspiele ist die Anzahl der Glieder $= 6$, und es ist auch $\frac{3+(20-5)}{3} = \frac{18}{3} = 6$.

Aus X). Die Anzahl der Glieder wird auch dadurch gefunden, wenn man die doppelte Summe aller Glieder durch die Summe der äussersten Glieder dividirt, nämlich des ersten und letzten Gliedes.

Beym

Beym vorigen Beyſpiele iſt die Summe aller Glieder $= 75$, und ihre Anzahl $= 6$, und nun iſt auch $\frac{2 \cdot 75}{5+20} = 2 \cdot 3 = 6$.

Aus XIII). Man findet jedes Glied, wenn man zum erſten Gliede das Product aus der beſtändigen Differenz in die Anzahl der vorhergehenden Glieder addirt, daher das letzte Glied, wenn man zum erſten das Product aus der beſtändigen Differenz in die um Eins verminderte Anzahl aller Glieder addirt.

So iſt beym vorigen Beyſpiele das vierte Glied $14 = 5 + 3\,(4 - 1)$, und das ſechste, oder letzte $20 = 5 + 3\,(6 - 1)$.

Aus XVII). Die Summe aller Glieder iſt ſo groß als die Hälfte des Products aus der Summe der äuſſerſten Glieder in die Anzahl aller Glieder.

So war beym vorigen Beyſpiele die Summe aller Glieder $= 75$, und es iſt auch $\frac{(5+20)\,6}{2} = 25 \cdot 3 = 75$.

145. §. Erklärungen.

Allgemeine Darstellung figurirter Reihen.

	1	2	3,	4	5	...	n−1	n
I	1,	1+d,	1+2d,	1+3d,	1+4d	...	1+(n−2)d,	1+(n−1)d
II	0,	1,	2+d,	3+3d,	4+6d	.....	A	B
III	0,	0,	1,	3+d,	6+4d	.....	C	D
IV	0,	0,	0,	1,	4+d	.....	E	F
V	0,	0,	0,	0,	1	.....	G	H
VI	0,	0,	0,	0,	0,	1	.....	
⋮	.....							
⋮	.....							
N	0,	0,	0,	0,	0	.....	Y ...	Z

1) Die erste horizontale Reihe, wo d entweder $=0$ oder eine ganze Zahl ist, heißt die Grund- oder Hauptreihe, und aus dieser entstehet die zweyte horizontale Reihe II), aus der zweyten die dritte III), aus der dritten die vierte IV) u. s. f. nach dem bestimmten Gesetze, daß jedes 1te Glied jeder horizontalen Reihe, die Summe von $r-1$ ersten Gliedern der nächst vorhergehenden horizontalen Reihe ist: so ist z. B. das fünfte Glied $6+4d$ der dritten Reihe III) die Summe $0+1+2+d+3+3d$ von vier ersten Gliedern der zweyten Reihe II).

Die Zahlen, welche die zweyte Reihe II) enthalten soll, müssen durch den Werth von d in der ersten Reihe bestimmt werden; sie heißen überhaupt die Polygonalzahlen, insbesondere aber nennt man sie die Triangular- Tetragonal-

Penta-

Pentagonal- Hexagonalzahlen u. ſ. f. nachdem $d=1$, $d=2$, $d=3$, $d=4$ iſt, u. ſ. f.: für dieſe Werthe von d erhält man nämlich aus der Reihe II).

Die Reihe der Triangularzahlen für $d=1$

1, 3, 6, 10, 15, 21 - - - - -

Die Reihe der Tetragonalzahlen für $d=2$

1, 4, 9, 16, 25, 36 - - - - -

Die Reihe der Pentagonalzahlen für $d=3$

1, 5, 12, 22, 35, 51 - - - - -

Die Reihe der Hexagonalzahlen für $d=4$

1, 6, 15, 28, 45, 66 - - - - -

u. ſ. f.

2) Aus der Reihe II) von Polygonalzahlen entſtehen die übrigen Reihen III) IV) V) VI) - - - N), und die Zahlen, welche ſie enthalten, heißen die Pyramidalzahlen von der erſten, zweyten, dritten, vierten Ordnung u. ſ. f.: die Pyramidalzahlen der erſten Ordnung enthält die Reihe III), welche unmittelbar aus der Reihe II) der Polygonalzahlen entſtehet, und darauf folgen die Reihen IV) V) VI)--- der Pyramidalzahlen von der zweyten, dritten, vierten Ordnung u. ſ. f. In Rückſicht auf die Reihe II) von Polygonalzahlen, aus welcher die Reihen III) IV) V) - - - N) von Pyramidalzahlen entſtehen, pflegt man dieſe dreyſeitige, vierſeitige, fünfſeitige Pyramidalzahlen u. ſ. f. zu nennen, nachdem ſie aus der Reihe II) von Triangular- Tetragonal- Pentagonalzahlen u. ſ. f. entſtanden ſind.

3) Man kann alle diese Zahlen figurirte Zahlen, und die Reihen, welche sie enthalten, figurirte Reihen nennen: und weil alle Reihen von Pyramidalzahlen aus der Reihe II) der Polygonalzahlen entstehen; so wird man in der Folge die Reihe II) der Polygonalzahlen die erste figurirte Reihe nennen, worauf die übrigen folgen sollen, nämlich die zweyte III) mit den Pyramidalzahlen von der ersten Ordnung, die dritte IV) mit den Pyramidalzahlen von der zweyten Ordnung u. s. f.: die Zahlen 1, 2, 3, 4 . . ., welche durch ihre Einheiten ausdrücken, von wievielten figurirten Reihen die Rede ist, heißen Indices derselben Reihen, nämlich 1 ist der Index der ersten, 2 der zweyten . . . N der Nten figurirten Reihe.

1. Zusatz.

Weil die erste figurirte Reihe die Polygonalzahlen, die zweyte die Pyramidalzahlen der ersten Ordnung, die dritte die Pyramidalzahlen der zweyten Ordnung u. s. f. enthält; so ist der Exponent der Ordnung, zu welcher eine Reihe von Pyramidalzahlen gehört, allemahl um Eins kleiner, als der Index der Reihe: denn die Nte figurirte Reihe mit dem Index N (145. §. n. 3.) enthält die Pyramidalzahlen der (N — 1)ten Ordnung.

2. Zusatz.

Jede figurirte Reihe (145. §. n. 3.) hat so viel erste Glieder = 0, als Einheiten der Index derselben: und weil jeder Reihe ntes Glied die Summe von n — 1 ersten

Gliedern

Gliedern der nächst vorhergehenden Reihe ist (daſ. n. 1.), und dieſe Summe aus dem ſummatoriſchen Gliede der nächſt vorhergehenden Reihe erhalten wird, wenn man in ihm $n-1$ ſtatt n ſetzt (130. §.); ſo wird dieſes auch das allgemeine Glied jener Reihe geben (129. §.).

3. Zuſatz.

Die Reihe I) in (145. §.) iſt eine arithmetiſche Progreſſion, deren erſtes Glied $=1$, und die beſtändige Differenz der Glieder $=d$ iſt (143. §.): aus der XVIIten Formul (144. §.) findet man alſo die Summe von $n-1$ erſten Gliedern derſelben, wenn man $a=1$, $\omega=1+(n-2)d$, und $n-1$ ſtatt n ſetzt, und weil dieſe Summe das allgemeine oder nte Glied B der Reihe II) von Polygonalzahlen (145. §.) ſeyn muß; ſo hat man das allgemeine B und daher auch das ſummatoriſche Glied $\int B$ jeder Reihe von Polygonalzahlen.

$$B=\frac{1}{2}(2+(n-2)d)(n-1)=\frac{1}{2}(dn^2-3dn+2n+2d-2).$$

und (142. §.)

$$\int B=\frac{1}{2}(d\int n^2-3d\int n+2\int n+2d\int n^0-2\int n^0)$$

oder (141. §. 1. Zuſ.)

$$\int B=\frac{1}{6}(dn^3-3dn^2+2dn+3n^2-3n).$$

Nach dieſer Formul kann man demnach jede Reihe von Polygonalzahlen ſummiren, indem $d=1$, $d=2$, $d=3$ u. ſ. f. ſeyn muß, nachdem die Formul für die Triangular- Tetragonal- Pentagonalzahlen u. ſ. f. gielt (145. §. n. 1.).

4. Zu-

4. Zusatz.

In (3. Zus.) ist die Reihe II) der Polygonalzahlen als eine figurirte Reihe betrachtet worden, welche die o zum ersten Gliede hat (145. §.): will man sie als eine von der Einheit anfangende arithmetische Reihe betrachten; so darf man nur das eigentlich zweyte Glied für das erste, folglich das (n+1)te für das nte nehmen, folglich n+1 statt n in den Formuln (3. Zus.) setzen, um das allgemeine und summatorische Glied einer solchen Reihe zu erhalten: es wird nämlich seyn:

$$B = \frac{1}{2}(dn^2 - dn + 2n).$$

$$\int B = \frac{1}{6}(dn^3 - dn + 3n^2 + 3n).$$

Z. B. Sey die Reihe 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120 der Hexagonalzahlen (145. §. n. 1.); so muß man für sie $d = 4$ setzen: das allgemeine und summatorische Glied derselben ist also:

$$B = \frac{1}{2}(4n^2 - 4n + 2n) = 2n^2 - n.$$

$$\int B = \frac{1}{6}(4n^3 - 4n + 3n^2 + 3n) = \frac{1}{6}(4n^3 + 3n^2 - n).$$

Will man die Summe von sechs ersten Gliedern haben; so muß man $n = 6$ nehmen, und dann ist die verlangte Summe

$$\int B = \frac{1}{6}(4.6^3 + 3.6^2 - 6 = \frac{1}{6}(4.216 + 3.36 - 6) = 161.$$

Und es ist auch wirklich $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 = 161$.

5. Zu-

5. Zuſatz.

Wenn man $n-1$ ſtatt n in $\int B$ (3. Zuſ.) ſetzt; ſo erhält man die Summe von $n-1$ erſten Gliedern der erſten figurirten Reihe II) in (145. §.) wegen (2. Zuſ.), und dieſe Summe giebt das nte oder allgemeine Glied D der zweyten figurirten Reihe III) in (145. §.) wegen (2. Zuſ.), woraus man, wie folgt, auch das ſummatoriſche Glied $\int D$ derſelben Reihe findet.

$$D = \frac{1}{6}(dn^3 - 6dn^2 + 11dn - 6d + 3n^2 - 9n + 6),$$

und (142. §.).

$$\int D = \frac{1}{6}(d\int n^3 - 6d\int n^2 + 11d\int n - 6d\int n^0 + 3\int n^2 - 9\int n + 6\int n^0),$$

oder (141. §. 1. Zuſ.)

$$\int D = \frac{1}{24}(dn^4 - 6dn^3 + 11dn^2 - 6dn + 4n^3 - 12n^2 + 8n).$$

6. Zuſatz.

Man kann die ſummatoriſchen Glieder $\int B$, $\int D$ in (3. u. 5. Zuſ.) durch die damit verbundenen allgemeinen Glieder B, D ſo ausdrücken:

$$B = \frac{1}{2}(dn^2 - 3dn + \overset{2n}{\cancel{n^2}} + 2d - 2),$$

$$\int B = \frac{nB}{3} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$D = \frac{1}{6}(dn^3 - 6dn^2 + 11dn - 6d + 3n^2 - 9n + 6),$$

$$\int D = \frac{nD}{4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

Ich will das Gesetz, nach welchem sich das summatorische Glied jeder figurirten Reihe (145. §. n. 3.) aus ihrem allgemeinen Gliede bestimmen läßt, nicht weiter befolgen: Liebhaber dieser Zahlenrechnung mögen untersuchen, ob dasselbe für die (N+1)te Reihe gelten muß, wenn es für die Nte richtig ist; ich begnüge mich vielmehr, nur anzuzeigen, wie das summatorische Glied jeder figurirten Reihe (145. §. n. 3.) aus ihrem allgemeinen Gliede folgt. Es mag nämlich y das allgemeine nte Glied mit dem Index n einer Nten Reihe heißen, wovon der Index N ist, alles in der Bedeutung (145. §. n. 3.) genommen; so ist das summatorische Glied derselben Reihe

$$\int y = \frac{ny}{N+2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-N+1)(n-N)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(N-1)N(N+1)(N+2)}\cdot$$

Anmerkung.

Der Gebrauch davon würde in dem bestehen, daß man aus dem bekannten summatorischen Gliede $\int B$ der ersten figurirten Reihe (3. Zus.), welche alle mögliche Polygonalzahlen in (145. §.) enthält, nun die allgemeinen und summatorischen Glieder der darauf folgenden Reihen von Pyramidalzahlen nach der Ordnung finden könnte: denn wenn man n — 1 in $\int B$ statt n setzt; so giebt $\int B$ das allgemeine Glied D der Reihe III) in (145. §.), welche die Pyramidalzahlen der ersten Ordnung enthält, und aus diesem findet man nach dem Gesetze (6. Zus.) das summatorische Glied $\int D$ derselben Reihe: setzt man n — 1 statt n in $\int D$; so muß $\int D$ dafür das allgemeine Glied F der Reihe IV)

in

in (145. §.) geben, welche die Pyramidalzahlen der zweyten Ordnung enthält, und daraus findet man das summatorische Glied $\int F$ derselben Reihe nach dem Gesetze (6. Zus.) u. s. f.

7. Zusatz.

Man setze in (145. §.) $d = 0$; so verwandeln sich die dortigen unbestimmten Reihen in die nachstehenden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n − 1, n
I	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1, 1
II	0	1	2	3	4	5	6	7	8	A, B
III	0	0	1	3	6	10	15	21	28	C, D
IV	0	0	0	1	4	10	20	35	56	E, F
V	0	0	0	0	1	5	15	35	70	G, H
VI	0	0	0	0	0	1	6	21	56	I, K
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y, Z

Nennt man I) die erste, II) die zweyte, III) die dritte Reihe u. s. f.; so ist nun die erste Reihe eine Reihe von gleichen Gliedern, die zweyte Reihe enthält die natürlichen Zahlen, die dritte aber die Triangularzahlen (145. §. n. 1.), daher die vierte die dreyseitigen Pyramidalzahlen der ersten Ordnung, die fünfte dieselben der zweyten Ordnung u. s. f. (145. §. n. 2.): und dieses sind eigentlich die figurirten Zahlen, wie sie gewöhnlich genommen werden.

Nun

145. §. Erklärungen.

Allgemeine Darstellung figurirter Reihen.

	1	2	3	4	5 - - - -	n−1	n
I	1,	1+d,	1+2d,	1+3d,	1+4d - - -	1+(n−2)d,	1+(n−1)d
II	0,	1,	2+d,	3+3d,	4+6d - - - - -	A - - - - - - -	B
III	0,	0,	1,	3+d,	6+4d - - - - -	C - - - - - - -	D
IV	0,	0,	0,	1,	4+d - - - - -	E - - - - - - -	F
V	0,	0,	0,	0,	1 - - - - - - -	G - - - - - - -	H
VI	0,	0,	0,	0,	0, 1 - - - - - - - - - - -		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	0,	0,	0,	0,	0 - - - - -	Y - - - -	Z

1) Die erste horizontale Reihe, wo d entweder =0 oder eine ganze Zahl ist, heißt die Grund- oder Hauptreihe, und aus dieser entstehet die zweyte horizontale Reihe II), aus der zweyten die dritte III), aus der dritten die vierte IV) u. s. f. nach dem bestimmten Gesetze, daß jedes 1te Glied jeder horizontalen Reihe, die Summe von r — 1 ersten Gliedern der nächst vorhergehenden horizontalen Reihe ist: so ist z. B. das fünfte Glied 6+4d der dritten Reihe III) die Summe 0+1+2+d+3+3d von vier ersten Gliedern der zweyten Reihe II).

Die Zahlen, welche die zweyte Reihe II) enthalten soll, müssen durch den Werth von d in der ersten Reihe bestimmt werden; sie heißen überhaupt die Polygonalzahlen, insbesondere aber nennt man sie die Triangular- Tetragonal- Penta-

Pentagonal- Hexagonalzahlen u. ſ. f. nachdem d = 1, d = 2, d = 3, d = 4 iſt, u. ſ. f.: für dieſe Werthe von d erhält man nämlich aus der Reihe II).

Die Reihe der Triangularzahlen für d = 1

1, 3, 6, 10, 15, 21 - - - - -

Die Reihe der Tetragonalzahlen für d = 2

1, 4, 9, 16, 25, 36 - - - - -

Die Reihe der Pentagonalzahlen für d = 3

1, 5, 12, 22, 35, 51 - - - - -

Die Reihe der Hexagonalzahlen für d = 4

1, 6, 15, 28, 45, 66 - - - - -

u. ſ. f.

2) Aus der Reihe II) von Polygonalzahlen entſtehen die übrigen Reihen III) IV) V) VI) - - - N), und die Zahlen, welche ſie enthalten, heißen die Pyramidalzahlen von der erſten, zweyten, dritten, vierten Ordnung u. ſ. f.: die Pyramidalzahlen der erſten Ordnung enthält die Reihe III), welche unmittelbar aus der Reihe II) der Polygonalzahlen entſtehet, und darauf folgen die Reihen IV) V) VI) - - - der Pyramidalzahlen von der zweyten, dritten, vierten Ordnung u. ſ. f. In Rückſicht auf die Reihe II) von Polygonalzahlen, aus welcher die Reihen III) IV) V) - - - N) von Pyramidalzahlen entſtehen, pflegt man dieſe dreyſeitige, vierſeitige, fünfſeitige Pyramidalzahlen u. ſ. f. zu nennen, nachdem ſie aus der Reihe II) von Triangular- Tetragonal- Pentagonalzahlen u. ſ. f. entſtanden ſind.

3) Man kann alle diese Zahlen figurirte Zahlen, und die Reihen, welche sie enthalten, figurirte Reihen nennen: und weil alle Reihen von Pyramidalzahlen aus der Reihe II) der Polygonalzahlen entstehen; so wird man in der Folge die Reihe II) der Polygonalzahlen die erste figurirte Reihe nennen, worauf die übrigen folgen sollen, nämlich die zweyte III) mit den Pyramidalzahlen von der ersten Ordnung, die dritte IV) mit den Pyramidalzahlen von der zweyten Ordnung u. s. f.: die Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . , welche durch ihre Einheiten ausdrücken, von wievielten figurirten Reihen die Rede ist, heißen Indices derselben Reihen, nämlich 1 ist der Index der ersten, 2 der zweyten . . . N der Nten figurirten Reihe.

1. Zusatz.

Weil die erste figurirte Reihe die Polygonalzahlen, die zweyte die Pyramidalzahlen der ersten Ordnung, die dritte die Pyramidalzahlen der zweyten Ordnung u. s. f. enthält; so ist der Exponent der Ordnung, zu welcher eine Reihe von Pyramidalzahlen gehört, allemahl um Eins kleiner, als der Index der Reihe: denn die Nte figurirte Reihe mit dem Index N (145. §. n. 3.) enthält die Pyramidalzahlen der (N — 1)ten Ordnung.

2. Zusatz.

Jede figurirte Reihe (145. §. n. 3.) hat so viel erste Glieder = 0, als Einheiten der Index derselben: und weil jeder Reihe ntes Glied die Summe von n — 1 ersten

Gliedern

Gliedern der nächst vorhergehenden Reihe ist (daſ. n. 1.), und dieſe Summe aus dem ſummatoriſchen Gliede der nächſt vorhergehenden Reihe erhalten wird, wenn man in ihm n — 1 ſtatt n ſetzt (130. §.); ſo wird dieſes auch das allgemeine Glied jener Reihe geben (129. §.).

3. Zuſatz.

Die Reihe I) in (145. §.) iſt eine arithmetiſche Progreſſion, deren erſtes Glied = 1, und die beſtändige Differenz der Glieder = d iſt (143. §.): aus der XVIIten Formul (144. §.) findet man alſo die Summe von n — 1 erſten Gliedern derſelben, wenn man a = 1, $\omega = 1 + (n-2)d$, und n — 1 ſtatt n ſetzt, und weil dieſe Summe das allgemeine oder nte Glied B der Reihe II) von Polygonalzahlen (145. §.) ſeyn muß; ſo hat man das allgemeine B und daher auch das ſummatoriſche Glied $\int B$ jeder Reihe von Polygonalzahlen.

$$B = \frac{1}{2}(2+(n-2)d)(n-1) = \frac{1}{2}(dn^2 - 3dn + 2n + 2d - 2).$$

und (142. §.)

$$\int B = \frac{1}{2}(d\int n^2 - 3d\int n + 2\int n + 2d\int n^0 - 2\int n^0)$$

oder (141. §. 1. Zuſ.)

$$\int B = \frac{1}{6}(dn^3 - 3dn^2 + 2dn + 3n^2 - 3n).$$

Nach dieſer Formul kann man demnach jede Reihe von Polygonalzahlen ſummiren, indem d = 1, d = 2, d = 3 u. ſ. f. ſeyn muß, nachdem die Formul für die Triangular- Tetragonal- Pentagonalzahlen u. ſ. f. gielt (145. §. n. 1.).

4. Zu-

4. Zuſatz.

In (3. Zuſ.) iſt die Reihe II) der Polygonalzahlen als eine figurirte Reihe betrachtet worden, welche die o zum erſten Gliede hat (145. §.): will man ſie als eine von der Einheit anfangende arithmetiſche Reihe betrachten; ſo darf man nur das eigentlich zweyte Glied für das erſte, folglich das $(n+1)$te für das nte nehmen, folglich $n+1$ ſtatt n in den Formuln (3. Zuſ.) ſetzen, um das allgemeine und ſummatoriſche Glied einer ſolchen Reihe zu erhalten: es wird nämlich ſeyn:

$$B = \frac{1}{2}(dn^2 - dn + 2n).$$

$$\int B = \frac{1}{6}(dn^3 - dn + 3n^2 + 3n).$$

Z. B. Sey die Reihe 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120 der Hexagonalzahlen (145. §. n. 1.); ſo muß man für ſie $d=4$ ſetzen: das allgemeine und ſummatoriſche Glied derſelben iſt alſo:

$$B = \frac{1}{2}(4n^2 - 4n + 2n) = 2n^2 - n.$$

$$\int B = \frac{1}{6}(4n^3 - 4n + 3n^2 + 3n) = \frac{1}{6}(4n^3 + 3n^2 - n).$$

Will man die Summe von ſechs erſten Gliedern haben; ſo muß man $n=6$ nehmen, und dann iſt die verlangte Summe

$$\int B = \frac{1}{6}(4.6^3 + 3.6^2 - 6 = \frac{1}{6}(4.216 + 3.36 - 6) = 161.$$

Und es iſt auch wirklich $1+6+15+28+45+66 = 161$.

5. Zu-

5. Zuſatz.

Wenn man $n-1$ ſtatt n in $\int B$ (3. Zuſ.) ſetzt; ſo erhält man die Summe von $n-1$ erſten Gliedern der erſten figurirten Reihe II) in (145. §.) wegen (2. Zuſ.), und dieſe Summe giebt das nte oder allgemeine Glied D der zweyten figurirten Reihe III) in (145. §.) wegen (2. Zuſ.), woraus man, wie folgt, auch das ſummatoriſche Glied $\int D$ derſelben Reihe findet.

$$D = \frac{1}{6}(dn^3 - 6dn^2 + 11dn - 6d + 3n^2 - 9n + 6),$$

und (142. §.).

$$\int D = \frac{1}{6}(d\int n^3 - 6d\int n^2 + 11d\int n - 6d\int n^0 + 3\int n^2 - 9\int n + 6\int n^0),$$

oder (141. §. 1. Zuſ.)

$$\int D = \frac{1}{24}(dn^4 - 6dn^3 + 11dn^2 - 6dn + 4n^3 - 12n^2 + 8n).$$

6. Zuſatz.

Man kann die ſummatoriſchen Glieder $\int B$, $\int D$ in (3. u. 5. Zuſ.) durch die damit verbundenen allgemeinen Glieder B, D ſo ausdrücken:

$$B = \frac{1}{2}(dn^2 - 3dn + 2n + 2d - 2),$$

$$\int B = \frac{nB}{3} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$D = \frac{1}{6}(dn^3 - 6dn^2 + 11dn - 6d + 3n^3 - 9n + 6),$$

$$\int D = \frac{nD}{4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

Ich will das Gesetz, nach welchem sich das summatorische Glied jeder figurirten Reihe (145. §. n. 3.) aus ihrem allgemeinen Gliede bestimmen läßt, nicht weiter befolgen: Liebhaber dieser Zahlenrechnung mögen untersuchen, ob dasselbe für die (N+1)te Reihe gelten muß, wenn es für die Nte richtig ist; ich begnüge mich vielmehr, nur anzuzeigen, wie das summatorische Glied jeder figurirten Reihe (145. §. n. 3.) aus ihrem allgemeinen Gliede folgt. Es mag nämlich y das allgemeine nte Glied mit dem Index n einer Nten Reihe heißen, wovon der Index N ist, alles in der Bedeutung (145. §. n. 3.) genommen; so ist das summatorische Glied derselben Reihe

$$\int y = \frac{ny}{N+2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-N+1)(n-N)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(N-1)N(N+1)(N+2)}.$$

Anmerkung.

Der Gebrauch davon würde in dem bestehen, daß man aus dem bekannten summatorischen Gliede $\int B$ der ersten figurirten Reihe (3. Zus.), welche alle mögliche Polygonalzahlen in (145. §.) enthält, nun die allgemeinen und summatorischen Glieder der darauf folgenden Reihen von Pyramidalzahlen nach der Ordnung finden könnte: denn wenn man n — 1 in $\int B$ statt n setzt; so giebt $\int B$ das allgemeine Glied D der Reihe III) in (145. §.), welche die Pyramidalzahlen der ersten Ordnung enthält, und aus diesem findet man nach dem Gesetze (6. Zus.) das summatorische Glied $\int D$ derselben Reihe: setzt man n — 1 statt n in $\int D$; so muß $\int D$ dafür das allgemeine Glied F der Reihe IV)

in (145. §.) geben, welche die Pyramidalzahlen der zweyten Ordnung enthält, und daraus findet man das summatorische Glied $\int F$ derselben Reihe nach dem Gesetze (6. Zus.) u. s. f.

7. Zusatz.

Man setze in (145. §.) $d = 0$; so verwandeln sich die dortigen unbestimmten Reihen in die nachstehenden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	n − 1, n
I	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.....	1, 1
II	0	1	2	3	4	5	6	7	8	.....	A, B
III	0	0	1	3	6	10	15	21	28	.....	C, D
IV	0	0	0	1	4	10	20	35	56	.....	E, F
V	0	0	0	0	1	5	15	35	70	.....	G, H
VI	0	0	0	0	0	1	6	21	56	.....	I, K
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.....	Y, Z

Nennt man I) die erste, II) die zweyte, III) die dritte Reihe u. s. f.; so ist nun die erste Reihe eine Reihe von gleichen Gliedern, die zweyte Reihe enthält die natürlichen Zahlen, die dritte aber die Triangularzahlen (145. §. n. 1.), daher die vierte die dreyseitigen Pyramidalzahlen der ersten Ordnung, die fünfte dieselben der zweyten Ordnung u. s. f. (145. §. n. 2.): und dieses sind eigentlich die figurirten Zahlen, wie sie gewöhnlich genommen werden.

Nun

Nun iſt das nte oder allgemeine Glied der erſten Reihe $= 1 = n^0$, folglich das ſummatoriſche $= \int n^0 = n = \frac{1 \cdot n}{1}$ (141. §. 1. Zuſ.): das allgemeine und ſummatoriſche Glied der zweyten Reihe II) folgt aus (144. §. XIII. XVIII. Form.), wenn man das dortige $a = 0$, und $d = 1$ ſetzt: ferner folgt das allgemeine und ſummatoriſche Glied der dritten Reihe III) aus (3. Zuſ.) für $d = 1$, endlich folgt das allgemeine und ſummatoriſche Glied der vierten Reihe IV) aus (4. Zuſ.), wenn man $d = 1$ ſetzt: will man demnach mit α; α^2; α^3; α^4; - - - - α^N; α^{N+1} die allgemeinen Glieder der erſten I), zweyten II), dritten III), vierten IV) --- Nten Reihe N) bezeichnen; ſo ſind dieſelben und die damit verbundenen ſummatoriſchen Glieder, wie folgt, beſchaffen.

$$\alpha = n^0 = 1.$$

$$\int \alpha = n = \frac{n\alpha}{1}.$$

$$\alpha^2 = n - 1.$$

$$\int \alpha^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n\alpha^2}{2}.$$

$$\alpha^3 = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}.$$

$$\int \alpha^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n\alpha^3}{3}.$$

$$\alpha^4 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

$$\int \alpha^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n\alpha^4}{4}.$$

Und

9. Und vermöge des hier herrschenden Gesetzes müßte das allgemeine Glied α^N und das summatorische $\int\alpha^N$ der Nten Reihe so beschaffen seyn:

$$\alpha^N = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-N+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(N-2)(N-1)}.$$

$$\int\alpha^N = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-N+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(N-1)N} = \frac{n\alpha^N}{N}.$$

8. Zusatz.

Die Richtigkeit der Ausdrückungen für α^N und $\int\alpha^N$ in (7. Zus.) folgt aus (54. §.), weil das bey ihnen zum Grunde liegende Gesetz für die vier ersten Reihen wirklich gielt, und man beweisen kann, daß, wenn dasselbe für eine gewisse Nte Reihe wahr ist, es auch für die (N+1)te wahr seyn muß. Denn es sey in (7. Zus.)

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	⋯	n−3	n−2	n−1	n
Die Nte	1	a	b	c	d	⋯	m	p	q	r
(N+1)te Reihe	0	1	A	B	C	⋯	M	P	Q	R

Es ist nämlich aus der Natur der Reihen (7. Zus.) bekannt, daß jede Reihe so viele Nullen, um eine weniger, zu ihren ersten Gliedern hat, wieviel Einheiten die Zahl hat, welche ausdrückt, die wievielte dieselbe Reihe ist: also ist bey der Nten Reihe 1 eigentlich das Nte Glied, und darauf folgen die übrigen, und so sind die Indices der Glieder mit N, N+1, N+2 ⋯ n−3, n−2, n−1, n richtig bezeichnet.

I) Da nun jedes nte Glied der (N+1)ten Reihe die Summe von n — 1 erſten Gliedern der Nten Reihe ſeyn muß (145. §. n. 1.), und vermöge des Geſetzes (7. Zuſ.) die Summe von n Gliedern der Nten Reihe aus dem nten Gliede ſelbſt erhalten wird, wenn man es mit ſeinem Index multiplicirt, und durch den Index N derſelben Reihe dividirt; ſo hat man die Glieder der (N+1)ten Reihe.

$$R = \frac{q(n-1)}{N}; \quad Q = \frac{p(n-2)}{N}$$

$$P = \frac{m(n-3)}{N}; \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C = \frac{c(N+3)}{N}; \quad B = \frac{b(N+2)}{N}$$

$$A = \frac{a(N+1)}{N}; \quad 1 = \frac{N.1}{N}.$$

Demnach iſt die Summe von n Gliedern der (N+1)ten Reihe, oder das ſummatoriſche Glied $\int R$:

$$\int R = \frac{q(n-1)+p(n-2)+m(n-3)+\ldots\ldots\ldots}{N}$$

$$\frac{\ldots\ldots+c(N+3)+b(N+2)+a(N+1)+N}{N}$$

$$= \frac{q(n-1)+p(n-2)+m(n-3)+\ldots\ldots\ldots}{N}$$

$$\frac{\ldots+c(n+N-n+3)+b(n+N-n+2)+a(n+N-n+1)+n+N-n}{N}$$

$$N\int R = n(q+p+m+\ldots+c+b+a+1)$$

$$-(q+2p+3m+\ldots+(n-N-3)c+(n-N-2)b$$

$$+(n-N-1)a+(n-N)1).$$

II) Der

II) Der mit n multiplicirte zusammengesetzte Factor ist offenbar die Summe von n — 1 ersten Gliedern der Nten Reihe, folglich ist er das nte Glied R der (N+1)ten Reihe: statt des ersten Theils in N∫R kann man demnach nR nehmen.

Man sieht aber auch leicht ein, daß der zweyte Theil von N∫R nichts anders als die Summe 1+A+B+C+... +M+P+Q+R=∫R ist, nämlich von n ersten Gliedern der (N+1)ten Reihe: bekanntlich ist nämlich 1+a=A; 1+a+b=B; 1+a+b+c=C..... 1+a+b+c... +p=Q; 1+a+b ... +p+q=R, und hieraus erhellet, daß jedes Glied der Nten Reihe von 1 an bis q so oft in der Summe 1+A+B+...+Q+R=∫R stecken muß, als Glieder von ihm an bis q vorhanden sind, daher muß das erste Glied 1 in ∫R gewiß (n — N)mahl, das zweyte a gewiß (n — N — 1)mahl, das dritte b gewiß (n—N—2)mahl .... das Glied m nur 3mahl, p 2mahl, q 1mahl stecken. Also ist in I)

$$N\int R = nR - \int R; \text{ daher } (N+1)\int R = nR,$$

$$\text{folglich } \int R = \frac{nR}{N+1}.$$

Das heißt: das summatorische Glied der (N+1)ten Reihe hängt von ihrem allgemeinen Gliede nach eben dem Gesetze ab, welches für das summatorische Glied der Nten Reihe gelten soll.

9. Zuſatz.

Die Formuln (7. 8. Zuſ.) ſetzen figurirte Reihen voraus, wovon jede allemahl ſoviel erſte Glieder gleich Null hat, als Einheiten in dem Index der Reihe ſtecken, um eine weniger: will man alſo die Reihen (7. Zuſ.) von 1 anfangen laſſen, ſo, daß 1 bey jeder Reihe das erſte Glied wird; ſo muß man in den allgemeinen Formuln α^N; $\int\alpha^N$ überall $n+N-1$ ſtatt n nehmen, um das allgemeine und ſummatoriſche Glied jeder, auf dieſe Art betrachteten Nten Reihe (7. Zuſ.) zu erhalten, nämlich:

$$\alpha^N = \frac{(n+N-2)(n+N-3)(n+N-4)\cdots(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(N-2)(N-1)}.$$

$$\int\alpha^N = \frac{(n+N-1)(n+N-2)(n+N-3)\cdots(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(N-1)N}.$$

146. §. Aufgabe.

Das allgemeine Glied Z derjenigen Reihe zu beſtimmen, wovon das ſummatoriſche Glied $\int Z$ folgende Function vom Index n ſeyn ſoll:

$$\int Z = \frac{Ln+Mn^2+Nn^3+On^4+\cdots+Qn^{m-1}+Rn^m}{(A+B(n-m+1))(A+B(n-m+2))\cdots(A+B(n-1))(A+Bn)}.$$

Auflöſung. 1) Man ſetze im gegebenen ſummatoriſchen Gliede $n-1$ ſtatt n, und ziehe den Werth, welchen es dafür erlanget, von demſelben ab; ſo wird der Reſt das verlangte allgemeine Glied Z ſeyn (130. §. 3. Zuſ.), nämlich:

Z =

$$Z=\left(\frac{Ln+Mn^2+Nn^3+On^4+\dots+Qn^{m-1}+Rn^m}{(A+B(n-m+1))(A+B(n-m+2))\dots(A+B(n-1))(A+Bn)}\right.$$
$$\left\{-\frac{L(n-1)+M(n-1)^2+N(n-1)^3+O(n-1)^4+\dots}{(A+B(n-m))(A+B(n-m+1))\dots}\right.$$
$$\left.\left.\dots+\frac{Q(n-1)^{m-1}+R(n-1)^m}{\dots(A+B(n-2))(A+B(n-1))}\right.\right).$$

2) Will man nun die Abziehung wirklich veranstalten; so muß man eher die beyden Brüche auf einerley Benennung bringen: zu dem Ende multiplicire man den ersten Bruch in (n. 1.) mit $\frac{A+B(n-m)}{A+B(n-m)}$ und den zweyten mit $\frac{A+Bn}{A+Bn}$, und dann ist

$$Z=\left(\frac{(Ln+Mn^2+Nn^3+On^4+\dots+Qn^{m-1}}{(A+B(n-m))(A+B(n-m+1))\dots}\right.$$
$$\left(\frac{+Rn^m)(A+B(n-m))}{(A+B(n-1))(A+Bn)}\right.$$
$$\left(-\frac{L(n-1)+M(n-1)^2+N(n-1)^3+O(n-1)^4+\dots}{(A+B(n-m))(A+B(n-m+1))\dots}\right.$$
$$\left.\left(\frac{+Q(n-1)^{m-1}+R(n-1)^m(A+Bn)}{(A+B(n-1))(A+Bn)}\right.\right).$$

3) Wenn man ferner die Erhebung von $n-1$ auf die Potenzen beym zweyten Bruche wirklich vornimmt, seinen Zähler hierauf vom Zähler des ersten Bruches abziehet; so wird man nach gehöriger Reduction finden:

$$Z = \frac{\left\{\begin{array}{l} L \\ -M+2Mn \\ +N-3Nn+3Nn^2 \\ -O+4On-6On^2+4On^3 \\ - - - - - - - - - - \\ - - - - - - - - - - \\ \pm\frac{m(m-1)\cdots(m-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}Rn^{m-m} \\ \mp\frac{m(m-1)\cdots(m-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)}Rn^{m-m+1}\pm\cdots \\ \cdots\cdots\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}Rn^{m-2}+mRn^{m-1} \end{array}\right. A}{\left\{\begin{array}{l} Ln \\ -Mn+2Mn^2 \\ +Nn-3Nn^2+3Nn^3 \\ -On+4On^2-6On^3+4On^4 \\ - - - - - - - - - - \\ - - - - - - - - - - \\ \pm\frac{m(m-1)\cdots(m-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}Rn^{m-m+1} \\ \mp\frac{m(m-1)\cdots(m-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m-1}Rn^{m-m+2}\pm\cdots \\ \cdots\cdots\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}Rn^{m-1} \end{array}\right. B}$$

$$\frac{-B(mLn+mMn^2+mNn^3+mOn^4+\cdots+mQn^{m-1})}{(A+B(n-m))(A+B(n-m+1))\cdots(A+B(n-1))(A+Bn)}$$

Alles nämlich, was in A und B multiplicirt ist, gehört zum Zähler des allgemeinen Gliedes Z, und die unterste Reihe macht seinen Nenner aus.

1. Zusatz.

Wenn man im allgemeinen Gliede Z erstlich $n=1$, sodann $n=2$, $n=3$, $n=4$ u. s. f. nimmt; so erhält man die

die Reihe, zu welcher daſſelbe gehört (129. §.): man wird finden, daß jedes Glied dieſer Reihe ein Bruch iſt, und alle Brüche von der Beſchaffenheit ſind, daß ihre Zähler eine arithmetiſche Reihe von unbeſtimmtem Range bilden, ſo, daß der Zähler des allgemeinen Gliedes Z mit dem allgemeinen Gliede (142. §.) ähnlich iſt: die Nenner aber der Glieder der Reihe, welche aus Z folgt, beſtehen aus Factoren, welche ſo beſchaffen ſind, daß die erſten, zweyten, dritten u. ſ. f. Factoren aller Glieder, jede für ſich, eine arithmetiſche Reihe vom erſten Range ausmachen, der erſte Factor jedes Gliedes mit dem zweyten Factor des nächſt vorhergehenden Gliedes einerley iſt, und die beſtändigen Differenzen der arithmetiſchen Reihen, welche gleichnahmichte Factoren ausmachen, alle einander gleich ſind.

2. Zuſatz.

Nach dieſen Formuln kann man alſo alle Reihen ſummiren, welche aus gebrochenen Gliedern von der Beſchaffenheit beſtehen, daß ihre Zähler zu einer arithmetiſchen Reihe von was immer für einem Range gehören, die Nenner aber aus Factoren beſtehen, welche zu eben ſo vielen arithmetiſchen Reihen von dem erſten Range und einer gleichen Differenz gehören, und überdem ſo beſchaffen ſind, daß jedes Gliedes Nenner mit dem zweyten Factor des Nenners des nächſt vorhergehenden Gliedes anfängt.

3. Zuſatz.

Die unbeſtimmte Zahl B iſt beym Nenner des allgemeinen Gliedes Z mit den Factoren n; $n-1$; $n-2$;

$z-3 \ldots n-m$ multiplicirt: der Nenner des allgemeinen Gliedes Z muß also aus $m+1$ Factoren bestehen, und wenn man diese unter einander wirklich multiplicirte; so müßte man im Nenner die $(m+1)$te Potenz von n zur höchsten Potenz von n erhalten. Da also im Zähler des allgemeinen Gliedes Z die $(m-1)$te Potenz die höchste Potenz von n ist; so ist klar, daß die Potenz von n im Nenner des allgemeinen Gliedes Z um zween Grade höher ist, als im Zähler; da doch beym gegebenen summatorischen Gliede $\int Z$ der Nenner aus so vielen Factoren bestehet, als der Exponent der höchsten Potenz von n im Zähler Einheiten hat.

4. Zusatz.

Wenn man demnach das allgemeine Glied, wie auch das summatorische einer vorgelegten Reihe (2. Zus.) bestimmen will; so muß man die Anzahl der Factoren, aus welchen die Nenner der Glieder derselben Reihe zusammengesetzt sind, $=m+1$ setzen (3. Zus.), und aus dieser Gleichung den Werth von m bestimmen, welcher sogleich zeigen wird, welche Glieder man bey Z und $\int Z$ behalten, und welche man weglassen muß, da hierauf alles noch darauf ankömmt, daß man die Glieder der Reihen, welche sich aus den Factoren des Nenners von Z nach (129. §.) ergeben, mit den Gliedern der Reihen, welche die Factoren der gegebenen Nenner bilden, gehörig vergleiche, und dasselbe mit dem Zähler von Z, und den Zählern der zur gegebenen Reihe gehörigen Glieder vornehme, um die Werthe von

A, B, L, M, N ... zu bestimmen, für welche sich Z und ∫Z in das allgemeine und summatorische Glied der vorgelegten Reihe verwandeln müssen.

Beyspiele.

1) Man soll das allgemeine und summatorische Glied der Reihe $\frac{6}{2.7}, \frac{6}{7.12}, \frac{6}{12.17}, \frac{6}{17.22}$ u. s. f., oder überhaupt der Reihe $\frac{a}{b(b+c)}, \frac{a}{(b+c)(b+2c)}, \frac{a}{(b+2c)(b+3c)}, \frac{a}{(b+3c)(b+4c)}$, u. s. f. bestimmen.

1) Jedes Gliedes Nenner bey der ersten Reihe, (welches auch für die zweyte Reihe gielt,) besteht aus zweenen Factoren: also ist nach (4. Zus.) $m+1=2$, daher $m=2-1=1$.

Bey dem Zähler des oben angeführten summatorischen Gliedes ∫Z kann man demnach nur die erste Potenz von n, daher nur das Glied Ln behalten, der Nenner aber behält nur den ersten Factor; und nun muß auch beym Zähler des allgemeinen Gliedes Z nur der Coefficient L behalten werden, der Nenner aber erhält zween erste Factoren (4. Zus.): also muß seyn

$$\int Z = \frac{Ln}{A+Bn}; \quad Z = \frac{AL}{(A+B(n-1))(A+Bn)}.$$

2) Nun giebt der Nenner des allgemeinen Gliedes Z in (n-1.) nach (129. §.) diese Reihe:

$A(A+B); (A+B)(A+2B); (A+2B)(A+3B)$ .....

Wenn man demnach die Factoren des erſten Gliedes mit den Factoren des erſten Nenners 2.7 der erſten gegebenen Reihe vergleichet; ſo hat man

$$A = 2;\ A + B = 7;\ \text{daher } B = 5.$$

Aus dem Zähler von Z in (n. 1.) erhält man alſo $AL = 2L = 6$, weil 6 der beſtändige Zähler bey der erſten gegebenen Reihe iſt; folglich muß ſeyn $L = \frac{6}{2} = 3$.

Setzt man endlich die gefundenen Werthe von A, B, L in Z, und $\int Z$; ſo findet man aus (n. 1.) das allgemeine und ſummatoriſche Glied der erſten gegebenen Reihe, wie folgt:

$$Z = \frac{6}{(2+5(n-1))(2+5n)};\ \int Z = \frac{3n}{2+5n}.$$

3) Aus dem Verfahren (n. 2.) erhellet, auf welche Art man Z und $\int Z$ in (n. 1.) in das allgemeine und ſummatoriſche Glied der zweyten gegebenen Reihe verwandeln kann; hier iſt die Rechnung:

$$A = b;\ A + B = b + c;\ \text{alſo } B = c.$$

Daher $AL = bL = a$, folglich $L = \frac{a}{b}$,

und nun iſt aus (n. 1.),

$$Z = \frac{a}{(b+c(n-1))(b+cn)};\ \int Z = \frac{an}{b^2+bcn}.$$

II) Man ſoll das allgemeine und ſummatoriſche Glied der Reihe $\frac{4}{2.3.4}, \frac{7}{3.4.5}, \frac{10}{4.5.6}, \frac{13}{5.6.7}$ u. ſ. f. beſtimmen.

1) Jeder

1) Jeder Nenner dieſer Reihe beſtehet aus drey Factoren, folglich iſt nach (4. Zuſ.) $m+1=3$, daher $m=2$, und dieſes iſt die höchſte Potenz von n beym ſummatoriſchen Gliede $\int Z$, für welche demnach ſein Nenner zween Factoren behält, daher iſt

$$\int Z = \frac{Ln+Mn^2}{(A+B(n-1))(A+Bn)}.$$

2) Und nun muß das allgemeine Glied Z wegen (3. Zuſ.) drey Factoren behalten, im Zähler aber nur die Coefficienten L, M haben; folglich iſt daſſelbe Glied:

$$Z = \frac{AL+2AMn-AM-BLn-BMn}{(A+B(n-2))(A+B(n-1))(A+Bn)}.$$

3) Aus dem Nenner des allgemeinen Gliedes (n. 2.) entſtehet nach (129. §.) folgende Reihe:

$(A-B)A(A+B); A(A+B)(A+2B); (A+B)(A+2B)(A+3B); \ldots$

Vergleichet man die Factoren des erſten Gliedes mit den Factoren des erſten Nenners der gegebenen Reihe; ſo findet man:

$$A-B=2;\ A=3;\ \text{daher } B=1.$$

Und für dieſe Werthe von A und B verwandeln ſich die Formuln (n. 1. 2.) in

$$\int Z = \frac{Ln+Mn^2}{(n+2)(3+n)};\quad Z = \frac{3(L-M)+(5M-L)n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

4) Es iſt ferner der Zähler von Z in (n. 3.) das allgemeine Glied einer arithmetiſchen Reihe vom erſten Range

(143.

(143. §. 1. Zuſ.), und eine ſolche Reihe machen auch die Zähler 4, 7, 10, 13 ------ bey der gegebenen Reihe aus, wovon das allgemeine Glied daher $1+3n$ nach (143. §. 3. Zuſ.) iſt: vergleichet man demnach dieſes mit dem Zähler von Z in (n. 3.); ſo erhält man:

$$3L-3M=1;\ 5M-L=3: \text{ alſo } M=\frac{5}{2.3};\ L=\frac{7}{2.3}.$$

Setzt man endlich dieſe Werthe ſtatt M und L bey $\int Z$ und Z in (n. 3.); ſo findet man das allgemeine und ſummatoriſche Glied der gegebenen Reihe, wie folgt.

$$Z=\frac{1+3n}{(n+1)(n+2)(n+3)};\quad \int Z=\frac{7n+5n^2}{2.3(2+n)(3+n)}.$$

III). Man ſoll das allgemeine und ſummatoriſche Glied folgender Reihe beſtimmen.

$$\frac{1}{4.7.10.13}+\frac{7}{7.10.13.16}+\frac{17}{10.13.16.19}+\frac{31}{13.16.19.22}+\text{---}$$

1) Wegen der vier Factoren, aus welchen jeder Nenner beſtehet, iſt nach (4. Zuſ.) $m+1=4$, daher $m=3$ die höchſte Potenz von n beym ſummatoriſchen Glied $\int Z$, der zugleich wegen (3. Zuſ.) drey Factoren im Nenner behalten muß: läßt man alſo bey ihm die höheren Potenzen von n weg; ſo iſt er:

$$\int Z=\frac{Ln+Mn^2+Nn^3}{(A+B(n-2))(A+B(n-1))(A+Bn)}.$$

2) Für das ſummatoriſche Glied $\int Z$ muß das allgemeine Glied Z vier Factoren im Nenner (3. Zuſ.) und

nur

nur die Coefficienten L, M, N im Zähler haben: dasselbe ist also:

$$Z = \frac{\begin{array}{r} AL + 2AMn + 3ANn^2 \\ -AM - 3ANn - BMn^2 \\ +AN - 2BLn - 3BNn^2 \\ -BMn \\ +BNn \end{array}}{(A+B(n-3))(A+B(n-2))(A+B(n-1))(A+Bn)}.$$

3) Wenn man beym Nenner in (n. 2.) $n = 1$ machet; so giebt er das erste Glied $(A-2B)(A-B)A(A+B)$ derjenigen Reihe, welche man aus ihm nach (129. §.) bestimmen könnte: wenn man nun dasselbe Glied mit dem Nenner 4.7.10.13 des ersten Gliedes bey der gegebenen Reihe vergleichet; so findet sich:

$A-2B=4$; $A-B=7$; $A=10$; also $B=3$.

Und für diese Werthe von A und B verwandeln sich die Formuln (n. 1. 2.) in diese:

$$\int Z = \frac{Ln+Mn^2+Nn^3}{(4+3n)(7+3n)(10+3n)}.$$

$$Z = \frac{\begin{array}{r} 10L + 20M \\ -10M - 30N \\ +10N - 6L \\ -3M \\ +3N \end{array}\Big)n^3 + \begin{array}{r} +30N \\ -3M \\ -9N \end{array}\Big)n^2}{(1+3n)(4+3n)(7+3n)(10+3n)}.$$

4) Die Zähler 1, 7, 17, 31 ..... bey der gegebenen Reihe machen eine arithmetische Reihe vom zweyten Range aus (143. §.), folglich ist das allgemeine Glied davon $= -1+2n^2$ nach (143. §. 3. Zus.).

5) Es

5) Es iſt aber auch der Zähler von Z in (n. 3.) das allgemeine Glied einer arithmetiſchen Reihe vom zweyten Range (143. §. 1. Zuſ.): man vergleiche ihn alſo mit dem allgemeinen Gliede in (n. 4.); ſo wird ſeyn:

$$10L - 10M + 10N = -1 \qquad M = \frac{7}{5 \cdot 8}$$

$$20M - 30N - 6L - 3M + 3N = 0 \quad \text{alſo } N = \frac{101}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}$$

$$30N - 3M - 9N = 2, \qquad L = \frac{-19}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}$$

Und für dieſe Werthe findet man endlich aus (n. 3.) das allgemeine und ſummatoriſche Glied der gegebenen Reihe:

$$Z = \frac{-1 + 2n^2}{(1+3n)(4+3n)(7+3n)(10+3n)} \cdot$$

$$\int Z = \frac{\frac{-19}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} n + \frac{7}{5 \cdot 8} n^2 + \frac{101}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} n^3}{(4+3n)(7+3n)(10+3n)} \cdot$$

Anmerkung.

Wenn die Glieder einer vorgelegten Reihe nicht von der Beſchaffenheit (2. Zuſ.) ſind; ſo wird man vergebens ſuchen, dieſelbe nach der angeführten Formul $\int Z$ zu ſummiren: z. B. die Reihe $\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{9 \cdot 11}$ u. ſ. f. iſt zwar ſo beſchaffen, daß ſowohl die erſten 1, 5, 9 ... als die zweyten 3, 7, 11 ... Factoren der Nenner, jede für ſich, eine arithmetiſche Reihe von dem erſten Range und der gleichen Differenz $= 4$ bilden; doch aber der einzige Umſtand, daß die

die Nenner der folgenden Glieder nicht mit den zweyten Factoren der Nenner der nächst vorhergehenden Glieder anfangen, welches in (1. 2. Zuſ.) erfodert wurde, macht, daß dieſe Reihe ſich hier gar nicht ſummiren läßt.

Bisweilen kommen ſolche Reihen vor, derer Glieder die im (1. 2. Zuſ.) erklärten Eigenſchaften nicht haben, daraus kann aber noch nicht mit Gewißheit gefolgert werden, daß ſie der hier angeführten Summationsmethode nicht unterworfen ſind: es ſind nämlich ſolche Reihen oft einer Verwandlung fähig, durch welche ſie dieſelben Eigenſchaften vollkommen erlangen.

Z. B. Die Reihe $\frac{3}{1.7}, \frac{3}{7.6}, \frac{3}{6.17}, \frac{3}{17.11}$ ---- hat gar keine von den Eigenſchaften, welche bey den Nennern im (1. 2. Zuſ.) erfodert wurden: wenn man aber die Zähler aller Glieder mit 2 multiplicirt, und zugleich den zweyten Factor des zweyten, vierten, ſechſten u. ſ. f. Gliedes, und den erſten Factor des erſten, dritten, fünften Gliedes u. ſ. f. mit 2 vervielfältiget; ſo werden die Glieder der ganzen Reihe den vorigen Werth behalten, die Reihe aber wird in $\frac{6}{2.7}, \frac{6}{7.12}, \frac{6}{12.17}, \frac{6}{17.22}$ ---- verwandelt werden, und nun hat ſie die zu ihrer Summirung erforderlichen Eigenſchaften (1. 2. Zuſ.): es iſt die Reihe, welche oben beym erſten Beyſpiele ſummirt worden iſt.

Bey der Reihe $\frac{1}{1.3}, \frac{1}{2.4}, \frac{1}{3.5}, \frac{1}{4.6}$ ---- fällt die Eigenſchaft weg, vermöge deren der Nenner jedes nten Gliedes

Gliedes mit dem zweyten Factor des Nenners des nächst vorhergehenden $(n-1)$ten Gliedes anfangen muß; der Umstand aber, daß bey dieser Reihe bey dem $(n+1)$ten Gliede, das in Ansehung des $(n-1)$ten Gliedes geschieht, was eigentlich beym nten geschehen sollte, machet, daß man dieselbe in eine andere leicht verwandeln kann, welche die hier fehlende Eigenschaft hat; wenn man nämlich den Zähler und Nenner jedes Gliedes mit dem ersten Factor des nächst folgenden Gliedes multiplicirt; denn dafür verwandelt sich die hier angeführte Reihe in $\frac{2}{1.2.3}, \frac{3}{2.3.4}, \frac{4}{3.4.5}, \frac{5}{4.5.6}$ ----, und nun findet sich ihr summatorisches Glied

$$= \frac{5n + 3n^2}{4(1+n)(2+n)}.$$

Bisweilen müssen die Nenner erst in ihre Factoren zerlegt werden (51. §.), wenn man sehen will, ob nicht die gegebene Reihe nach der angeführten Methode summirt werden kann; oft müssen auch neue Factoren eingeführt, und andere Mittel gebraucht werden, welche man durch Uebung am sichersten lernen kann.

Z. B. Die Reihe $1, \frac{7}{66}, \frac{1}{22}, \frac{3}{112}$ verwandelt sich erstlich in $\frac{6}{6}, \frac{7}{66}, \frac{8}{176}, \frac{9}{336}$, wo die Zähler die Eigenschaft (1. Zus.) haben; sodann verwandelt sie sich in $\frac{6}{1.2.3}, \frac{7}{2.3.11}, \frac{8}{2.2.4.11}, \frac{9}{2.2.4.3.7}$ nach (51. §.), endlich in $\frac{6}{1.6}, \frac{7}{6.11}, \frac{8}{11.16}, \frac{9}{16.21}$ ....

147. §.

147. §. Aufgabe.

Das summatorische Glied einer Reihe soll die folgende Function vom Index n ihrer Glieder seyn; man soll das allgemeine Glied derselben Reihe bestimmen.

$$\int Z = L - \frac{L}{(A+B+C\cdots)(A+2B+4C\cdots)\cdots(A+nB+n^2C\cdots)}$$

Auflösung. Das verlangte allgemeine Glied ist nach (130. §. 3. Zus.)

$$Z = \left(\frac{-L}{(A+B+C\cdots)(A+2B+4C)\cdots(A+nB+n^2C+\cdots)}\right) \left(\frac{+L}{(A+B+C\cdots)(A+2B+4C\cdots)\cdots(A+(n-1)B+(n-1)^2C+\cdots)}\right)$$

Es ist ferner einleuchtend, daß, wenn man den Zähler und Nenner des zweyten Bruches mit $A+nB+n^2C+n^3D\cdots$ multiplicirt, dieser Bruch eben den Nenner erhalten muß, welchen der erste Bruch hat, wovon der Abzug geschehen soll: daher ist

$$Z = \left(\frac{-L}{+AL+BLn+CLn^2+DLn^3\cdots}{(A+B+C\cdots)(A+2B+4C\cdots)\cdots(A+B+n+Cn^2+\cdots)}\right)$$

1. Zusatz.

Der Zähler von Z ist das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe von unbestimmtem Range (143. §. 1. Zus.), der Nenner aber bestehet aus Factoren, welche Glieder einer Reihe von derselben Art sind: zu diesem summatorischen Gliede $\int Z$ und allgemeinen Z gehören also alle Reihen,

deren gebrochene Glieder von der Beschaffenheit sind, daß ihre Zähler eine arithmetische Reihe bilden, und die Factoren jedes Gliedes, eine von eben dem Range arithmetische Reihe ausmachen, so daß jedes Gliedes Nenner ausser den Factoren, welche der Nenner des nächst vorhergehenden Gliedes enthält, noch einen Factor als das nächst folgende Glied der arithmetischen Reihe der Factoren haben muß.

2. Zusatz.

Ist also eine Reihe von der Beschaffenheit (1. Zus.) gegeben; so suche man sowohl das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe, welche die Zähler der Glieder der gegebenen Reihe ausmachen, als auch das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe, welche die Factoren ihrer Nenner bilden, nach (143. §. 3. Zus.); hierauf vergleiche man dieses allgemeine Glied mit dem allgemeinen Factor $A+Bn+Cn^2+\cdots$ von Z, um die Werthe von A, B, C--- zu bestimmen; endlich vergleiche man auch jenes allgemeine Glied mit dem Zähler von Z, um auch den Werth von L zu finden: denn wenn man hierauf die Werthe von A, B, C--- L in $\int Z$ nimmt; so wird $\int Z$ das summatorische Glied der vorgelegten Reihe geben müssen.

Beyspiele.

1) Man soll das allgemeine und summatorische Glied der folgenden Reihe suchen.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2.3}, \frac{3}{2.3.4}, \frac{4}{2.3.4.5}, \frac{5}{2.3.4.5.6} \text{ u. s. f.}$$

1) Die

1) Die Zähler machen die arithmetische Reihe vom ersten Range 1, 2, 3, 4, 5 - - - -, und die Factoren der Nenner die arithmetische Reihe von demselben Range 2, 3, 4, 5, 6, 7 - - - aus; das allgemeine Glied jener Reihe ist $= n$, und das allgemeine Glied dieser Reihe ist $= n+1$, welches zwar nach (143. §. 3. Zus.) gefunden wird, aber zugleich unmittelbar aus (129. §.) erhellet: das allgemeine Glied der vorgelegten Reihe ist daher

$$= \frac{n}{2.3.4 - - - - - (n+1)}.$$

2) Vergleichet man nun das allgemeine Glied $n+1$ der Reihe, welche die Factoren der Nenner ausmachen, mit dem allgemeinen Factor $A+nB+n^2C+n^3D$ - - - von Z; so ist $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 0$ u. s. f.

3) Vergleichet man hierauf den Zähler n in (n. 1.) mit dem Zähler von Z; so muß seyn $-L+AL = 0$, und $BL = 1$, woraus folgt $L = 1$, wegen $B = 1$ in (n. 2.).

4) Nimmt man die Werthe von A, B, L in $\int Z$; so hat man das summatorische Glied der gegebenen Reihe

$$= 1 - \frac{1}{2.3.4 - - - - - (n+1)}.$$

II) Man soll das allgemeine und summatorische Glied folgender Reihe angeben.

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{3.6}, \frac{10}{3.6.11}, \frac{17}{3.6.11.18}, \frac{26}{3.6.11.18.27} \text{ u. s. f.}$$

Die Zähler 2, 5, 10, 17, 26 - - - bilden eine arithmetische Reihe vom zweyten Range, und eine solche machen

Beyspiele.

I) Man soll das allgemeine oder nte und summatorische Glied der geometrischen Reihe 2, 4, 8, 16, 32, 64 ... ω angeben.

Das erste Glied ist $a = 2$, der Exponent aber (148.§) $q = \frac{4}{2} = 2$: also ist wegen der Formula V) XVIII) das nte Glied ω, und das summatorische s.

$$\omega = 2 . 2^{n-1}; \quad s = 2(2^n - 1).$$

Will man z. B. das zehnte Glied ω und die Summe von zehn ersten Gliedern s wissen; so muß seyn $n = 10$: also

$$\omega = 2 . 2^9 = 2 . 512 = 1024.$$
$$s = 2(2^{10} - 1) = 2(1024 - 1) = 2046.$$

II) Es sind zwo Zahlen 2 und 1458 gegeben; man soll fünf andere Zahlen bestimmen, welche zwischen den gegebenen liegen und mit denselben eine geometrische Reihe ausmachen.

Es ist offenbar, daß man bey dieser Foderung die eine der gegebenen Zahlen für das erste Glied a und die andere für das letzte ω hält, und zugleich voraussetzt, es sey die Anzahl n aller Glieder von a an bis ω bekannt; weil hier die zwo gegebenen mit den fünf verlangten Zahlen die Anzahl $n = 7$ von Gliedern der verlangten Reihe ausmachen.

Soll nun $a = 2$ das erste, und $\omega = 1458$ das letzte, eigentlich siebente Glied seyn; so findet man den Exponent der Reihe aus der Formul XIII).

q=

148. §. Erklärungen.

Wenn die Glieder einer Reihe so beschaffen sind, daß jedes Glied durch das nächst vorhergehende dividirt den nämlichen Quotienten giebt; so heißt dieselbe eine geometrische Reihe oder Progression, und der erwähnte Quotient wird ihr Exponent genannt: so ist z. B. 2, 6, 18, 54, 162, 486, eine geometrische Reihe, und ihr Exponent = 3; denn es ist 6 : 2 = 3; 18 : 6 = 3; 54 : 18 = 3; 162 : 54 = 3; 486 : 162 = 3.

Es können nun aus geometrischen und arithmetischen Reihen von jedem Range (143. §.) zusammengesetzte Reihen (algebraico-geometricae series) entstehen, wenn das erste Glied einer geometrischen Reihe mit dem ersten Gliede einer arithmetischen Reihe, und sodann das zweyte mit dem zweyten, das dritte mit dem dritten u. s. f. multiplicirt wird, wie dieses folgendes Beyspiel zeiget.

Eine geometrische Reihe.

2, 6, 18, 54, 162, 486

Eine arithmetische Reihe vom zweyten Range.

1, 3, 6, 10, 15, 21

Die aus beyden zusammengesetzte Reihe.

2, 18, 108, 540, 2430, 10206.

Aus arithmetischen und geometrischen Reihen können auch durch die Addition oder Subtraction ihrer gleichnahmichten Glieder andere Reihen entstehen, die ich, zum Unterschiede von den zusammengesetzten vermischte Reihen

Zu dem Ende nehme man die Formul XV), welche auſſer dem unbekannten Exponenten q lauter bekannte Dinge a, n, s enthält, und ſetze in ihr die gegebenen Werthe von a, n, s; ſo hat man:

$$q^{10} - \frac{2046}{2}q = 1 - \frac{2046}{2}; \text{ oder } q^{10} - 1023q = -1022;$$

$$\text{oder auch } q^{10} - 1023q + 1022 = 0.$$

Die Erfindung des Exponenten q hängt demnach von der Auflöſung der Gleichung $q^{10} - 1023q + 1022 = 0$ von zehnter Ordnung ab: nach (124. §.) findet man aber, daß eine Wurzel dieſer Gleichung $q = 2$ iſt, und nun kann man die verlangten Glieder aus $a = 2$, $q = 2$ wie in II) beſtimmen; es werden nämlich die Glieder der im erſten Beyſpiele angenommenen Reihe herauskommen.

152. §. Aufgabe.

Das allgemeine und ſummatoriſche Glied einer vorgelegten zuſammengeſetzten Reihe (148. §.) zu beſtimmen.

Auflöſung. 1) Es muß möglich ſeyn, die vorgelegte Reihe in zwo Reihen, eine arithmetiſche, und die andere geometriſche, aus welchen ſie zuſammengeſetzt ſeyn ſoll, zu zerlegen: iſt dieſes geſchehen; ſo ſuche man das allgemeine Glied jeder Reihe beſonders, und multiplicire hierauf die allgemeinen Glieder derſelben Reihen unter einander, indem das Product aus ihnen das allgemeine Glied der zuſammengeſetzten Reihe geben muß, wie dieſes unmittelbar

aus

ähnlich, daher iſt derſelbe das allgemeine Glied einer arithmetiſchen Reihe von unbeſtimmtem Range (143. §.); der einfache Factor K^{n-1} giebt nach (129. §.) eine geometriſche Reihe (148. §.); wovon er demnach das allgemeine Glied iſt: das vorgelegte ſummatoriſche Glied $\int Z$ und das daraus hergeleitete allgemeine Glied Z gehören alſo zu jeder zuſammengeſetzten Reihe (148. §.); und ſo kann man darnach jeder ſolchen Reihe ſowohl das allgemeine als ſummatoriſche Glied beſtimmen.

2. Zuſatz.

Aber für $B=0$, $C=0$, $D=0$ u. ſ. f. erhält man $\int Z = AK^n - A$; und $Z=(AK-A)K^{n-1}$: da alſo Z in dieſem Fall das allgemeine Glied einer geometriſchen Reihe iſt; ſo iſt $\int Z$ das ſummatoriſche Glied derſelben.

150. §. Aufgabe.

Es ſind einige von den erſten Gliedern einer geometriſchen Reihe gegeben; man ſoll das allgemeine und ſummatoriſche Glied derſelben Reihe beſtimmen.

Auflöſung. 1) Die erſten Glieder der gegebenen Reihe ſeyen a, b, c, d, e: da nun die Formuln (149. §. 2. Zuſ.) für jede geometriſche Reihe gelten; ſo müſſen dieſelben auch für dieſe gelten, und es kömmt nun alles darauf an, die Werthe von A und K zu beſtimmen, für welche die Formuln (a. a. O.) das allgemeine und ſummatoriſche Glied der geometriſchen Reihe a, b, c, d, e - - - geben müſſen.

2) Aus Z in (149. §. 2. Zuſ.) findet man nach (129. §.) die zwey erſten Glieder $AK-A$ und $(AK-A)K$ der

geometrischen Reihe, wovon das allgemeine Glied Z ist: wegen (n. 1.) mache man demnach

$$AK - A = a;\ (AK - A)K = b;$$

oder $A(K-1) = a;\ AK(K-1) = b$:

also $\frac{AK(K-1)}{A(K-1)} = K = \frac{b}{a}$,

folglich $A = \frac{a^2}{b-a}$.

Das verlangte allgemeine und summatorische Glied ist daher wegen (149. §. 2. Zus.).

$$Z = \left(\frac{a^2}{b-a} \cdot \frac{b}{a} - \frac{a^2}{b-a}\right)\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{a^2}{b-a}\left(\frac{b}{a} - 1\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}.$$

$$\int Z = \frac{a^2}{b-a} \cdot \frac{b^n}{a^n} - \frac{a^2}{b-a} = \frac{a^2}{b-a}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1\right).$$

151. §. Aufgabe.

Es ist a das erste und ω das nte Glied einer geometrischen Reihe, daher ist n die Anzahl ihrer ersten Glieder von a an bis ω; ferner ist s die Summe derselben Glieder, und q der Exponent der Reihe (148. §.): wie kann man jedes von den fünf Dingen a, ω, n, s, q finden, wenn was immer für drey Dinge von den vier übrigen gegeben werden?

Auflösung. Dieses kann nach den folgenden Formeln geschehen:

Für

Für a

I. $a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$. II. $a = \omega q \mp s(q-1)$.

III. $a = \frac{s(q-1)}{q^n - 1}$. IV. $a^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{s} a^{\frac{n}{n-1}} = \frac{(s-\omega)\omega^{\frac{1}{n-1}}}{s}$.

Für ω

V. $\omega = aq^{n-1}$. VI. $\omega = \frac{a + s(q-1)}{q}$.

VII. $\omega = \frac{s\, q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$.

VIII. $\omega^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{s}\omega^{\frac{n}{n-1}} = \frac{(s-a)a^{\frac{1}{n-1}}}{s}$.

Für n

IX. $n = 1 + \frac{\text{Log.}\,\omega - \log. a}{\log. q}$.

X. $n = \frac{\log.(sq + a - s) - \log. a}{\log. q}$.

XI. $n = 1 + \frac{\log.\omega - \log.(\omega q + s - sq)}{\log. q}$.

XII. $n = 1 + \frac{\log.\omega - \log. a}{\log.(s-a) - \log.(s-\omega)}$.

Für q

XIII. $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$, oder $\log. q = \frac{1}{n-1} \log. \frac{\omega}{a}$.

XIV. $q = \frac{s-a}{s-\omega}$. XV. $q^n - \frac{s}{a} q = 1 - \frac{s}{a}$.

XVI. $q^n - \frac{s}{s-\omega} q^{n-1} = -\frac{\omega}{s-\omega}$.

Für s

XVII. $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$. XVIII. $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$.

XIX. $s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$. XX. $s = \frac{\omega(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}$.

Beweis. 1) Die geometrische Reihe, zu welcher die Zahlen a, ω, n, q, s gehören sollen, mag a, b, c, d . . . ω seyn, so, daß ω ihr ntes Glied ist: also ist sowohl ω als die Summe s von ihren n ersten Gliedern wegen (150. §.)

$$\omega = \frac{a^2}{b - a}\left(\frac{b}{a} - 1\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}.$$

$$s = \frac{a^2}{b - a}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1\right).$$

Weil aber q der Exponent der Reihe seyn soll, und derselbe allemahl erhalten wird, wenn man was immer für ein Glied durch das nächst vorhergehende dividirt (148. §.); so ist $q = \frac{b}{a}$, und nun $b = aq$: setzt man diese Werthe von $\frac{b}{a}$ und b in die Formuln $\omega =$ und $s =$; so kommen die oben angeführten Formuln V) XVIII) heraus.

Nun aber ergeben sich aus diesen Formuln die Formuln I) XIII) IX), XV) III) X): denn was insbesondere die logarithmischen Formuln IX) X) anbelangt; so kommen dieselben auf diese Art heraus:

Aus

Aus der Formul V) erhält man $q^{n-1} = \frac{\omega}{a}$: also ist auch $\log. q^{n-1} = \log. \frac{\omega}{a}$ nach (134. §. 2. Zuſ.), folglich $(n-1) \log. q = \log. \omega - \log. a$ (136. §.), und dieſe Gleichung giebt die Formul IX). Man findet ferner aus der Formul XVIII) $q^n = \frac{sq - s + a}{a}$: alſo auch $\log. q^n = \log. \left(\frac{sq - s + a}{a}\right)$, oder $n \log. q = \log. (sq - s + a) - \log. a$ (136. §.), und dieſes giebt die Formul X). Daher ſind die Formuln I) III) V) IX) X) XIII) XV) XVIII) richtig.

2) Vergleichet man aber die Werthe von a in den Formuln I) III); ſo findet man eine Gleichung, woraus ſich die Formuln VII) XI) XVI) XX) ergeben.

3) Setzt man den Werth von q aus XIII) in XVIII); ſo erhält man eine Gleichung, welche die Formuln IV) VIII) XII) XIX) giebt.

4) Vergleichet man endlich die Werthe von n in IX) XI); ſo erhält man

$$\log. \omega - \log. a = \log. \omega - \log. (\omega q + s - sq).$$

Daher $\log. \frac{\omega}{a} = \log. \frac{\omega}{\omega q + s - sq}$:

alſo (134. §. 2. Zuſ.) $\frac{\omega}{a} = \frac{\omega}{\omega q + s - sq}$.

Und aus dieſer Gleichung folgen die noch übrigen Formuln II) VI) XIV) XVII).

Beyspiele.

I) Man soll das allgemeine oder nte und summatorische Glied der geometrischen Reihe 2, 4, 8, 16, 32, 64 ... ω angeben.

Das erste Glied ist $a = 2$, der Exponent aber (148. §.) $q = \frac{4}{2} = 2$: also ist wegen der Formul V) XVIII) das nte Glied ω, und das summatorische s.

$$\omega = 2 \cdot 2^{n-1}; \quad s = 2(2^n - 1).$$

Will man z. B. das zehnte Glied ω und die Summe von zehn ersten Gliedern s wissen; so muß seyn $n = 10$: also

$$\omega = 2 \cdot 2^9 = 2 \cdot 512 = 1024.$$
$$s = 2(2^{10} - 1) = 2(1024 - 1) = 2046.$$

II) Es sind zwo Zahlen 2 und 1458 gegeben; man soll fünf andere Zahlen bestimmen, welche zwischen den gegebenen liegen und mit denselben eine geometrische Reihe ausmachen.

Es ist offenbar, daß man bey dieser Foderung die eine der gegebenen Zahlen für das erste Glied a und die andere für das letzte ω hält, und zugleich voraussetzt, es sey die Anzahl n aller Glieder von a an bis ω bekannt; weil hier die zwo gegebenen mit den fünf verlangten Zahlen die Anzahl $n = 7$ von Gliedern der verlangten Reihe ausmachen.

Soll nun $a = 2$ das erste, und $\omega = 1458$ das letzte, eigentlich siebente Glied seyn; so findet man den Exponent der Reihe aus der Formul XIII).

$q =$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}, \text{ oder } \log. q = \frac{\log. \omega - \log. a}{n-1},$$

$$\text{daher } \log. q = \frac{\log. 1458 - \log. 2}{6} = \frac{3,1637575 - 0,3010300}{6},$$

$$\log. q = \frac{2,8627275}{6} = 0,4771213 = \log. 3:$$

also $q = 3$.

Ist aber der Exponent q bekannt; so kann man nun aus ihm, dem ersten Gliede $a = 2$, und der Anzahl n aller Glieder, auch das zweyte, dritte, vierte, fünfte, sechste noch unbekannte Glied nach der Formul V) bestimmen, wenn man $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ nimmt: denn es wird seyn das zweyte Glied $aq^{2-1} = aq = 2.3 = 6$; das dritte $aq^{3-1} = aq^2 = aq.q = 6.3 = 18$; das vierte $aq^{4-1} = aq^3 = aq^2.q = 18.3 = 54$; das fünfte $aq^{5-1} = aq^4 = aq^3.q = 54.3 = 162$; das sechste $aq^{6-1} = aq^5 = aq^4.q = 162.3 = 486$.

III) Eine geometrische Reihe hat zehn Glieder, wovon das erste = 2 ist, und die Summe aller Glieder = 2046; man soll die übrigen Glieder bestimmen.

Die hier gegebenen Dinge sind also das erste Glied $a = 2$, die Anzahl aller Glieder $n = 10$, und ihre Summe $s = 2046$: wäre nun der Exponent q bekannt; so würde man die übrigen Glieder, wie im IIten Beyspiele angeben, folglich kömmt alles darauf an, den Exponent q zu bestimmen.

Zu

Reihe durch die Addition oder Subtraction aus den Beſtandreihen entſtanden iſt, und man wird es für ſich leicht einſehen, daß die Abziehung mit der Summe derjenigen Beſtandreihe geſchehen muß, deren Glieder bey der Vermiſchung von den Gliedern einer andern abgezogen wurden.

Beyſpiel.

Man ſoll das ſummatoriſche Glied der Reihe 3, 7, 21, 59, 161, 435 u. ſ. f. angeben.

Wenn man die Glieder dieſer Reihe gehörig zerleget; ſo wird man finden, daß ſie aus den Gliedern der Beſtandreihen I) II) III) entſtehen, indem die gleichnahmichten Glieder von I) und II) unter einander multiplicirt, und zu den Producten die Glieder von III) addirt werden.

I) Arithm. 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . .
II) Geom. 1, 2, 4, 8, 16, 32 . . . .
III) Geom. 1, 3, 9, 27, 81, 243 . . . .

Die gegebene Reihe entſtehet alſo eigentlich durch die Addition der Glieder der geometriſchen Reihe III) zu den Gliedern der aus I) und II) zuſammengeſetzten (148. §.): um alſo das ſummatoriſche Glied der gegebenen Reihe zu haben, muß man das ſummatoriſche Glied $\frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}$ der dritten Reihe III) nach (151. §. XVIII. Form.) für $a = 1$, $q = \frac{3}{1}$ nehmen, und überdem das ſummatoriſche Glied $= (-1+n)\,2^n + 1$ der aus I) II) zuſammengeſetzten

Reihe

aus dem Begriffe einer zusammengesetzten Reihe (148. §.), und dem Begriffe allgemeiner Glieder (129. §.) erhellet.

2) Wenn einmahl das allgemeine Glied der vorgelegten Reihe bekannt ist; so muß man es mit Z in (149. §.) wegen (149. §. 1. Zus.) vergleichen, damit durch diese Vergleichung die Werthe von K, A, B, C --- bestimmt werden mögen, als welche hierauf in $\int Z$ (149. §.) statt K, A, B, C --- genommen, das dortige summatorische Glied $\int Z$ in das summatorische Glied der vorgelegten Reihe verwandeln werden.

Beyspiele.

1) Das allgemeine und summatorische Glied der Reihe 6, 28, 104, 336, 992 --- zu bestimmen.

1) Wenn man die Glieder in ihre Factoren zerlegt; so findet man die Reihe 3.2, 7.4, 13.8, 21.16, 31.32, daher zerlegt sich die vorgelegte Reihe in folgende zwo Reihen.

Arithm. 3, 7, 13, 21, 31 - - -
Geom. 2, 4, 8, 16, 32 - - -

2) Die arithmetische Reihe in (n. 1.) ist vom zweyten Range, daher findet man das allgemeine Glied derselben $= 1+n+n^2$ nach (143. §. 3. Zus.).

3) Bey der geometrischen Reihe in (n. 1.) ist das erste Glied $a = 2$, der Exponent aber $q = \frac{4}{2} = 2$ (148. §.): also ist jedes nte Glied oder das allgemeine nach (151. §. V. Form.) $= aq^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$.

4) Aus

II. Man kann den Halbmeſſer AC = 1 ſetzen, und dann berechnen, was für Stücke von dieſer Einheit die, verſchiedenen Kreisbogen A zugehörigen, trigonometriſchen Linien (l) ſind; und die ſo berechneten Linien machen das **natürliche Syſtem** der Trigonometrie aus: man kann aber auch den Halbmeſſer AC überhaupt = r ſetzen, und ſich einbilden, daß er in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile, z. B. in 10000000 gleiche Theilchen eingetheilt iſt; berechnet man nun, wie viel ſolche Theilchen in den, verſchiedenen Bogen A zugehörigen, trigonometriſchen Linien enthalten ſind; ſo erhält man das **künſtliche Syſtem.**

III. Aus den Eigenſchaften der rechtwinklichten und ähnlichen Dreyecke BCA; ahA und IMA; abA findet man folgende Formuln für die trigonometriſchen Linien (l), welche einem Bogen A, bey jedem künſtlichen Syſteme, wo der Halbmeſſer = r ſeyn ſoll, zugehören.

1) $\text{Sin}\,A^2 + \text{Cof}\,A^2 = r^2$; 2) $\text{Sin}\,A = \sqrt{(r^2 - \text{Cof}\,A^2)}$;

3) $\text{Cof}\,A = \sqrt{(r^2 - \text{Sin}\,A^2)}$; 4) $\text{Sin v}\,A = r - \text{Cofin}\,A$;

5) $\text{Tang}\,A = r \cdot \frac{\text{Sin}\,A}{\text{Cof}\,A}$; 6) $\text{Sec}\,A = \frac{r^2}{\text{Cofin}\,A}$;

7) $\text{Tang}\,A = \frac{\text{Sec}\,A\ \text{Sin v}\,A}{r}$; 8) $\text{Cof v}\,A = r - \text{Sin}\,A$;

9) $\text{Cot}\,A = r \cdot \frac{\text{Cof}\,A}{\text{Sin}\,A}$; 10) $\text{Cofec}\,A = \frac{r^2}{\text{Sin}\,A}$;

11) $\text{Tang.}\,A\,\text{Cot}\,A = r^2$; 12) $\text{Cofec}\,A^2 - \text{Cot}\,A^2 = r^2$;

13) $\text{Sin}A = \frac{r\,\text{Tang}\,A}{\sqrt{(r^2 + \text{Tang}A^2)}}$; 14) $\text{Cofin}A = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + \text{Tang}A^2)}}$

IV. Setzt

Arithm. $1, \quad 12, \quad 45, \quad 112.$

Geom. $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}.$

2) Die arithmetische Reihe in (n. 1.) ist vom dritten Range; das allgemeine Glied derselben ist daher nach (143. §. 3. Zus.) $= -n^2 + 2n^3$.

3) Bey der geometrischen Reihe (n. 1.) ist das erste Glied $\frac{1}{10} = a$, und der Exponent (148. §.)

$$\frac{1}{100} : \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = q:$$

das nte oder allgemeine Glied eben der Reihe ist also nach (151. §. V. Form.)

$$aq^{n-1} = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10^n}.$$

4) Aus (n. 2. 3.) folgt also das allgemeine Glied der gegebenen zusammengesetzten Reihe:

$$= (-n^2 + 2n^3)\frac{1}{10^n} = (-n^2 + 2n^3)\left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

5) Weil n^3 die höchste Potenz von n in (n. 4.) ist; so gehört diese Reihe wegen (149. §. und 1. Zus.) zum folgenden allgemeinen und summatorischen Glied.

$$Z = \begin{pmatrix} AK + BKn + CKn^2 + DKn^3 \\ -A \quad -Bn \quad -Cn^2 \quad -Dn^3 \\ +B \quad +2Cn + 3Dn^2 \\ -C \quad -3Dn \\ +D \end{pmatrix} \frac{K^n}{K}$$

$$\int Z = (A + Bn + Cn^2 + Dn^3)K^n - A.$$

6) Die Vergleichung des allgemeinen Gliedes in (n. 4.) mit Z in (n. 5.) giebt nun:

$$K^n = \left(\frac{1}{10}\right)^n; \text{ daher } K = \frac{1}{10}.$$

$$\frac{DK-D}{K} = 2; \quad \frac{\frac{1}{10}D - D}{\frac{1}{10}} = 2; \quad D = \frac{-2}{3^2} = \frac{-2}{9}$$

$$\frac{CK-C+3D}{K} = -1; \quad \frac{\frac{1}{10}C - C - \frac{6}{9}}{\frac{1}{10}} = -1; \quad C = \frac{-17}{3^3} = \frac{-17}{27}.$$

$$\frac{BK-B+2C-3D}{K} = 0; \quad \frac{\frac{1}{10}B - B - 2.\frac{17}{27} + \frac{6}{9}}{\frac{1}{10}} = 0;$$

$$B = -\frac{160}{3^5} = -\frac{160}{243}.$$

$$\frac{AK-A+B-C+D}{K} = 0; \quad \frac{\frac{1}{10}A - A - \frac{160}{243} + \frac{17}{27} - \frac{2}{9}}{\frac{1}{10}} = 0;$$

$$A = -\frac{610}{3^7} = -\frac{610}{2187}.$$

Und für diese Werthe von K, A, B, C, D giebt $\int Z$ in (n. 5.) das verlangte summatorische Glied der gegebenen Reihe =

$$= \left(-\frac{610}{3^7} - \frac{160}{3^5}n - \frac{17}{3^3}n^2 - \frac{2}{3^2}n^3\right)\frac{1}{10^n} + \frac{610}{3^7}$$

$$= \frac{610}{3^7} - \left(\frac{610}{3^7} + \frac{160}{3^5}n + \frac{17}{3^3}n^2 + \frac{2}{3^2}n^3\right)\frac{1}{10^n}.$$

III) Das allgemeine und summatorische Glied folgender Reihe zu bestimmen.

$$\frac{a}{\alpha}, \frac{a+d}{\alpha q}, \frac{a+2d}{\alpha q^2}, \frac{a+3d}{\alpha q^3}; \text{ u. s. f.}$$

1) Sie ist aus folgenden Reihen zusammengesetzt (148. §.).

Arithm. $a, a+d, a+2d, a+3d \ldots$

Geom. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha q}, \frac{1}{\alpha q^2}, \frac{1}{\alpha q^3} \ldots$

2) Das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe vom ersten Range in (n. 1.) ist nach (143. §. 3. Zus.)

$$= a+(n-1)d = a+nd-d.$$

3) Bey der geometrischen Reihe in (n. 1.) ist das erste Glied $= \frac{1}{\alpha}$, und der Exponent (148. §.) $\frac{1}{\alpha q} : \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha q} = \frac{1}{q}$; wenn man also in (151. §. V. Form.) $\frac{1}{\alpha}$ statt a und $\frac{1}{q}$ statt q nimmt; so erhält man das $n$te oder allgemeine Glied der geometrischen Reihe $= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1} = \frac{1}{\alpha q^{n-1}}$.

4) Daher folgt aus (n. 2. 3.) das allgemeine Glied der gegebenen zuſammengeſetzten Reihe

$$= \frac{a+nd-d}{\alpha q^{n-1}} = \frac{q(a-d+nd)}{\alpha}\left(\frac{1}{q}\right)^n = \left((a-d)\frac{q}{\alpha}+\frac{qd}{\alpha}n\right)\left(\frac{1}{q}\right)^n.$$

5) Da nun beym allgemeinen Glied (n. 4.) nur die erſte Potenz von n befindlich iſt; ſo gehören in (149. §.) zu dieſer Reihe nur folgende Glieder von $\int Z$ und Z.

$$Z = \begin{matrix} AK + BKn \\ -A \quad -Bn \\ +B \end{matrix}\Bigg\}\frac{K^n}{K}; \quad \int Z = (A+Bn)K^n - A.$$

6) Vergleichet man Z in (n. 5.) mit dem allgemeinen Gliede (n. 4.); ſo wird man finden:

$$K^n = \left(\frac{1}{q}\right)^n; \quad K = \frac{1}{q}.$$

$$\frac{BK-B}{K} = \frac{qd}{\alpha}; \quad \frac{\frac{1}{q}B-B}{\frac{1}{q}} = \frac{qd}{\alpha}; \quad B = \frac{-qd}{\alpha(q-1)}.$$

$$\frac{AK-A+B}{K} = (a-d)\frac{q}{\alpha}; \quad A = \frac{aq-aq^2-dq}{\alpha(q-1)^2}.$$

Und für dieſe Werthe von K, A, B giebt $\int Z$ in (n. 5.) das ſummatoriſche Glied der gegebenen Reihe

$$= \frac{aq^2-aq+dq}{\alpha(q-1)^2} - \frac{1}{q^n}\left(\frac{aq^2-aq+dq}{\alpha(q-1)^2} + \frac{dqn}{\alpha(q-1)}\right).$$

Nach dieſer Formul kann man daher alle Reihen ſummiren, welche aus gebrochenen Gliedern von der Beſchaffenheit beſtehen, daß ihre Zähler eine arithmetiſche Reihe

vom

vom ersten Range, die Nenner aber eine geometrische Reihe bilden:

Z. B. Sey die Reihe $\frac{1}{3}; \frac{2}{6}; \frac{3}{12}; \frac{4}{24}$ u. s. f. zu summiren; so muß man $a = 1$, $d = 2 - 1 = 1$, $\alpha = 3$, $q = \frac{6}{3} = 2$ setzen, und dann ist die Summe von n Gliedern aus (n. 6.) =

$$\frac{1.2^2-1.2+1.2}{3(2-1)^2} - \frac{1}{2^n}\left(\frac{1.2^2-1.2+1.2}{3(2-1)^2} + \frac{1.2.n}{3(2-1)}\right) = \frac{4}{3} - \frac{(4+2n)}{3.2^n}.$$

Man soll z. B. die Summe von drey ersten Gliedern angeben; so ist $n = 3$, und die verlangte Summe $= \frac{4}{3} - \frac{(4+2.3)}{3.2^3} = \frac{4}{3} - \frac{10}{24} = \frac{11}{12}$, und es ist auch $\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} = \frac{4+4+3}{12} = \frac{11}{12}$.

153. §. Aufgabe.

Eine vermischte Reihe (seriem mixtam) **zu summiren.**

Auflösung. Weil eine vermischte Reihe durch die Addition oder Subtraction der gleichnahmichten Glieder mehrerer Reihen entstehen soll (148. §.); so ist offenbar, daß auch die Summe von n ersten Gliedern der vermischten Reihe dadurch erhalten werden muß, wenn man die Summen von eben so vielen Gliedern der Bestandreihen, aus welchen nämlich jene entstanden ist, entweder zusammen addiret, oder von einander abziehet, nachdem die vermischte

Reihe durch die Addition oder Subtraction aus den Beſtandreihen entſtanden iſt, und man wird es für ſich leicht einſehen, daß die Abziehung mit der Summe derjenigen Beſtandreihe geſchehen muß, deren Glieder bey der Vermiſchung von den Gliedern einer andern abgezogen wurden.

Beyſpiel.

Man ſoll das ſummatoriſche Glied der Reihe 2, 7, 21, 59, 161, 435 u. ſ. f. angeben.

Wenn man die Glieder dieſer Reihe gehörig zerleget; ſo wird man finden, daß ſie aus den Gliedern der Beſtandreihen I) II) III) entſtehen, indem die gleichnahmichten Glieder von I) und II) unter einander multiplicirt, und zu den Producten die Glieder von III) addirt werden.

I) Arithm. 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . .
II) Geom. 1, 2, 4, 8, 16, 32 . . . .
III) Geom. 1, 3, 9, 27, 81, 243 . . . .

Die gegebene Reihe entſtehet alſo eigentlich durch die Addition der Glieder der geometriſchen Reihe III) zu den Gliedern der aus I) und II) zuſammengeſetzten (148. §.): um alſo das ſummatoriſche Glied der gegebenen Reihe zu haben, muß man das ſummatoriſche Glied $\frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}$ der dritten Reihe III) nach (151. §. XVIII. Form.) für $a = 1$, $q = \frac{3}{1}$ nehmen, und überdem das ſummatoriſche Glied $= (-1+n)\,2^n + 1$ der aus I) II) zuſammengeſetzten

Reihe

Reihe nach (152. §.) ſuchen, hierauf jenes zu dieſem addiren: das verlangte ſummatoriſche Glied iſt demnach:

$$(n-1)2^n+1+\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}=(n-1)2^n+\frac{3^n+1}{2}.$$

Der XVII. Abſchnitt.

Anwendung der Analyſis auf die Trigonometrie.

154. §. Grundlehre.

Darunter werden die allererſten Sätze verſtanden, welche hier kurz erläutert angeführt werden, damit der Zuſammenhang der vorzüglichſten trigonometriſchen Formuln, wovon dieſer Abſchnitt eine Sammlung enthalten ſoll, beſſer erhellen möge.

I. Wenn C der Anfang und a das Ende eines Kreisbogens Ca (1. Fig.) iſt; ſo hängt der Bogen Ca mit dem Winkel CAB am Mittelpuncte A zuſammen: wenn man nun die gerade Linie EF durch den Mittelpunct A ſenkrecht auf CA ziehet, und die geraden Linien BC; ah auf CA; und IM; ab auf EF ſenkrecht ſtehen; indem BC; IM den Bogen $C\overset{M}{a}$ an ſeinen Endpuncten C; $\overset{M}{a}$ berühren; ſo erhält man die bekannten, dem Bogen Ca und Winkel CAB zugehörigen trigonometriſchen Linien; wenn man nämlich denſelben Bogen oder Winkel mit A bezeichnet; ſo iſt 1. Fig.

ah = Sin A; Ch = Sin v A; BC = Tang A; BA = Sec A.

ab = Coſin A; Mb = Coſ v A; MI = Cot A; AI = Coſec A.

II. Man kann den Halbmeſſer AC = 1 ſetzen, und dann berechnen, was für Stücke von dieſer Einheit die, verſchiedenen Kreisbogen A zugehörigen, trigonometriſchen Linien (l) ſind; und die ſo berechneten Linien machen das natürliche Syſtem der Trigonometrie aus: man kann aber auch den Halbmeſſer AC überhaupt = r ſetzen, und ſich einbilden, daß er in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile, z. B. in 10000000 gleiche Theilchen eingetheilt iſt; berechnet man nun, wie viel ſolche Theilchen in den, verſchiedenen Bogen A zugehörigen, trigonometriſchen Linien enthalten ſind; ſo erhält man das künſtliche Syſtem.

III. Aus den Eigenſchaften der rechtwinklichten und ähnlichen Dreyecke BCA; ahA und IMA; abA findet man folgende Formuln für die trigonometriſchen Linien (l), welche einem Bogen A, bey jedem künſtlichen Syſteme, wo der Halbmeſſer = r ſeyn ſoll, zugehören.

1) $\text{Sin}\,A^2 + \text{Cof}\,A^2 = r^2$; 2) $\text{Sin}\,A = \sqrt{(r^2 - \text{Cof}\,A^2)}$;

3) $\text{Cof}\,A = \sqrt{(r^2 - \text{Sin}\,A^2)}$; 4) $\text{Sin v}\,A = r - \text{Cofin}\,A$;

5) $\text{Tang}\,A = r \cdot \frac{\text{Sin}\,A}{\text{Cof}\,A}$; 6) $\text{Sec}\,A = \frac{r^2}{\text{Cofin}\,A}$;

7) $\text{Tang}\,A = \frac{\text{Sec}\,A\ \text{Sin}\,A}{r}$; 8) $\text{Cof v}\,A = r - \text{Sin}\,A$;

9) $\text{Cot}\,A = r \cdot \frac{\text{Cof}\,A}{\text{Sin}\,A}$; 10) $\text{Cofec}\,A = \frac{r^2}{\text{Sin}\,A}$;

11) $\text{Tang.}\,A\,\text{Cot}\,A = r^2$; 12) $\text{Cofec}\,A^2 - \text{Cot}\,A^2 = r^2$;

13) $\text{Sin}A = \frac{r\,\text{Tang}\,A}{\sqrt{(r^2 + \text{Tang}A^2)}}$; 14) $\text{Cofin}A = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + \text{Tang}A^2)}}$

IV. Setzt

IV. Setzt man $r=1$; so ergeben sich aus (III) folgende Formuln für das natürliche System (II).

1) $\text{Sin}\,A^2+\text{Cos}\,A^2=1$; 2) $\text{Sin}\,A=\sqrt{(1-\text{Cos}\,A^2)}$;

3) $\text{Cos}\,A=\sqrt{(1-\text{Sin}A^2)}$; 4) $\text{Sin v}\,A=1-\text{Cos}\,A$;

5) $\text{Tang}\,A=\frac{\text{Sin}\,A}{\text{Cos}\,A}$; 6) $\text{Sec}\,A=\frac{1}{\text{Cos}\,A}$;

7) $\text{Tang}\,A=\text{Sec}\,A.\text{Sin}A$; 8) $\text{Cos v}\,A=1-\text{Sin}\,A$;

9) $\text{Cot}\,A=\frac{\text{Cos}\,A}{\text{Sin}\,A}$; 10) $\text{Cosec}\,A=\frac{1}{\text{Sin}\,A}$;

11) $\text{Tang}\,A.\text{Cot}\,A=1$; 12) $\text{Cosec}\,A^2-\text{Cot}\,A^2=1$;

13) $\text{Sin}A=\frac{\text{Tang}\,A}{\sqrt{(1+\text{Tang}A^2)}}$; 14) $\text{Cos}\,A=\frac{1}{\sqrt{(1+\text{Tang}\,A^2)}}$.

V. Uebrigens verhalten sich die trigonometrischen Linien (I), welche einem gewissen Bogen A bey verschiedenen Halbmessern zugehören, allemahl so gegen einander, wie die Halbmesser selbst: es wird demnach hinreichen, die Formuln (IV) des natürlichen Systems (II) überall vor Augen zu haben, indem man, wo es nöthig seyn mag, jede darauf beruhende Function in eine andere verwandeln kann, welche sich auf die einem künstlichen Systeme zukommenden trigonometrischen Linien beziehen soll.

Denn es sey Z eine Function, welche die natürlichen Sinus eines Bogens A enthält, und man verlange eine gleichgültige Function Y, welche durch was immer für künstliche Sinus bestimmt seyn soll: weil der Halbmesser beym natürlichen Systeme $=1$ ist, und der Halbmesser beym

künſtlichen Syſteme, worauf ſich die Function Y beziehen ſoll, überhaupt r heißen kann; ſo iſt:

natürl. Sin A : künſtl. Sin A = 1 : r;

alſo iſt

$$\text{natürl. Sin A} = \frac{\text{künſtl. Sin A}}{r};$$

$$\text{künſtl. Sin A} = r. \text{ natürl. Sin A};$$

$$(\text{natürl. Sin A})^n = \frac{(\text{künſtl. Sin A})^n}{r^n};$$

$$(\text{künſtl. Sin A})^n = r^n. (\text{natürl. Sin A})^n.$$

Das heißt: wenn man den künſtlichen Sinus eines Bogens A durch den zugehörigen Halbmeſſer r dividirt; ſo giebt der Quotient den natürlichen Sinus deſſelben Bogens: wenn man aber den natürlichen Sinus eines Bogens A mit dem gegebenen Halbmeſſer r multiplicirt; ſo giebt das Product den künſtlichen Sinus deſſelben Bogens: alſo kann man die durch natürliche Sinus beſtimmte Function Z in die gleichgültige Y verwandeln, die ſich auf künſtliche Sinus für einen Halbmeſſer r beziehen ſoll, wenn man jene Sinus in dieſe verwandelt. Was übrigens hier von Sinuſſen geſagt iſt, gielt auch für jede andere trigonometriſche Linie.

VI. Man muß aber bey Rechnungen bejahte trigonometriſche Linien von verneinten genau unterſcheiden, weil ſie ſich auf verſchiedene Bogen beziehen. Wenn nämlich der Sinus ah, die Tangente BC, Secante AB, und Coſecante AI eines Bogens Ca oberhalb des Durchmeſſers CG liegen;

liegen; so heißen sie bejaht, und haben in einer Rechnung allemahl entweder das Zeichen (+) oder keines vor sich: wenn es aber einen Bogen giebt, dessen Sinus, Tangente, Secante und Cosecante unterhalb des Durchmessers CG liegen; so nennt man sie verneint, und man bezeichnet sie in einer Rechnung allemahl mit (—). Wenn ferner der Cosinus ab und die Cotangente IM eines Bogens Ca linker Hand des Senkstriches EF, wie hier, liegen; so werden sie ebenfalls als bejahte Größen angesehen: wenn aber eines Bogens Cosinus und Cotangente rechter Hand des Senkstriches EF liegen; so werden sie verneint genannt. Auf diese Art lassen sich trigonometrische Linien, vermöge (II), wie Zahlen (2. §.) in einer Rechnung behandeln: sie sollen nämlich Mengen von gleich grossen Einheiten (gleichen Theilchen des Halbmessers) seyn, welche Einheiten aber oft unter entgegengesetzten Bedingungen betrachtet (nach entgegengesetzten Richtungen gezählt) werden.

VII. Der Bogen Ca ist in der Figur kleiner als ein Viertheil der Kreislinie angenommen; ein solcher Bogen heiße A, und π die halbe Kreislinie.

1) Nun gehören zum Bogen A = Ca lauter bejahte trigonometrische Linien (VI), und es ist gewiß, daß eben die Linien nicht nur dem Bogen A = Ca, sondern auch jedem andern Bogen zugehören, welcher in C sich anfängt, und in a sich endigt: die bejahten trigonometrischen Linien, welche einem Bogen A zugehören, müssen also auch jedem Bogen in der nachstehenden Reihe zugehören.

A;

A; $2\pi+A$; $4\pi+A$; $6\pi+A$ ... $2k\pi+A$.

2) Wenn man aber den Bogen $cG=A$ ſetzt; ſo iſt $CMc=\pi-A>90°$, und zu dieſem Bogen, wie auch zu dem damit verbundenen ſtumpfen Winkel CAH gehören theils verneinte, theils bejahte trigonometriſche Linien; unter jenen befinden ſich nach (VI) der Coſinus cb, die Cotangente HM, die Tangente CD, und Secante AD; unter dieſen ſind aber der Sinus cd und die Coſecante AH: da alſo dieſe Linien nicht nur dem Bogen $CMc=\pi-A$, ſondern auch jedem andern zugehören, welcher in C ſeinen Anfang, und in c das Ende hat; ſo gehören dieſelben zu jedem Bogen in der Reihe:

$\pi-A$; $3\pi-A$; $5\pi-A$ .... $(2k-1)\pi-A$.

3) Iſt ferner $A=Ge$; ſo iſt $CMGe=\pi+A>180°$, und mit dieſem Bogen iſt der erhabene Winkel CAL verbunden, welcher nach (VI) einen verneinten Sinus ed, Coſinus ef, eine verneinte Cotangente LN, und Coſecante AL, hingegen eine bejahte Tangente CB und Secante AB hat: da aber dieſe trigonometriſchen Linien nicht nur dem Bogen CMGe, ſondern auch jedem andern, welcher in C ſeinen Anfang, und in e das Ende nimmt, zugehören; ſo gehören dieſelben auch jedem Bogen in der folgenden Reihe zu:

$\pi+A$; $3\pi+A$; $5\pi+A$ ... $(2k-1)\pi+A$.

4) Setzt man endlich $Cg=A$; ſo iſt

$$2\pi-A=CMGNg>\frac{3}{2}\pi=3.90°,$$

und mit dieſem Bogen ſtehet der erhabene Winkel CAD in Verbin-

Verbindung; er hat nach (VI) einen verneinten Sinus gh, eine verneinte Tangente CD, Secante AD, und Cosecante AK, hingegen hat er einen bejahten Cosinus gf, und eine bejahte Cotangente KN: da also diese trigonometrischen Linien überhaupt jedem Bogen zugehören, welcher in C seinen Anfang und in g sein Ende hat; so gehören sie auch zu jedem Bogen in der Reihe:

$2\pi - A$; $4\pi - A$; $6\pi - A \cdots 2k\pi - A$.

VIII. Der Grösse nach haben ein stumpfer Winkel CAH, und ein spitziger CAB, welcher jenen zu $\pi = 180°$ ergänzet, einerley trigonometrische Linien, den einzigen Quersinus ausgenommen, welcher bey jenem Winkel $= Cd$, folglich gröſſer, und bey diesem $= Ch$, folglich kleiner als der Halbmesser ist: wenn demnach ein Bogen $\alpha < 180°$ ist; so muß jede trigonometrische Linie von $180° - \alpha$ so groß seyn, als von α.

IX. Jedes Bogens Ca Sinus ah, ist die Hälfte der Sehne ag des doppelten Bogens aCg: ist $Ca = 30°$; so ist der Sinus ah die Hälfte des Halbmessers: ist $Ca = 45°$; so ist $BC = CA$ und $ah = hA = ab$, oder die Tangente des halben rechten Winkels ist dem Halbmesser, und der Sinus dem Cosinus gleich.

X. Auſſer diesen Bogen sind noch die Bogen 0π; $\frac{1}{2}\pi$; π; $\frac{3}{2}\pi$; 2π, von derer Sinussen, Cosinussen u. s. f. man bestimmt urtheilen kann, und zwar der Gröſſe sowohl als der Lage (VI) nach: weil nämlich der Halbmesser $= 1$ seyn soll; so ist allemahl:

Sin

Sin $0\pi = 0$; Sin $\frac{1}{2}\pi = 1$; Sin $\pi = 0$; Sin $\frac{3}{2}\pi = -1$; Sin $2\pi = 0$.
Cos $0\pi = 1$; Cos $\frac{1}{2}\pi = 0$; Cos $\pi = -1$; Cos $\frac{3}{2}\pi = 0$; Cos $2\pi = 1$.
Sin v $0\pi = 0$; Sin v $\frac{1}{2}\pi = 1$; Sin v $\pi = 2$; Sin v $\frac{3}{2}\pi = 1$; Sin v $2\pi = 0$.
Cos v $0\pi = 1$; Cos v $\frac{1}{2}\pi = 0$; Cos v $\pi = 1$; Cos v $\frac{3}{2}\pi = 2$; Cos v $2\pi = 1$.
Tang $0\pi = 0$; Tang $\frac{1}{2}\pi = \infty$; Tang $\pi = 0$; Tang $\frac{3}{2}\pi = -\infty$;
Tang $2\pi = 0$.
Cot $0\pi = \infty$; Cot $\frac{1}{2}\pi = 0$; Cot $\pi = -\infty$; Cot $\frac{3}{2}\pi = 0$;
Cot $2\pi = \infty$.
Sec $0\pi = 1$; Sec $\frac{1}{2}\pi = \infty$; Sec $\pi = -1$; Sec $\frac{3}{2}\pi = \infty$;
Sec $2\pi = 1$.
Cosec $0\pi = \infty$; Cosec $\frac{1}{2}\pi = 1$; Cosec $\pi = \infty$; Cos $\frac{3}{2}\pi = -1$;
Cosec $2\pi = \infty$.

XI. Wenn zween Winkel A und B einander zu $\frac{1}{2}\pi = 90°$ ergänzen, wenn $A + B = 90°$, daher $A = 90° - B$ ist; so ist der Sinus, Sinus verſus, die Tangente und Secante des einen Winkels, zugleich der Coſinus, Coſinus verſus, die Cotangente und Coſecante des andern, oder es iſt z. B. Sin $(90° - B) =$ Coſin A, und Cos $(90° - B) =$ Sin A.

XII. Wegen (IX) iſt alſo Sin $30° =$ Coſin $60° = \frac{1}{2}$; und nach (IV) Cos $30° = \sqrt{(1 - (\text{Sin } 30°)^2)} = \sqrt{(1 - (\frac{1}{2})^2)}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$; folglich Tang $30° = \frac{\text{Sin } 30°}{\text{Cos } 30°} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

XIII. Eine andere merkwürdige Vergleichung zwiſchen den, einem Bogen $A < \frac{1}{2}\pi$, zugehörigen trigonometriſchen Linien, und denjenigen, welche gröſſeren Bögen zugehören, erhellet aus folgenden Betrachtungen.

1) Bisher haben wir den Anfang jedes Bogens in C angenommen, und die Grösse desselben von da an gegen M zu gerechnet: wir können aber einen Bogen zwar von C an, aber doch auch nach entgegengesetzter Richtung gegen N zu rechnen, und in diesem Fall kann man jenen Bogen bejaht, diesen aber verneint nennen, um einen von dem andern bey jeder Rechnung gehörig zu unterscheiden. Fig. 1.

2) Wenn demnach A einen Bogen bedeutet, welcher kleiner als $90° = \frac{1}{2}\pi$ ist; so gehören zu einem bejahten Bogen $(k\pi \pm A)$ eben die trigonometrischen Linien, welche einem verneinten (n. 1.) Bogen $-(k\pi \mp A)$ zukommen.

Die Ursache dieses allgemeinen Satzes bestehet überhaupt darinn, weil zu zweenen Bogen, welche einerley Anfang und Ende in der Kreislinie haben, gewiß auch einerley trigonometrische Linien zugehören müssen, und solche Bogen, weil sie nach entgegengesetzten Richtungen von einem und eben demselben Anfangspuncte gemessen werden (n. 1.) sind allemahl $k\pi \pm A$ und $k\pi \mp A$, wie immer auch groß die Zahl k seyn mag: so hat z. B. der bejahte Bogen $CMc = CMG - cG = \pi - A$ eben die trigonometrischen Linien cd; dC; CD; AD; cb; bM; MH; AH, welche auch dem verneinten Bogen $CNGc = CNG + Gc = \pi + A$ zugehören müssen, und der bejahte Bogen $CMGNg = 2\pi - Cg = 2\pi - A$ hat eben die trigonometrischen Linien, welche der verneinte Bogen $CNGMCg = 2\pi + Cg = 2\pi + A$, und der bejahte Bogen $CMGc = CMG + Gc = \pi + A$ hat mit dem verneinten Bogen

CNc

CNe = CNG — Ge = π — A einerley trigonometrische Linien.

3) Für A = o hat demnach der bejahte Bogen $k\pi$ eben die trigonometrischen Linien, welche der verneinte $-k\pi$ (n. 2.).

4) Wegen (VII. n. 1. 2) gehört der bejahte Sinus eines Bogens A zu jedem Bogen in der nachstehenden Reihe α): wegen (obig. n. 2.) muß er also auch zu jedem verneinten Bogen in der Reihe β) gehören.

α) A; π — A; 2π + A; 3π — A; 4π + A ....

β) $-(\pi+A)$; $-(2\pi-A)$; $-(3\pi+A)$; $-(4\pi-A)$....

5) Ferner gehört wegen (VII. n. 1. 4.) der bejahte Cosinus eines Bogens A auch zu jedem Bogen in der Reihe γ): wegen (obig. n. 2.) muß er also auch zu jedem verneinten Bogen in der Reihe δ) gehören.

γ) A; $2\pi \pm A$; $4\pi \pm A$; $6\pi \pm A$; $8\pi \pm A$ ....

δ) $-(2\pi \mp A)$; $-(4\pi \mp A)$; $-(6\pi \mp A)$; $-(8\pi \mp A)$....

6) Wegen (VII. n. 1. 3.) gehört ferner die bejahte Tangente eines Bogens A zu jedem bejahten Bogen in der Reihe ε): wegen (obig. n. 2.) gehört sie also auch zu jedem verneinten Bogen in der Reihe ξ).

ε) A; π + A; 2π + A; 3π + A; 4π + A ....

ξ) $-(\pi-A)$; $-(2\pi-A)$; $-(3\pi-A)$; $-(4\pi-A)$....

7) Endlich gehört wegen (VII. n. 1; 4.) die bejahte Cotangente eines Bogens A zu jedem bejahten Bogen in der Reihe γ) in (n. 5.): wegen (obig. n. 2.) muß also dieselbe auch zu jedem verneinten Bogen in der Reihe δ) gehören.

155. §.

155. §. Lehrſatz.

Die Seiten eines Dreyecks ABC (2. Fig.) verhalten ſich gegen einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber ſtehenden Winkel. 2. Fig.

Beweis. Durch die Spitzen A; B; C jedes Dreyecks kann eine Kreislinie gehen, und wenn ihr Mittelpunct in a iſt; ſo iſt der Winkel $A = \frac{1}{2} BaC$, folglich auch Sin A = Sin $\frac{1}{2}$ BaC: da alſo Sin $\frac{1}{2}$ BaC = $\frac{1}{2}$ BC ſeyn muß (154. §. IX.); ſo iſt auch Sin $A = \frac{1}{2}$ BC. Auf gleiche Art erhält man Sin $B = \frac{1}{2}$ AC und Sin $C = \frac{1}{2}$ AB: alſo iſt Sin A : Sin B : Sin C = $\frac{1}{2}$ BC : $\frac{1}{2}$ AC : $\frac{1}{2}$ AB = BC : AC : AB.

1. Zuſatz.

In einem an B rechtwinklichten Dreyecke ABC (3. Fig.), wo der Sinus des rechten Winkels Sin B = 1 iſt (154. §. X.) hat man daher $\beta : \alpha$ = 1 : Sin A, und $\alpha : \gamma$ = Sin A : Sin C = Sin A : Coſin A (154. §. XI.): alſo iſt 3. Fig.

I) $\beta = \frac{\alpha}{\text{Sin A}} = \alpha . \frac{1}{\text{Sin A}} = \alpha .$ Coſec A (154. §. IV.).

II) $\alpha = \beta .$ Sin A; III) $\alpha = \gamma . \frac{\text{Sin A}}{\text{Col A}} = \gamma .$ Tang A.

IV) $\gamma = \alpha . \frac{\text{Coſin A}}{\text{Sin A}} = \alpha .$ Cot A (154. §. IV.).

2. Zuſatz.

Wenn ABC ein ſchiefwinklichtes Dreyeck iſt (4. 5. Fig.); ſo wird ein Loth von C auf BA innerhalb (4. Fig.) oder auſſerhalb (5. Fig.) des Dreyecks fallen, nachdem beyde Winkel an B und A ſpitzig ſind, oder einer von ihnen, 4. 5. Fig.

nämlich A ſtumpf iſt: allemahl werden aber zwey rechtwinklichte Dreyecke BCD; ACD entſtehen (4. 5. Fig.). Bezeichnet man die Seiten des Dreyecks mit a; b; c, da die ihnen gegenüber ſtehenden Winkel A; B; C heißen ſollen; ſo iſt nach (1. Zuſ.)

I) $CD = b \operatorname{Sin} A$; II) $CD = a \operatorname{Sin} B$.

III) $AD = b \operatorname{Coſin} A$; IV) $BD = a \operatorname{Coſin} B$.

3. Zuſatz.

Nun iſt (4. Fig.) $BD = AB - AD = c - b \operatorname{Coſin} A$ nach (2. Zuſ.), und in (5. Fig.) iſt eigentlich $BD = AB + AD = c + b \operatorname{Coſin} A$ (2. Zuſ.): weil aber hier der Winkel A ſtumpf, folglich Coſin A in ſich verneint iſt (154. §. VII.); ſo gielt die erſte Formul in beyden Fällen (4. 5. Fig.), nur muß man bey der Anwendung nicht vergeſſen, Coſin A für einen ſtumpfen Winkel A verneint zu nehmen.

Es iſt ferner im rechtwinklichten Dreyecke CBD allemahl $a = \sqrt{(CD^2 + BD^2)}$: wenn man daher den nun gefundenen Werth für BD, und den für CD aus (2. Zuſ. I.) nimmt; ſo findet man

$$a = \sqrt{(b^2 \operatorname{Sin} A^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Coſin} A + b^2 \operatorname{Coſin} A^2)}$$
$$= \sqrt{(b^2(\operatorname{Sin} A^2 + \operatorname{Coſin} A^2) + c^2 - 2bc \operatorname{Coſin} A)}$$
$$= \sqrt{(b^2 - 2bc \operatorname{Coſin} A + c^2)} \text{ nach (154. §. IV.)}$$

Aus zwoen Seiten b und c und dem eingeſchloſſenen Winkel A läßt ſich alſo allemahl die dritte Seite a, welche demſelben Winkel gegenüber ſtehet, beſtimmen.

4. Zusatz.

Aus den Formeln I. II. IV. (2. Zus.) und dem Werthe von BD in (3. Zus.) folgt a Sin B : a Cosin B = b Sin A : c — b Cosin A: also ist (154. §. IV.)

$$\frac{b \operatorname{Sin} A}{c - b \operatorname{Cos} A} = \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Cos} B} = \operatorname{Tang} B.$$

Aus zwoen Seiten b; c und dem eingeschlossenen Winkel A läßt sich daher der, der Seite b gegenüber stehende Winkel B bestimmen.

Der dritte Winkel C = 180° — A — B ist sogleich bekannt: will man aber auch für ihn eine Formul haben; so ist sie:

$$\frac{c \operatorname{Sin} A}{b - c \operatorname{Cos} A} = \frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Cos} C} = \operatorname{Tang} C.$$

Etwas bequemer werden die Formuln seyn, wenn man sie so verändert:

$$\frac{\operatorname{Sin} A}{\frac{c}{b} - \operatorname{Cos} A} = \operatorname{Tang} B; \quad \frac{\operatorname{Sin} A}{\frac{b}{c} - \operatorname{Cos} A} = \operatorname{Tang} C.$$

Und am bequemsten werden sie seyn, wofern man sie in folgende verwandelt:

$$\frac{1}{\operatorname{Tang} B} = \frac{c - b \operatorname{Cos} A}{b \operatorname{Sin} A} = \frac{c}{b \operatorname{Sin} A} - \frac{\operatorname{Cos} A}{\operatorname{Sin} A};$$

also nach (154. §. IV.)

$$\operatorname{Cot} B = \frac{c}{b \operatorname{Sin} A} - \operatorname{Cot} A = \frac{c}{b} \operatorname{Cosec} A - \operatorname{Cot} A.$$

Und so ist $\operatorname{Cot} C = \frac{b}{c \operatorname{Sin} A} - \operatorname{Cot} A = \frac{b}{c} \operatorname{Cosec} A - \operatorname{Cot} A.$

Aus II. IV.

VI. $\text{Tang}(45°-B)=\frac{\text{Sin}(45°-B)}{\text{Cof}(45°-B)}=\frac{\text{Cof}B-\text{Sin}B}{\text{Cof}B+\text{Sin}B}=$

$=\frac{1-\frac{\text{Sin}B}{\text{Cof}B}}{1+\frac{\text{Sin}B}{\text{Cof}B}}=\frac{1-\text{Tang}B}{1+\text{Tang}B}.$

Nun aus V.

VII. $\text{Cot}(45°+B)=\frac{1}{\text{Tang}(45°+B)}=\frac{\text{Cofin}B-\text{Sin}B}{\text{Cofin}B+\text{Sin}B}$

$=\frac{1-\text{Tang}B}{1+\text{Tang}B}.$

Aus VI.

VIII. $\text{Cot}(45°-B)=\frac{1}{\text{Tang}(45°-B)}=\frac{\text{Cof}B+\text{Sin}B}{\text{Cof}B-\text{Sin}B}$

$=\frac{1+\text{Tang}B}{1-\text{Tang}B}.$

Demnach iſt:

IX. $\text{Tang}(45°+B)=\frac{1}{\text{Tang}(45°-B)}=\text{Cot}(45°-B)$

$=\frac{1}{\text{Cot}(45°+B)}.$

3. Zuſatz.

Nimmt man $A=30°$; ſo iſt nach (154. §. XII.).

I. $\text{Sin}(30°+B)+\text{Sin}(30°-B)=\text{Cofin}B$ aus (1. Z. I.)

daher $\text{Sin}(30°+B)=\text{Cof}B-\text{Sin}(30°-B)$.

II. $\text{Cof}(30-B)-\text{Cof}(30+B)=\text{Sin}B$ aus (1. Zuſ. IV.)

daher $\text{Cof}(30+B)=\text{Cof}(30-B)-\text{Sin}B$.

III.

III. $\text{Sin}(B-30°)=\frac{(\text{Sin}B)\sqrt{3}-\text{Cos}B}{2}$ (156. §. III.)

IV. $\text{Cosin}(B-30°)=\frac{(\text{Cos}B)\sqrt{3}+\text{Sin}B}{2}$ (156. §. IV.)

V. $\text{Sin}(30°+B)=\text{Sin}(30°-B)+(\text{Sin}B)\sqrt{3}$ aus (1. Z. II.)

VI. $\text{Sin}(60°+B)=\text{Sin}(60°-B)+\text{Sin}B$ aus (1. Zuſ. II.)

4. Zuſatz.

Man nehme ferner an, daß die bisherigen Bogen A, B einander gleich ſind; ſo findet man für A = B auch Sin A = Sin B und Cos A = Cos B, daher iſt:

I. $\text{Sin}\,2A=2\,\text{Sin}A\,\text{Cosin}A$ (156. §. I.)

II. $\text{Cosin}\,2A=\text{Cos}A^2-\text{Sin}A^2$ (156. §. II.).

Wenn man zu II. die Form. 1) aus (154. §. IV.) addirt; ſo wird ſeyn:

$1+\text{Cos}\,2A=2\,\text{Cos}A^2$: alſo $1+\text{Cos}\,2B=2\,\text{Cos}B^2$,

daher

III. $\text{Cos}A^2\text{Cos}B^2=\frac{1+\text{Cos}\,2B+\text{Cos}\,2A+\text{Cos}\,2A\text{Cos}\,2B}{4}$.

Wenn man aber II. von 1) in (154. §. IV.) abziehet; ſo iſt:

$1-\text{Cos}\,2A=2\,\text{Sin}A^2$: alſo $1-\text{Cos}\,2B=2\,\text{Sin}B^2$.

daher

IV. $\text{Sin}A^2\text{Sin}B^2=\frac{1-\text{Cos}\,2A-\text{Cos}\,2B+\text{Cos}\,2A\,\text{Cos}\,2B}{4}$.

V. $\text{Sin}A^2\text{Cos}B^2=\frac{1-\text{Cos}\,2A+\text{Cos}\,2B-\text{Cos}\,2A\text{Cos}\,2B}{4}$ aus $\frac{\text{III}}{\text{IV}}$.

$$AD = b \operatorname{Cos} A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c};$$

$$\text{also } BD = AB - AD = c - \frac{b^2-c^2+a^2}{2c} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}.$$

10. Zusatz.

$$\text{Demnach ist } BD - AD = \frac{a^2-b^2}{c} = \frac{(a+b)(a-b)}{c},$$

folglich $c : a+b = a-b : BD-AD$, oder: die gröſste Seite eines Dreyecks verhält ſich zur Summe der zwey übrigen Seiten, wie die Differenz dieſer Seiten zur Differenz der Stücke (9. Zuſ.), in welche die gröſste Seite durch das Loth aus dem gegenüber ſtehenden Winkel zerfällt wird.

156. §. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Sinus und Coſinus zweener Winkel A und B, den Sinus und Coſinus ihrer Summe $A+B$ und Differenz $A-B$ zu beſtimmen.

Auflöſung. Dazu dienen folgende Formuln:

I. $\operatorname{Sin}(A+B) = \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B + \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} A.$

II. $\operatorname{Cos}(A+B) = \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B - \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B.$

III. $\operatorname{Sin}(A-B) = \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B - \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} A.$

IV. $\operatorname{Cos}(A-B) = \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B + \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B.$

Beweis. 1) Wir wollen indeſſen annehmen, daß $A+B < 180° = \pi$ iſt, daß daher erſt ein dritter Bogen C dazu kommen muß, wenn $A+B+C = \pi$ ſeyn ſoll: alſo kann man die drey Winkel A, B, C in einem Dreyecke

ABC

ABC (4. 5. Fig.) sich vorstellen, und $A+B=\pi-C$, folglich $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$ setzen (154. §. VIII.). 4. 5. Fig.

2) Nun aber ist aus (155. §.) $\sin C : \sin B = c : b$, daher $\sin C = \frac{c}{b} \sin B$: also auch, wegen (n. 1.) $\sin(A+B) = \frac{c}{b} \sin B = \sin A \cos B + \sin B \cos A$, wegen (155. §. 4. Zus.) und dieses ist die Formul I.

3) In (n. 2.) war $\sin C = \sin A . \cos B + \sin B \cos A$: verwechselt man also die Buchstaben A; C; so ist auch:

$$\sin A = \sin C . \cos B + \sin B \cos C.$$

Setzt man hier den vorigen Werth von $\sin C$; so findet man:

$$\sin A = \sin A \cos B^2 + \sin B \cos A \cos B + \sin B \cos C,$$

$$\sin A (1 - \cos B^2) = \sin B \cos A \cos B + \sin B \cos C,$$

oder (154. §. IV.)

$$\sin A \sin B^2 = \sin B \cos A \cos B + \sin B \cos C,$$

und nun $\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$.

Weil aber $A+B=\pi-C$ war (n. 1.); so ist auch $\cos(A+B) = \cos(\pi-C) = \cos C$ (154. §. VIII.), und so giebt die gefundene Formul für $\cos C$ die Formul II.

4) Weil endlich die Nebenwinkel CAE und CAB gleich grosse Sinus und Cosinus haben (154. §. VIII.); so kann man annehmen, daß A den äusseren Winkel CAE bedeutet, wenn gleich A vielleicht spitzig ist: also kann man setzen, es sey $A+B=C$, folglich $\sin(A-B) = \sin C$, und $\cos(A-B) = \cos C$: aus $\sin C$ in (n. 3.) folgt daher

die Formul III., indem nun, wegen des ſtumpfen Winkels A der Cof A das Zeichen (—) vor ſich haben muß: aus Cof C in (n. 3.) folgt ferner die Formul IV, weil Cof A in ſich verneint iſt.

5) Man kann ſich endlich aus (154. §. VII. XIII.) leicht davon überzeugen, daß dieſe Formuln, welche hier für $A+B<180°=\pi$ erwieſen worden ſind, nun auch für was immer für zween Bogen A; B gelten müſſen.

1. Zuſatz.

Aus den angeführten Formuln erhält man durch die Addition und Subtraction folgende Formuln.

I. $\text{Sin}(A+B)+\text{Sin}(A-B)=2\,\text{Sin}\,A\,\text{Cof}\,B.$

II. $\text{Sin}(A+B)-\text{Sin}(A-B)=2\,\text{Sin}\,B\,\text{Cof}\,A.$

III. $\text{Cof}(A-B)+\text{Cof}(A+B)=2\,\text{Cof}\,A\,\text{Cof}\,B.$

IV. $\text{Cof}(A-B)-\text{Cof}(A+B)=2\,\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B.$

Alſo aus I. III. und (154. §. IV.).

V. $\dfrac{\text{Sin}(A+B)+\text{Sin}(A-B)}{\text{Cof}(A-B+\text{Cof}(A+B)}=\text{Tang}\,A.$

Und aus II. IV. und I. II.

VI. $\dfrac{\text{Sin}(A+B)-\text{Sin}(A-B)}{\text{Cof}\,A-B)-\text{Cof}(A+B)}=\text{Cot}\,A.$

VII. $\dfrac{\text{Sin}(A+B)+\text{Sin}(A-B)}{\text{Sin}(A+B)-\text{Sin}(A-B)}=\text{Tang}\,A\,\text{Cot}\,B=\dfrac{\text{Tang}\,A}{\text{Tang}\,B}.$

VIII. $\text{Tang}\,A\pm\text{Tang}\,B=\dfrac{\text{Sin}\,A}{\text{Cof}\,A}\pm\dfrac{\text{Sin}\,B}{\text{Cof}\,B}$

$=\dfrac{\text{Sin}\,A\,\text{Cof}\,B\pm\text{Sin}\,B\,\text{Cof}\,A}{\text{Cof}\,A\,\text{Cof}\,B}=\dfrac{\text{Sin}(A\pm B)}{\text{Cof}\,A\,\text{Cof}\,B}.$

IX.

5. Zuſatz.

Die vier letzten Formuln in (4. Zuſ.) verwandeln ſich für $\frac{1}{2}A$ und $\frac{1}{2}B$ ſtatt A und B in folgende:

I. $\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{Cof} \frac{1}{2}(A-B)$.

II. $\operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(A-B) \operatorname{Cof} \frac{1}{2}(A+B)$.

III. $\operatorname{Cof} B - \operatorname{Cof} A = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(A-B)$.

IV. $\operatorname{Cof} A + \operatorname{Cof} B = 2 \operatorname{Cof} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{Cof} \frac{1}{2}(A-B)$.

Alſo iſt auch nach (154. §. IV.)

V. $\frac{\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Cof} A + \operatorname{Cof} B} = \operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A+B)$ aus $\frac{I}{IV}$.

VI. $\frac{\operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Cof} A + \operatorname{Cof} B} = \operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A-B)$ aus $\frac{II}{IV}$.

VII. $\frac{\operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Cof} B - \operatorname{Cof} A} = \operatorname{Cot} \frac{1}{2}(A+B)$ aus $\frac{II}{III}$.

VIII. $\frac{\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Cof} B - \operatorname{Cof} A} = \operatorname{Cot} \frac{1}{2}(A-B)$ aus $\frac{I}{III}$.

IX. $\frac{\operatorname{Cof} B - \operatorname{Cof} A}{\operatorname{Cof} A + \operatorname{Cof} B} = \operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A-B)$ aus $\frac{III}{IV}$.

X. $\frac{\operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B} = \operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A-B) \operatorname{Cot} \frac{1}{2}(A+B)$ aus $\frac{I}{II}$.

XI. $\frac{\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B} = \frac{\operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A-B)}$ aus $\frac{V}{VI}$.

XII. $\operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A+B) + \operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A-B) = \frac{2 \operatorname{Sin} A}{\operatorname{Cof} A + \operatorname{Cof} B}$ aus $\frac{V}{VI}$.

XIII. $\operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A+B) - \operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A-B) = \frac{2 \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Cof} A + \operatorname{Cof} B}$ aus $\frac{V}{VI}$.

Setzt man $90° - B$ ſtatt B in I. II.; ſo erhält man wegen (154. §. XI.):

Alſo aus (154. §. IV.)

XVI. $\mathrm{Cot}(A+B) = \frac{1}{\mathrm{Tang}(A+B)} = \frac{1-\mathrm{Tang}A\,\mathrm{Tang}B}{\mathrm{Tang}A+\mathrm{Tang}B}$

XVII. $\mathrm{Cot}(A-B) = \frac{1}{\mathrm{Tang}(A-B)} = \frac{1+\mathrm{Tang}A\,\mathrm{Tang}B}{\mathrm{Tang}A-\mathrm{Tang}B}$

XVIII. $1 \pm \mathrm{Tang}A\,\mathrm{Tang}B = 1 \pm \frac{\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B}$

$= \frac{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B \pm \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B} = \frac{\mathrm{Cof}(A \mp B)}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B}.$

XIX. $\mathrm{Tang}A - \mathrm{Tang}(A-B) = \frac{\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Cof}A} - \frac{\mathrm{Sin}(A-B)}{\mathrm{Cof}(A-B)}$

$= \frac{\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}(A-B) - \mathrm{Sin}(A-B)\,\mathrm{Cof}A}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}(A-B)}$

$= \frac{\mathrm{Sin}(A-(A-B))}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}(A-B)} = \frac{\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}(A-B)}.$

So auch

XX. $\mathrm{Tang}A + \mathrm{Tang}(A-B) = \frac{\mathrm{Sin}(2A-B)}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}(A-B)}.$

XXI. $\mathrm{Sin}(A+B)\,\mathrm{Cof}(A-B) = (\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}B + \mathrm{Sin}B\,\mathrm{Cof}A)(\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B + \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B)$

$= \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}A(\mathrm{Sin}B^2 + \mathrm{Cof}B^2) + \mathrm{Sin}B\,\mathrm{Cof}B(\mathrm{Sin}A^2 + \mathrm{Cof}A^2)$

$= \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}A + \mathrm{Sin}B\,\mathrm{Cof}B.$

Eben ſo iſt

XXII. $\mathrm{Sin}(A-B)\,\mathrm{Cof}(A+B) = \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}A - \mathrm{Sin}B\,\mathrm{Cof}B.$

XXIII. $\mathrm{Sin}(A+B)\,\mathrm{Sin}(A-B) = \mathrm{Sin}A^2\mathrm{Cof}B^2 - \mathrm{Sin}B^2\mathrm{Cof}A^2.$

XXIV. $\mathrm{Cof}(A+B)\,\mathrm{Cof}(A-B) = \mathrm{Cof}A^2\,\mathrm{Cof}B^2 - \mathrm{Sin}A^2\mathrm{Sin}B^2.$

2. Zusatz.

Nach (154. §. IX.) ist $\text{Sin } 45^\circ = \text{Cos } 45^\circ$, daher $(\text{Sin } 45^\circ)^2 = (\text{Cosin } 45^\circ)^2$: also (154. §. IV.) $(\text{Sin } 45^\circ)^2 + (\text{Cosin } 45^\circ)^2 = 2(\text{Sin } 45^\circ)^2 = 2(\text{Cosin } 45^\circ)^2 = 1$, folglich $\text{Sin } 45^\circ = \text{Cosin } 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Wenn man demnach in den, bey der Auflösung der Aufgabe angeführten Formuln $A = 45^\circ$ setzt; so verwandeln sich dieselben in

I. $\text{Sin}(45^\circ + B) = (\text{Cosin } B)\sqrt{\frac{1}{2}} + (\text{Sin } B)\sqrt{\frac{1}{2}}$,
daher $\text{Cosin } B + \text{Sin } B = (\text{Sin}(45^\circ + B))\sqrt{2}$.

II. $\text{Sin}(45^\circ - B) = (\text{Cosin } B)\sqrt{\frac{1}{2}} - (\text{Sin } B)\sqrt{\frac{1}{2}}$,
daher $\text{Cosin } B - \text{Sin } B = (\text{Sin}(45^\circ - B))\sqrt{2}$.

III. $\text{Cos}(45^\circ + B) = (\text{Cos } B)\sqrt{\frac{1}{2}} - (\text{Sin } B)\sqrt{\frac{1}{2}}$,
daher $\text{Cosin } B - \text{Sin } B = (\text{Cosin}(45^\circ + B))\sqrt{2}$.

IV. $\text{Cosin}(45^\circ - B) = (\text{Cosin } B)\sqrt{\frac{1}{2}} + (\text{Sin } B)\sqrt{\frac{1}{2}}$,
daher $\text{Cosin } B + \text{Sin } B = (\text{Sin}(45^\circ - B))\sqrt{2}$.

Also aus I. III.

$$\text{V. } \text{Tang}(45^\circ + B) = \frac{\text{Sin}(45^\circ + B)}{\text{Cos}(45^\circ + B)} = \frac{\text{Cos } B + \text{Sin } B}{\text{Cos } B - \text{Sin } B} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\text{Sin } B}{\text{Cos } B}}{1 - \frac{\text{Sin } B}{\text{Cos } B}} = \frac{1 + \text{Tang } B}{1 - \text{Tang } B}$$

Aus

Aus II. IV.

VI. $\text{Tang}(45°-B)=\frac{\text{Sin}(45°-B)}{\text{Cof}(45°-B)}=\frac{\text{Cof}B-\text{Sin}B}{\text{Cof}B+\text{Sin}B}=$

$$=\frac{1-\frac{\text{Sin}B}{\text{Cof}B}}{1+\frac{\text{Sin}B}{\text{Cof}B}}=\frac{1-\text{Tang}B}{1+\text{Tang}B}.$$

Nun aus V.

VII. $\text{Cot}(45°+B)=\frac{1}{\text{Tang}(45°+B)}=\frac{\text{Cofin}B-\text{Sin}B}{\text{Cofin}B+\text{Sin}B}$

$$=\frac{1-\text{Tang}B}{1+\text{Tang}B}.$$

Aus VI.

VIII. $\text{Cot}(45°-B)=\frac{1}{\text{Tang}(45°-B)}=\frac{\text{Cof}B+\text{Sin}B}{\text{Cof}B-\text{Sin}B}$

$$=\frac{1+\text{Tang}B}{1-\text{Tang}B}.$$

Demnach iſt:

IX. $\text{Tang}(45°+B)=\frac{1}{\text{Tang}(45°-B)}=\text{Cot}(45°-B)$

$$=\frac{1}{\text{Cot}(45°+B)}.$$

3. Zuſatz.

Nimmt man $A=30°$; ſo iſt nach (154. §. XII.).

I. $\text{Sin}(30°+B)+\text{Sin}(30°-B)=\text{Cofin}B$ aus (1. Zuſ. I.)

daher $\text{Sin}(30°+B)=\text{Cof}B-\text{Sin}(30°-B)$.

II. $\text{Cof}(30-B)-\text{Cof}(30+B)=\text{Sin}B$ aus (1. Zuſ. IV.)

daher $\text{Cof}(30+B)=\text{Cof}(30-B)-\text{Sin}B$.

III.

III. $\text{Sin}(B-30°) = \frac{(\text{Sin}B)\sqrt{3}-\text{Cos}B}{2}$ (156. §. III.)

IV. $\text{Cosin}(B-30°) = \frac{(\text{Cos}B)\sqrt{3}+\text{Sin}B}{2}$ (156. §. IV.)

V. $\text{Sin}(30°+B) = \text{Sin}(30°-B)+(\text{Sin}B)\sqrt{3}$ aus (1. Z. II.)

VI. $\text{Sin}(60°+B) = \text{Sin}(60°-B)+\text{Sin}B$ aus (1. Zuſ. II.)

4. Zuſatz.

Man nehme ferner an, daß die bisherigen Bogen A, B einander gleich ſind; ſo findet man für A = B auch Sin A = Sin B und Cos A = Cos B, daher iſt:

I. $\text{Sin}\,2A = 2\,\text{Sin}A\,\text{Cosin}A$ (156. §. I.)

II. $\text{Cosin}\,2A = \text{Cos}A^2 - \text{Sin}A^2$ (156. §. II.).

Wenn man zu II. die Form. 1) aus (154. §. IV.) addirt; ſo wird ſeyn:

$1+\text{Cos}\,2A = 2\,\text{Cos}A^2$: alſo $1+\text{Cos}\,2B = 2\,\text{Cos}B^2$,

daher

III. $\text{Cos}A^2\text{Cos}B^2 = \frac{1+\text{Cos}\,2B+\text{Cos}\,2A+\text{Cos}\,2A\,\text{Cos}\,2B}{4}$.

Wenn man aber II. von 1) in (154. §. IV.) abziehet; ſo iſt:

$1-\text{Cos}\,2A = 2\,\text{Sin}A^2$: alſo $1-\text{Cos}\,2B = 2\,\text{Sin}B^2$.

daher

IV. $\text{Sin}A^2\text{Sin}B^2 = \frac{1-\text{Cos}\,2A-\text{Cos}\,2B+\text{Cos}\,2A\,\text{Cos}\,2B}{4}$.

V. $\text{Sin}A^2\text{Cos}B^2 = \frac{1-\text{Cos}\,2A+\text{Cos}\,2B-\text{Cos}\,2A\,\text{Cos}\,2B}{4}$ aus $\frac{\text{III}}{\text{IV}}$.

Wen-

$$AD = b \operatorname{Cos} A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c};$$

$$\text{also } BD = AB - AD = c - \frac{b^2-c^2+a^2}{2c} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}.$$

10. Zusatz.

$$\text{Demnach ist } BD - AD = \frac{a^2-b^2}{c} = \frac{(a+b)(a-b)}{c},$$

folglich $c : a+b = a-b : BD-AD$, oder: die gröſste Seite eines Dreyecks verhält ſich zur Summe der zwey übrigen Seiten, wie die Differenz dieſer Seiten zur Differenz der Stücke (9. Zuſ.), in welche die gröſste Seite durch das Loth aus dem gegenüber ſtehenden Winkel zerfällt wird.

156. §. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Sinus und Coſinus zweener Winkel A und B, den Sinus und Coſinus ihrer Summe $A+B$ und Differenz $A-B$ zu beſtimmen.

Auflöſung. Dazu dienen folgende Formuln:

I. $\operatorname{Sin}(A+B) = \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B + \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} A.$

II. $\operatorname{Cos}(A+B) = \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B - \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B.$

III. $\operatorname{Sin}(A-B) = \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B - \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} A.$

IV. $\operatorname{Cos}(A-B) = \operatorname{Cos} A . \operatorname{Cos} B + \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B.$

Beweis. 1) Wir wollen indeſſen annehmen, daß $A+B < 180° = \pi$ iſt, daß daher erſt ein dritter Bogen C dazu kommen muß, wenn $A+B+C = \pi$ ſeyn ſoll: alſo kann man die drey Winkel A, B, C in einem Dreyecke

ABC

ABC (4. 5. Fig.) sich vorstellen, und $A+B=\pi-C$, folglich $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$ setzen (154. §. VIII.). 4. 5. Fig.

2) Nun aber ist aus (155. §.) $\sin C : \sin B = c : b$, daher $\sin C = \frac{c}{b} \sin B$: also auch, wegen (n. 1.) $\sin(A+B) = \frac{c}{b} \sin B = \sin A \cos B + \sin B \cos A$, wegen (155. §. 4. Zus.) und dieses ist die Formul I.

3) In (n. 2.) war $\sin C = \sin A . \cos B + \sin B \cos A$: verwechselt man also die Buchstaben A; C; so ist auch:

$$\sin A = \sin C . \cos B + \sin B \cos C.$$

Setzt man hier den vorigen Werth von $\sin C$; so findet man:

$$\sin A = \sin A \cos B^2 + \sin B \cos A \cos B + \sin B \cos C,$$

$$\sin A (1 - \cos B^2) = \sin B \cos A \cos B + \sin B \cos C,$$

aber (154. §. IV.)

$$\sin A \sin B^2 = \sin B \cos A \cos B + \sin B \cos C,$$

und nun $\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$.

Weil aber $A+B=\pi-C$ war (n. 1.); so ist auch $\cos(A+B) = \cos(\pi-C) = \cos C$ (154. §. VIII.), und so giebt die gefundene Formul für $\cos C$ die Formul II.

4) Weil endlich die Nebenwinkel CAE und CAB gleich grosse Sinus und Cosinus haben (154. §. VIII.); so kann man annehmen, daß A den äusseren Winkel CAE bedeutet, wenn gleich A vielleicht spitzig ist: also kann man setzen, es sey $A+B=C$, folglich $\sin(A-B) = \sin C$, und $\cos(A-B) = \cos C$: aus $\sin C$ in (n. 3.) folgt daher

die Formul III., indem nun, wegen des ſtumpfen Winkels A der Cof A das Zeichen (—) vor ſich haben muß: aus Cof C in (n. 3.) folgt ferner die Formul IV, weil Cof A in ſich verneint iſt.

5) Man kann ſich endlich aus (154. §. VII. XIII.) leicht davon überzeugen, daß dieſe Formuln, welche hier für $A+B<180°=\pi$ erwieſen worden ſind, nun auch für was immer für zween Bogen A; B gelten müſſen.

1. Zuſatz.

Aus den angeführten Formuln erhält man durch die Addition und Subtraction folgende Formuln.

I. $\text{Sin}(A+B)+\text{Sin}(A-B)=2\,\text{Sin}\,A\,\text{Cof}\,B.$

II. $\text{Sin}(A+B)-\text{Sin}(A-B)=2\,\text{Sin}\,B\,\text{Cof}\,A.$

III. $\text{Cof}(A-B)+\text{Cof}(A+B)=2\,\text{Cof}\,A\,\text{Cof}\,B.$

IV. $\text{Cof}(A-B)-\text{Cof}(A+B)=2\,\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B.$

Alſo aus I. III. und (154. §. IV.).

V. $\dfrac{\text{Sin}(A+B)+\text{Sin}(A-B)}{\text{Cof}(A-B+\text{Cof}(A+B)}=\text{Tang}\,A.$

Und aus II. IV. und I. II.

VI. $\dfrac{\text{Sin}(A+B)-\text{Sin}(A-B)}{\text{Cof}\,A-B)-\text{Cof}(A+B)}=\text{Cot}\,A.$

VII. $\dfrac{\text{Sin}(A+B)+\text{Sin}(A-B)}{\text{Sin}(A+B)-\text{Sin}(A-B)}=\text{Tang}\,A\,\text{Cot}\,B=\dfrac{\text{Tang}\,A}{\text{Tang}\,B}.$

VIII. $\text{Tang}\,A\pm\text{Tang}\,B=\dfrac{\text{Sin}\,A}{\text{Cof}\,A}\pm\dfrac{\text{Sin}\,B}{\text{Cof}\,B}$

$=\dfrac{\text{Sin}\,A\,\text{Cof}\,B\pm\text{Sin}\,B\,\text{Cof}\,A}{\text{Cof}\,A\,\text{Cof}\,B}=\dfrac{\text{Sin}(A\pm B)}{\text{Cof}\,A\,\text{Cof}\,B}.$

IX.

so ist $\frac{n(n-1)\cdots(n-2r)}{1\cdot 2\cdots(2r+1)} = \frac{P(n-2r)}{2r+1}$ in 1):

also $P + \frac{P(n-2r)}{2r+1} = \frac{(n+1)P}{2r+1} =$

$= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-2r+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots 2r(2r+1)}$ in 5).

So kann man sich auch davon überzeugen, daß 6) die wahre Differenz der Reihe 4) von 3) ist.

Da also 5) 6) aus den Formuln III) entstehen, wenn man bey ihnen überall $n+1$ statt n setzt; so erhellet aus 5) 6), daß $\mathrm{Sin}(n+1)\varphi$; $\mathrm{Cof}(n+1)\varphi$ eben dem Gesetze, welchem $\mathrm{Sin}\, n\varphi$; $\mathrm{Cof}\, n\varphi$, unterliegen.

158. §. Aufgabe.

Den Sinus und Cosinus eines gegebenen Bogens $=\psi$ durch den Bogen auszudrücken.

Auflösung. 1) Wie immer auch der Bogen ψ groß seyn mag; so ist doch allemahl möglich, eine Zahl n und einen Bogen φ so zu nehmen, daß $n\varphi = \psi$, daher auch $n = \frac{\psi}{\varphi}$ seyn mag, und dann ist $\mathrm{Sin}\, n\varphi = \mathrm{Sin}\, \psi$, $\mathrm{Cof}\, n\varphi = \mathrm{Cof}\, \psi$: aus (157. §.) würde man also die Reihen für $\mathrm{Sin}\, \psi$ und $\mathrm{Cof}\, \psi$ finden, wenn man bey den dortigen Reihen $\mathrm{Sin}\, n\varphi = \cdots$ und $\mathrm{Cof}\, n\varphi = \cdots$ überall $n = \frac{\psi}{\varphi}$ nähme: ich will aber dieses nur bey ihren allgemeinen Gliedern thun, um zu erhalten:

Alſo aus (154. §. IV.)

XVI. $\mathrm{Cot}(A+B) = \frac{1}{\mathrm{Tang}(A+B)} = \frac{1-\mathrm{Tang}A\,\mathrm{Tang}B}{\mathrm{Tang}A+\mathrm{Tang}B}$

XVII. $\mathrm{Cot}(A-B) = \frac{1}{\mathrm{Tang}(A-B)} = \frac{1+\mathrm{Tang}A\,\mathrm{Tang}B}{\mathrm{Tang}A-\mathrm{Tang}B}$

XVIII. $1 \pm \mathrm{Tang}A\,\mathrm{Tang}B = 1 \pm \frac{\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B}$

$= \frac{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B \pm \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B} = \frac{\mathrm{Cof}(A \mp B)}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B}.$

XIX. $\mathrm{Tang}A - \mathrm{Tang}(A-B) = \frac{\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Cof}A} - \frac{\mathrm{Sin}(A-B)}{\mathrm{Cof}(A-B)}$

$= \frac{\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}(A-B) - \mathrm{Sin}(A-B)\,\mathrm{Cof}A}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}(A-B)}$

$= \frac{\mathrm{Sin}(A-(A-B))}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}(A-B)} = \frac{\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}(A-B)}.$

So auch

XX. $\mathrm{Tang}A + \mathrm{Tang}(A-B) = \frac{\mathrm{Sin}(2A-B)}{\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}(A-B)}$.

XXI. $\mathrm{Sin}(A+B)\,\mathrm{Cof}(A-B) = (\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}B + \mathrm{Sin}B\,\mathrm{Cof}A)(\mathrm{Cof}A\,\mathrm{Cof}B + \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B)$

$= \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}A(\mathrm{Sin}B^2 + \mathrm{Cof}B^2) + \mathrm{Sin}B\,\mathrm{Cof}B(\mathrm{Sin}A^2 + \mathrm{Cof}A^2)$

$= \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}A + \mathrm{Sin}B\,\mathrm{Cof}B.$

Eben ſo iſt

XXII. $\mathrm{Sin}(A-B)\,\mathrm{Cof}(A+B) = \mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cof}A - \mathrm{Sin}B\,\mathrm{Cof}B.$

XXIII. $\mathrm{Sin}(A+B)\,\mathrm{Sin}(A-B) = \mathrm{Sin}A^2\mathrm{Cof}B^2 - \mathrm{Sin}B^2\mathrm{Cof}A^2.$

XXIV. $\mathrm{Cof}(A+B)\,\mathrm{Cof}(A-B) = \mathrm{Cof}A^2\,\mathrm{Cof}B^2 - \mathrm{Sin}A^2\mathrm{Sin}B^2.$

man voraussetzt, daß φ ohne Ende abnimmt. Weil aber x in (157. §.) $=\operatorname{Sin}\varphi$ und $y=\operatorname{Cos}\varphi$ war, und $\operatorname{Sin}\varphi=0$, $\operatorname{Cos}\varphi=1$ ist; so ist klar genug, daß, indem φ ohne Ende abnimmt, die Werthe α und β in (n. 1.) sich den beständigen Werthen $\frac{\pm\psi^{2r+1}+0}{1.2.3\ldots\ldots(2r+1)}\cdot\frac{0}{0}$ $=\frac{\psi^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)}$ und $\frac{\pm\psi^{2r}+0}{1.2\ldots 2r}\cdot\frac{0}{0}=\frac{\pm\psi^{2r}}{1.2\ldots 2r}$ ohne Ende nähern. Die in (n. 1.) gesuchten allgemeinen Glieder α und β können also nichts anders als die Gränzen $\frac{\psi^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)}$ und $\frac{\psi^{2r}}{1.2\ldots 2r}$ seyn, welchen die Ausdrückungen I. II. in (n. 1.) ohne Ende sich nähern, wenn φ ohne Ende abnimmt. Demnach sind die allgemeinen Glieder der Reihen

$\frac{\pm\psi^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)}$ für $\operatorname{Sin}\psi$.

$\frac{\pm\psi^{2r}}{1.2\ldots 2r}$ für $\operatorname{Cos}\psi$.

Und wenn man nun $r=0$, $r=1$, $r=2$, $r=3\ldots$ nimmt; so findet man daraus die Reihen selbst.

$$\operatorname{Sin}\psi=\psi-\frac{\psi^3}{1.2.3}+\frac{\psi^5}{1.2\ldots 5}-\frac{\psi^7}{1.2\ldots 7}+\frac{\psi^9}{1.2\ldots 9}-\frac{\psi^{11}}{1.2\ldots 11}+\ldots\ldots\frac{\pm\psi^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)}.$$

Cos

Aus II. IV.

VI. $\text{Tang}(45°-B)=\frac{\text{Sin}(45°-B)}{\text{Cof}(45°-B)}=\frac{\text{Cof}B-\text{Sin}B}{\text{Cof}B+\text{Sin}B}=$

$$=\frac{1-\frac{\text{Sin}B}{\text{Cof}B}}{1+\frac{\text{Sin}B}{\text{Cof}B}}=\frac{1-\text{Tang}B}{1+\text{Tang}B}.$$

Nun aus V.

VII. $\text{Cot}(45°+B)=\frac{1}{\text{Tang}(45°+B)}=\frac{\text{Cofin}B-\text{Sin}B}{\text{Cofin}B+\text{Sin}B}$

$$=\frac{1-\text{Tang}B}{1+\text{Tang}B}.$$

Aus VI.

VIII. $\text{Cot}(45°-B)=\frac{1}{\text{Tang}(45°-B)}=\frac{\text{Cof}B+\text{Sin}B}{\text{Cof}B-\text{Sin}B}$

$$=\frac{1+\text{Tang}B}{1-\text{Tang}B}.$$

Demnach iſt:

IX. $\text{Tang}(45°+B)=\frac{1}{\text{Tang}(45°-B)}=\text{Cot}(45°-B)$

$$=\frac{1}{\text{Cot}(45°+B)}.$$

3. Zuſatz.

Nimmt man $A=30°$; ſo iſt nach (154. §. XII.).

I. $\text{Sin}(30°+B)+\text{Sin}(30°-B)=\text{Cofin}B$ aus (1. Z. I.)

daher $\text{Sin}(30°+B)=\text{Cof}B-\text{Sin}(30°-B)$.

II. $\text{Cof}(30-B)-\text{Cof}(30+B)=\text{Sin}B$ aus (1. Zuſ. IV.)

daher $\text{Cof}(30+B)=\text{Cof}(30-B)-\text{Sin}B$.

III.

III. $\text{Sin}(B-30°)=\frac{(\text{Sin}B)\sqrt{3}-\text{Cos}B}{2}$ (156. §. III.)

IV. $\text{Cosin}(B-30°)=\frac{(\text{Cos}B)\sqrt{3}+\text{Sin}B}{2}$ (156. §. IV.)

V. $\text{Sin}(30°+B)=\text{Sin}(30°-B)+(\text{Sin}B)\sqrt{3}$ aus (1. Z. II.)

VI. $\text{Sin}(60°+B)=\text{Sin}(60°-B)+\text{Sin}B$ aus (1. Zuſ. II.)

4. Zuſatz.

Man nehme ferner an, daß die bisherigen Bogen A, B einander gleich ſind; ſo findet man für $A=B$ auch $\text{Sin}A=\text{Sin}B$ und $\text{Cos}A=\text{Cos}B$, daher iſt:

I. $\text{Sin}2A=2\,\text{Sin}A\,\text{Cosin}A$ (156. §. I.)

II. $\text{Cosin}2A=\text{Cos}A^2-\text{Sin}A^2$ (156. §. II.).

Wenn man zu II. die Form. 1) aus (154. §. IV.) addirt; ſo wird ſeyn:

$1+\text{Cos}2A=2\,\text{Cos}A^2$: alſo $1+\text{Cos}2B=2\,\text{Cos}B^2$,

daher

III. $\text{Cos}A^2\text{Cos}B^2=\frac{1+\text{Cos}2B+\text{Cos}2A+\text{Cos}2A\text{Cos}2B}{4}$.

Wenn man aber II. von 1) in (154. §. IV.) abziehet; ſo iſt:

$1-\text{Cos}2A=2\,\text{Sin}A^2$: alſo $1-\text{Cos}2B=2\,\text{Sin}B^2$.

daher

IV. $\text{Sin}A^2\text{Sin}B^2=\frac{1-\text{Cos}2A-\text{Cos}2B+\text{Cos}2A\text{Cos}2B}{4}$.

V. $\text{Sin}A^2\text{Cos}B^2=\frac{1-\text{Cos}2A+\text{Cos}2B-\text{Cos}2A\text{Cos}2B}{4}$ aus $\frac{\text{III}}{\text{IV}}$.

Verwechſelt man die Buchſtaben; ſo iſt:

VI. $\text{Sin}B^2\text{Cof}A^2 = \frac{1-\text{Cof}2B+\text{Cof}2A-\text{Cof}2B\,\text{Cof}2A}{4}$.

VII. $\text{Cof}A^2\text{Cof}B^2-\text{Sin}A^2\text{Sin}B^2 = \frac{\text{Cof}2A+\text{Cof}2B}{2}$ aus $\frac{\text{III}}{\text{IV}}$.

VIII. $\text{Sin}A^2\text{Cof}B^2-\text{Sin}B^2\text{Cof}A^2 = \frac{\text{Cof}2B-\text{Cof}2A}{2}$ aus $\frac{\text{V}}{\text{VI}}$.

Für A = B iſt auch:

IX. $\text{Tang}2A = \frac{2\,\text{Tang}A}{1-\text{Tang}A^2}$ aus (1. Zuſ. XV.).

X. $\text{Cot}2A = \frac{1-\text{Tang}A^2}{2\,\text{Tang}A}$ aus (1. Zuſ. XVI.).

XI. $\text{Sin}2A = \frac{2\,\text{Tang}A}{1+\text{Tang}A^2} = \frac{2\,\text{Sin}A^2}{\text{Tang}A}$ aus I. und (154. §. IV. 13. 14.).

XII. $\text{Cof}2A = \frac{1-\text{Tang}A^2}{1+\text{Tang}A^2}$ aus II. u. (154. §. IV. 13, 14.).

Alſo:

XIII. $\text{Tang}A = \sqrt{\frac{1-\text{Cof}2A}{1+\text{Cof}2A}}$.

XIV. $\frac{\text{Sin}2A}{\text{Sin}A} = 2\,\text{Cof}A$ aus I. alſo

$\frac{\text{Sin}2A\,\text{Cof}A}{\text{Sin}A} = 2\,\text{Cof}A^2$, oder (154. §. IV.)

$\text{Sin}2A\,\text{Cot}A = \frac{\text{Sin}2A}{\text{Tang}A} = 2\,\text{Coſin}A^2$.

und $\text{Cot}A = \frac{2\,\text{Coſin}A^2}{\text{Sin}2A}$.

Wegen $\text{Cot } 2A = \frac{\text{Cosin } 2A}{\text{Sin } 2A}$ (154. §. IV.) ist daher

XV. $\text{Cot } A - \text{Cot } 2A = \frac{2\,\text{Cos } A^2 - \text{Cos } 2A}{\text{Sin } 2A} =$

$= \frac{2\,\text{Cos } A^2 - \text{Cos } A^2 + \text{Sin } A^2}{\text{Sin } 2A}$ aus II. $=$

$= \frac{\text{Cos } A^2 + \text{Sin } A^2}{\text{Sin } 2A} = \frac{1}{\text{Sin } 2A} = \text{Cosec } 2A$

(154. §. IV.).

Wenn man $1 = \text{Sin } A^2 + \text{Cos } A^2$ (154. §. IV.) zur Gleichung I. addirt, oder diese von jener abziehet; so ist im ersten Fall:

$1 + \text{Sin } 2A = \text{Sin } A^2 + 2\,\text{Sin } A\,\text{Cos } A + \text{Cos } A^2$

$= (\text{Sin } A + \text{Cosin } A)^2;$

und im zweyten Fall ist

$1 - \text{Sin } 2A = \text{Sin } A^2 - 2\,\text{Sin } A\,\text{Cos } A + \text{Cos } A^2$

$= (\text{Sin } A - \text{Cosin } A)^2:$

also $\frac{1 + \text{Sin } 2A}{1 - \text{Sin } 2A} = \frac{(\text{Sin } A + \text{Cosin } A)^2}{(\text{Sin } A - \text{Cosin } A)^2}$,

und $\pm\sqrt{\frac{1 + \text{Sin } 2A}{1 - \text{Sin } 2A}} = \pm\frac{\text{Sin } A + \text{Cos } A}{\text{Sin } A - \text{Cos } A}$

$= \frac{\text{Cos } A + \text{Sin } A}{\mp\text{Cos } A \pm \text{Sin } A} = \frac{1 + \frac{\text{Sin } A}{\text{Cos } A}}{\mp 1 \pm \frac{\text{Sin } A}{\text{Cos } A}} = \frac{\frac{\text{Cos } A}{\text{Sin } A} + 1}{\mp\frac{\text{Cos } A}{\text{Sin } A} \pm 1}.$

Wegen $\text{Tang } A = \frac{\text{Sin } A}{\text{Cos } A}$; und $\text{Cot } A = \frac{\text{Cos } A}{\text{Sin } A}$

(154. §. IV.) erhält man hieraus folgende Formuln.

XVI.

XVI. $\pm\sqrt{\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}}=\frac{1+\tan A}{\pm\tan A\mp 1}$,

XVII. $\pm\sqrt{\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}}=\frac{\cot A+1}{\mp\cot A\pm 1}$.

Nimmt man Tang A aus XI. und Cot A aus XIV; so findet man:

XVIII. $\tan A+\cot A=\frac{2(\sin A^2+\cos A^2)}{\sin 2A}=\frac{2}{\sin 2A}$.

XIX. $\cot A-\tan A=\frac{2(\cos A^2-\sin A^2)}{\sin 2A}=$

$=\frac{2\cos 2A}{\sin 2A}$ nach II. $=2\cot 2A$ (154. §. IV.).

Aus XVI. und 2. Zuſ. V. folgt:

XX. $\tan(45°+B)=\sqrt{\frac{1+\sin 2B}{1-\sin 2B}}$.

Aus I.

XXI. $\sin 2A+\sin 2B=2\sin A\cos A+2\sin B\cos B$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)$ nach (1. Zuſ. XXI.).

Aus I.

XXII. $\sin 2A-\sin 2B=2\sin A\cos A-2\sin B\cos B$

$=2\sin(A-B)\cos(A+B)$ nach (1. Zuſ. XXII.).

Aus VIII. und 1. Zuſ. XXIII.

XXIII. $2\sin(A+B)\sin(A-B)=\cos 2B-\cos 2A$.

Aus VII. und 1. Zuſ. XXIV.

XXIV. $2\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos 2A+\cos 2B$.

5. Zuſatz.

Die vier letzten Formuln in (4. Zuſ.) verwandeln ſich für $\frac{1}{2}A$ und $\frac{1}{2}B$ ſtatt A und B in folgende:

I. $\text{Sin}\,A+\text{Sin}\,B=2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(A+B)\,\text{Cof}\,\frac{1}{2}(A-B)$.

II. $\text{Sin}\,A-\text{Sin}\,B=2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(A-B)\,\text{Cof}\,\frac{1}{2}(A+B)$.

III. $\text{Cof}\,B-\text{Cof}\,A=2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(A+B)\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(A-B)$.

IV. $\text{Cof}\,A+\text{Cof}\,B=2\,\text{Cof}\,\frac{1}{2}(A+B)\,\text{Cof}\,\frac{1}{2}(A-B)$.

Alſo iſt auch nach (154. §. IV.)

V. $\frac{\text{Sin}\,A+\text{Sin}\,B}{\text{Cof}\,A+\text{Cof}\,B}=\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A+B)$ aus $\frac{\text{I}}{\text{IV}}$.

VI. $\frac{\text{Sin}\,A-\text{Sin}\,B}{\text{Cof}\,A+\text{Cof}\,B}=\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)$ aus $\frac{\text{II}}{\text{IV}}$.

VII. $\frac{\text{Sin}\,A-\text{Sin}\,B}{\text{Cof}\,B-\text{Cof}\,A}=\text{Cot}\,\frac{1}{2}(A+B)$ aus $\frac{\text{II}}{\text{III}}$.

VIII. $\frac{\text{Sin}\,A+\text{Sin}\,B}{\text{Cof}\,B-\text{Cof}\,A}=\text{Cot}\,\frac{1}{2}(A-B)$ aus $\frac{\text{I}}{\text{III}}$.

IX. $\frac{\text{Cof}\,B-\text{Cof}\,A}{\text{Cof}\,A+\text{Cof}\,B}=\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A+B)\,\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)$ aus $\frac{\text{III}}{\text{IV}}$.

X. $\frac{\text{Sin}\,A-\text{Sin}\,B}{\text{Sin}\,A+\text{Sin}\,B}=\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)\,\text{Cot}\,\frac{1}{2}(A+B)$ aus $\frac{\text{I}}{\text{II}}$.

XI. $\frac{\text{Sin}\,A+\text{Sin}\,B}{\text{Sin}\,A-\text{Sin}\,B}=\frac{\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A+B)}{\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)}$ aus $\frac{\text{V}}{\text{VI}}$.

XII. $\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A+B)+\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)=\frac{2\,\text{Sin}\,A}{\text{Cof}\,A+\text{Cof}\,B}$ aus $\frac{\text{V}}{\text{VI}}$.

XIII. $\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A+B)-\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)=\frac{2\,\text{Sin}\,B}{\text{Cof}\,A+\text{Cof}\,B}$ aus $\frac{\text{V}}{\text{VI}}$.

Setzt man $90°-B$ ſtatt B in I. II.; ſo erhält man wegen (154. §. XI.):

XIV. $\text{Sin}\,A+\text{Cos}\,B=2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(A-B+90°)\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B-90°)$.

XV. $\text{Sin}\,A-\text{Cos}\,B=2\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A-B+90°)\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(A+B-90°)$.

6. Zuſatz.

4. Fig. Wegen (155. §.) iſt in jedem Dreyecke (4. Fig.) $a:b=\text{Sin}\,A:\text{Sin}\,B$; alſo auch $\text{Sin}\,A+\text{Sin}\,B:\text{Sin}\,B=a+b:b$ und $\text{Sin}\,A-\text{Sin}\,B=a-b:b$, daher erhält man $a+b:a-b=\text{Sin}\,A+\text{Sin}\,B:\text{Sin}\,A-\text{Sin}\,B=\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A+B):\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)$ nach (5. Zuſ. XI). **Die Summe zwoer Seiten in einem Dreyecke, verhält ſich daher zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der ihnen gegenüberſtehenden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.**

7. Zuſatz.

Für $\frac{1}{2}A$ ſtatt A findet man:

I. $1-\text{Cos}\,A=2(\text{Sin}\,\frac{1}{2}A)^2$ in (4. Zuſ. III.)

daher $\text{Sin}\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,A}{2}}$,

II. $1+\text{Cos}\,A=2(\text{Cos}\,\frac{1}{2}A)^2$ in (4. Zuſ. II.).

daher $\text{Cos}\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\text{Cos}\,A}{2}}$.

Alſo nach (154. §. IV.)

III. $(\text{Tang}\,\frac{1}{2}A)^2=\frac{(\text{Sin}\,\frac{1}{2}A)^2}{(\text{Cos}\,\frac{1}{2}A)^2}=\frac{1-\text{Cos}\,A}{1+\text{Cos}\,A}$.

IV. $(\text{Sin}\,\frac{1}{2}A)^2(\text{Cos}\,\frac{1}{2}A)^2=\frac{1-\text{Cos}\,A^2}{4}$ aus I. II. $=\frac{\text{Sin}\,A^2}{4}$,

daher $\text{Sin}\,A=2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}A\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}A$.

Dieſes wäre daher eine Reihe, welche zur Berechnung der halben Kreislinie π dienen ſollte, nur müßte man $\sqrt{3}$ in vielen Decimalſtellen beſtimmen.

Etwas bequemer wird die Reihe ſeyn, welche aus der Tangente des halbrechten Winkels folgt. Denn für $m = 1$ und $n = 2$ iſt $\frac{m\pi}{n} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$: weil alſo Tang $45^\circ = 1$ ſeyn muß; ſo findet man für $m = 1$, $n = 2$ aus der obigen Gleichung III) folgende:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{2^2 \cdot 3^2-1} + \frac{2}{2^2 \cdot 5^2-1} + \frac{2}{2^2 \cdot 7^2-1} + \frac{2}{2^2 \cdot 9^2-1} + \ldots$$

daher

$$\pi = 8\left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 5^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 7^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 9^2-1} + \ldots + \frac{1}{2^2(2i-1)^2-1}\right).$$

Anmerkung des Herausgebers.

Die Reihe welche zur Berechnung der halben Kreislinie π Herr Euler [a] angiebt, nähert ſich ſchneller; man findet ſie auch beym Hrn. Hofr. Käſtner [b], Hr. H. Karſten [c] und Hrn. Klügel [d], und noch artiger eingerichtet beym Hrn. Vega [e]: ich will den Werth von π, wie ihn Hr. Euler angiebt (a. a. O. 126. §.) herſetzen.

XIII. $\text{Cos}(45° + \frac{1}{2}A) = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}(90° + A)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \text{Sin}\,A}{2}}$.

Aus VII. und (154. §. IV.) ist:

$$\text{Cosec}\,A + \text{Cot}\,A = \frac{1}{\text{Tang}\,\frac{1}{2}A}: \text{ also}$$

XIV. $$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{\text{Cosec}\,A + \text{Cot}\,A} =$$

$$= \frac{\text{Cosec}\,A - \text{Cot}\,A}{\text{Cosec}\,A^2 - \text{Cot}\,A^2} = \text{Cosec}\,A - \text{Cot}\,A =$$

$$= \sqrt{(1 + \text{Cot}\,A^2)} - \text{Cot}\,A.$$

Es war in VII. $\text{Cosec}\,A + \text{Cot}\,A = \text{Cot}\,\frac{1}{2}A$, und nun war $\text{Cosec}\,A - \text{Cot}\,A = \text{Tang}\,\frac{1}{2}A$; addirt man diese Gleichung zu jener; so findet man XV. und ziehet man sie von jener ab; so entstehet XVI.

XV. $\text{Tang}\,\frac{1}{2}A + \text{Cot}\,\frac{1}{2}A = 2\,\text{Cosec}\,A$.

XVI. $\text{Cot}\,\frac{1}{2}A - \text{Tang}\,\frac{1}{2}A = 2\,\text{Cot}\,A$.

157. §. Aufgabe.

Wenn φ ein Kreisbogen, und $n\varphi$ ein vielfacher Bogen ist; die Reihen zu bestimmen, welche den Sinus und Cosinus des vielfachen Bogens $n\varphi$, durch den Sinus und Cosinus des einfachen φ, ausdrücken sollen.

Auflösung. I) Wenn man bey den Formuln I. II. in (156. §.) $A = n\varphi$ und $B = \varphi$ machet; so erhält man:

1) $\text{Sin}(n+1)\varphi = \text{Sin}\,n\varphi . \text{Cos}\,\varphi + \text{Sin}\,\varphi . \text{Cos}\,n\varphi$.

2) $\text{Cos}(n+1)\varphi = \text{Cos}\,n\varphi . \text{Cos}\,\varphi - \text{Sin}\,\varphi . \text{Sin}\,n\varphi$.

II) Wenn

II) Wenn man nun bey diesen Formuln $n=0, n=1, n=2, n=3$, u. s. f., und $\mathrm{Sin}\,\varphi=x$, $\mathrm{Cos}\,\varphi=y$ setzt; so entstehen daraus folgende Ausdrückungen für die Sinus und Cosinus vielfacher Bogen.

$\mathrm{Sin}\,0\,\varphi=0.$	$\mathrm{Cos}\,0\,\varphi=1.$
$\mathrm{Sin}\,\varphi=x.$	$\mathrm{Cos}\,\varphi=y.$
$\mathrm{Sin}\,2\,\varphi=2xy.$	$\mathrm{Cos}\,2\,\varphi=y^2-x^2.$
$\mathrm{Sin}\,3\,\varphi=3xy^2-x^3.$	$\mathrm{Cos}\,3\,\varphi=y^3-3x^2y.$
$\mathrm{Sin}\,4\,\varphi=4xy^3-4x^3y.$	$\mathrm{Cos}\,4\,\varphi=y^4-6x^2y^2+x^4.$
$\mathrm{Sin}\,5\,\varphi=5xy^4-10x^3y^2+x^5.$	$\mathrm{Cos}\,5\,\varphi=y^5-10x^2y^3+5x^4y.$

III) Daher kann man $\mathrm{Sin}\,5\,\varphi$ und $\mathrm{Cos}\,5\,\varphi$ auch so ausdrücken:

$$\mathrm{Sin}\,5\varphi=5xy^{5-1}-\frac{5(5-1)(5-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3y^{5-3}+\frac{5(5-1)\cdots(5-4)}{1\cdot 2\cdots\cdots 5}x^5y^{5-5}.$$

$$\mathrm{Cos}\,5\varphi=y^5-\frac{5(5-1)}{1\cdot 2}x^2y^{5-2}+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4y^{5-4}.$$

Und es ist das Gesetz einleuchtend, nach welchem sich die Potenzen von x, y nebst ihren Coefficienten bestimmen lassen, welches Gesetz ferner auch für $\mathrm{Sin}\,4\,\varphi$; $\mathrm{Cos}\,4\,\varphi$; $\mathrm{Sin}\,3\,\varphi$; $\mathrm{Cos}\,3\,\varphi$; $\mathrm{Sin}\,2\,\varphi$; $\mathrm{Cos}\,2\,\varphi$ in II) gewiß gielt. Wäre dieses Gesetz für jedes vielfachen Bogens $n\varphi$ Sinus und Cosinus richtig; so würde man $\mathrm{Sin}\,n\varphi$ und $\mathrm{Cos}\,n\varphi$ so angeben müssen.

$$\text{Sin } n\varphi = nxy^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3y^{n-3}$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{1\cdot 2\cdots 5}x^5y^{n-5}$$
$$- \frac{n(n-1)\cdots(n-6)}{1\cdot 2\cdots 7}x^7y^{n-7} + \cdots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\cdots(n-2r)}{1\cdot 2\cdots(2r+1)}x^{2r+1}y^{n-(2r+1)}$$

$$\text{Cos } n\varphi = y^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2y^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4y^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-1)\cdots(n-5)}{1\cdot 2\cdots 6}x^6y^{n-6} + \cdots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\cdots(n-(2r-1))}{1\cdot 2\cdots 2r}x^{2r}y^{n-2r}.$$

Das allgemeine Glied jeder Formul muß nämlich (+) oder (—) vor sich haben, nachdem r gerad oder ungerad ist, und es ist r allemahl eine Zahl, welche so viel Einheiten hat, als Glieder vorausgehen.

Weil nun das hier zu Grunde liegende Gesetz für die Sinus und Cosinus der doppelten, dreyfachen, vierfachen und fünffachen Bogen 2φ, 3φ, 4φ, 5φ wirklich gielt; so wird dasselbe wegen (54. §.) auch für den Sinus und Cosinus jedes nfachen Bogens $n\varphi$ gelten, sobald es gewiß seyn wird, daß, wenn jenes Gesetz von einem nfachen Bogen wahr wäre, es auch von dem $(n+1)$fachen wahr seyn müßte, und dieses kann auf die folgende Art dargethan werden.

IV. Wenn

$$\text{Tang}\frac{m}{n}90^\circ = \frac{4}{\pi} + \frac{mn}{n^2-m^2}$$

$$+\frac{m}{n}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$+\frac{m^3}{n^3}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

I) $$+\frac{m^5}{n^5}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$+\frac{m^7}{n^7}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$+ \text{- - - - - - - - - - - -}$$

$$\text{- - - - - - - - - - - -}$$

$$+\frac{m^{2r-1}}{n^{2r-1}}\left(\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{5^{2r}}+\frac{1}{7^{2r}}+\frac{1}{9^{2r}}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$\text{Cot}\frac{m}{n}90^\circ = \frac{n}{m} + \frac{2}{\pi} - \frac{mn}{4n^2-m^2}\cdot\frac{4}{\pi}$$

$$-\frac{m}{n.2^2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$-\frac{m^3}{n^3.2^4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

II) $$-\frac{m^5}{n^5.2^6}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$-\frac{m^7}{n^7.2^8}\left(\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$- \text{- - - - - - - - - - - -}$$

$$\text{- - - - - - - - - - - -}$$

$$-\frac{m^{2r-1}}{n^{2r-1}.2^{2r}}\left(\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{4^{2r}}+\frac{1}{5^{2r}}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

4) $\mathrm{Sin}\, n\varphi \mathrm{Sin}\, \varphi = x \mathrm{Sin}\, n\varphi =$

$$= nx^2y^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^4y^{n-3}$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{1\cdot 2\cdots 5}x^6y^{n-5}$$
$$- \frac{n(n-1)\cdots(n-6)}{1\cdot 2\cdots 7}x^8y^{n-7} + \cdots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\cdots(n-2r+2)}{1\cdot 2\cdots(2r-1)}x^{2r}y^{n-2r+1}.$$

Addirt man nun 2) zu 1); ſo giebt die Summe $\mathrm{Sin}\, n\varphi \mathrm{Cof}\, \varphi + \mathrm{Cof}\, n\varphi \mathrm{Sin}\, \varphi = \mathrm{Sin}\,(n+1)\varphi$ nach I): zieht man 4) von 3) ab; ſo giebt die Differenz $\mathrm{Cof}\, n\varphi \mathrm{Cof}\varphi - \mathrm{Sin}\, n\varphi \mathrm{Sin}\, \varphi = \mathrm{Cof}(n+1)\varphi$ nach I): alſo folgt 5) aus 2.1) und 6) aus 4.3).

5) $\mathrm{Sin}(n+1)\varphi = (n+1)xy^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3y^{n-2}$
$$+ \cdots \pm \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-2r+1)}{1\cdot 2\cdots(2r+1)}x^{2r+1}y^{n-2r}.$$

6) $\mathrm{Cof}(n+1)\varphi = y^{n+1} - \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}x^2y^{n-1} + \cdots$
$$\cdots \pm \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-2r+2)}{1\cdot 2\cdots 2r}x^{2r}y^{n-2r+1}.$$

Um ſich zu überzeugen, daß 5) die wahre Summe von 1.2) iſt, darf man nur die allgemeinen Glieder von 1.2) addiren, und ſehen, ob ihre Summe das allgemeine Glied von 5) iſt: dem zufolge ſey:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-2r+1)}{1\cdot 2\cdots 2r} = P(n,2);$$

ſo

so ist $\frac{n(n-1)\cdots(n-2r)}{1\cdot 2\cdots(2r+1)} = \frac{P(n-2r)}{2r+1}$ in 1):

also $P + \frac{P(n-2r)}{2r+1} = \frac{(n+1)P}{2r+1} =$

$= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-2r+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots 2r(2r+1)}$ in 5).

So kann man sich auch davon überzeugen, daß 6) die wahre Differenz der Reihe 4) von 3) ist.

Da also 5) 6) aus den Formuln II) entstehen, wenn man bey ihnen überall $n+1$ statt n setzt; so erhellet aus 5) 6), daß $\mathrm{Sin}(n+1)\varphi$; $\mathrm{Cof}(n+1)\varphi$ eben dem Gesetze, welchem $\mathrm{Sin}\, n\varphi$; $\mathrm{Cof}\, n\varphi$, unterliegen.

158. §. Aufgabe.

Den Sinus und Cosinus eines gegebenen Bogens $=\psi$ durch den Bogen auszudrücken.

Auflösung. 1) Wie immer auch der Bogen ψ groß seyn mag; so ist doch allemahl möglich, eine Zahl n und einen Bogen φ so zu nehmen, daß $n\varphi = \psi$, daher auch $n = \frac{\psi}{\varphi}$ seyn mag, und dann ist $\mathrm{Sin}\, n\varphi = \mathrm{Sin}\, \psi$, $\mathrm{Cof}\, n\varphi = \mathrm{Cof}\, \psi$: aus (157. §.) würde man also die Reihen für $\mathrm{Sin}\, \psi$ und $\mathrm{Cof}\, \psi$ finden, wenn man bey den dortigen Reihen $\mathrm{Sin}\, n\varphi = \cdots$ und $\mathrm{Cof}\, n\varphi = \cdots$ überall $n = \frac{\psi}{\varphi}$ nähme: ich will aber dieses nur bey ihren allgemeinen Gliedern thun, um zu erhalten:

I) Das allgemeine Glied der Reihe für Sin ψ.

$$\frac{\pm\frac{\psi}{\varphi}\left(\frac{\psi}{\varphi}-1\right)\left(\frac{\psi}{\varphi}-2\right)\left(\frac{\psi}{\varphi}-3\right)\cdots\left(\frac{\psi}{\varphi}-2r\right)x^{2r+1}y^{n-(2r+1)}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots(2r+1)}$$

oder:

$$\frac{\pm\psi(\psi-\varphi)(\psi-2\varphi)\cdots\cdots(\psi-2r\varphi)x^{2r+1}y^{n-(2r+1)}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots(2r+1)\varphi^{2r+1}}$$

oder auch:

$$\frac{\pm\psi^{2r+1}+Z\varphi}{1\cdot2\cdot3\cdots(2r+1)}\cdot\frac{x^{2r+1}y^{n-(2r+1)}}{\varphi^{2r+1}}=\alpha.$$

II) Das allgemeine Glied der Reihe für Col ψ.

$$\frac{\pm\frac{\psi}{\varphi}\left(\frac{\psi}{\varphi}-1\right)\left(\frac{\psi}{\varphi}-2\right)\left(\frac{\psi}{\varphi}-3\right)\cdots\left(\frac{\psi}{\varphi}-(2r-1)\right)x^{2r}y^{n-2r}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots\cdots2r}$$

oder:

$$\frac{\pm\psi(\psi-\varphi)(\psi-2\varphi)(\psi-3\varphi)\cdots(\psi-(2r-1)\varphi)x^{2r}y^{n-2r}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots\cdots2r\cdot\varphi^{2r}}$$

oder auch:

$$\frac{\pm\psi^{2r}+Y\varphi}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots2r}\cdot\frac{x^{2r}y^{n-2r}}{\varphi^{2r}}=\beta.$$

Daß übrigens die allgemeinen Glieder in I. II. unter den Formen α; β vorkommen müssen, dieses ist einleuchtend genug.

2) Nun gelten die Formuln α; β in (n. 1.) allemahl, wie immer man auch φ klein annehmen mag, wenn nur zugleich n gröſſer wird, damit noch allemahl $n=\frac{\psi}{\varphi}$ bleiben mag: ſie werden alſo auch alsdann richtig bleiben, wenn man

(a) Introd. in Analyſ. Infin. P. I. Cap. VIII.
(b) Daſelbſt Cap. XI.
(c) Daſelbſt Cap. X.
(d) Opuſcula Analytica, und Inſtit. calculi Differ.
(e) Ioann. Bernoulli Opp. und Iacob. Bernoulli de Seriebus Infinitis.
(f) Verſuch einer neuen Summationsmethode.

160. §. Aufgabe.

Die Reihen für den Sinus und Coſinus eines Bogens ψ (158. §.) in Factoren zu zerfällen.

Auflöſung. 1) Wenn man vorausſetzt, daß in (158. §.) Sin $\psi = 0$ und Cof $\psi = 0$ wird; ſo erhält man:

$$\text{I)}\quad \psi\left(1 - \frac{\psi^2}{1.2.3} + \frac{\psi^4}{1.2\cdots5} - \frac{\psi^6}{1.2\cdots7} + \frac{\psi^8}{1.2\cdots9} - \cdots\right) = 0$$

$$\text{II)}\quad 1 - \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} - \frac{\psi^6}{1.2\cdots6} + \frac{\psi^8}{1.2\cdots8} - \cdots = 0$$

2) Daß dieſe Gleichungen ihre Wurzeln haben müſſen, iſt gewiß (94. §.), und es iſt zugleich einleuchtend, daß dieſe Wurzeln nichts anders ſeyn können, als diejenigen Kreisbogen ψ, für welche Sin $\psi = 0$, oder Cof $\psi = 0$ wird: wenn es alſo ausgemacht werden ſoll, ob, und was für mögliche Wurzeln dieſelben Gleichungen haben; ſo muß entſchieden werden, ob es, und was für mögliche Kreisbogen es giebt, für welche die ihnen zugehörigen Sinus und Coſinus gleich Null werden.

3) Da

$$\text{Col}\,\psi = 1 - \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} - \frac{\psi^6}{1.2\text{----}.6}$$
$$+ \frac{\psi^8}{1.2\text{-----}8} - \frac{\psi^{10}}{1.2\text{-------}10} + \text{- - -}$$
$$\text{-------} \frac{\pm\psi^{2r}}{1.2\text{-----}2r}.$$

1. Zusatz.

Die Coefficienten bey $\text{Col}\,\psi$ bezeichne man mit α, β, γ, δ---; so ist wegen $\text{Tang}\,\psi = \frac{\text{Sin}\,\psi}{\text{Col}\,\psi}$ nach (154. §. IV.)

$$\text{Tang}\,\psi = \psi - \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^5}{1.2\text{---}5} - \frac{\psi^7}{1.2\text{----}7} + \text{----}$$
$$\overline{1 - \alpha\psi^2 + \beta\psi^4 - \gamma\psi^6 + \text{----}}$$

Da nun die Form, welche dieser Quotient erhalten würde, wenn man den Zähler durch den Nenner wirklich dividirte, einleuchtend ist; so kann man diesen Quotient, oder $\text{Tang}\,\psi = \psi + A\psi^3 + B\psi^5 + C\psi^7 + D\psi^9 + \text{---}$ setzen, und wenn man diese Reihe durch den Nenner $1 - \alpha\psi^2 + \beta\psi^4 - \text{----}$ multiplicirt; so wird das Product dem Zähler gleich seyn, und aus dieser Gleichung werden leicht die noch unbestimmten Coefficienten A, B, C--- nach (83. §. Zus.), wie (131. §.) gefunden. Setzt man endlich die herausgebrachten Werthe von A, B, C---- in $\text{Tang}\,\psi = \psi + A\psi^3 + B\psi^5 + \text{- - -}$; so findet man die nachstehende Reihe, welche die Tangente eines Bogens ψ durch den Bogen selbst ausdrückt:

Tang

$$\text{Tang}\,\psi = \psi + \frac{\psi^3}{1\cdot 3} + \frac{2\psi^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{17\psi^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{2\cdot 31\psi^9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \cdots$$

2. Zusatz.

Es ist ferner $\text{Cot}\,\psi = \frac{\text{Cos}\,\psi}{\text{Sin}\,\psi}$ nach (154. §. IV.); also ist:

$$\text{Cot}\,\psi = \frac{1 - \frac{\psi^2}{1\cdot 2} + \frac{\psi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\psi^6}{1\cdot 2\cdots 6} + \cdots}{\psi - \frac{\psi^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\psi^5}{1\cdot 2\cdots 5} - \frac{\psi^7}{1\cdot 2\cdots 7} + \cdots}$$

Daß man aber diesen Bruch, daher auch $\text{Cot}\,\psi = \psi^{-1} + A\psi + B\psi^3 + C\psi^5 + \cdots$ setzen kann, ist klar, und wenn man es wirklich thut; so findet man nach (131. §.) die demselben Bruche gleichgültige Reihe

$$\text{Cot}\,\psi = \frac{1}{\psi} - \frac{\psi}{3} - \frac{\psi^3}{3\cdot 5\cdot 3} - \frac{2\psi^5}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \frac{\psi^7}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 5} - \cdots$$

159. §. Aufgabe.

Die Reihen für den Sinus und Cosinus, die Tangente und Cotangente eines Bogens, so zu bestimmen, daß sie zur bequemen Berechnung derselben Linien dienen mögen.

Auflösung. 1) Man kann jeden Bogen $\psi = \frac{m}{2n}\pi$ oder $\psi = \frac{m}{n}90^\circ$ setzen, wegen $\pi = 180^\circ$; denn es

wird

wird nun möglich seyn, die Zahlen m, n allemahl so zu bestimmen, daß $\frac{m}{n} 90°$ jedem gegebenen Bogen gleich sey.

Z. B. Soll $\psi = 2°$ seyn; so setze man $\frac{m}{n} 90° = 2°$, daher $\frac{m}{n} = \frac{1}{45}$, und nun $m = 1$, $n = 45$: oder, wenn es nöthig wäre, könnte man den Zähler und Nenner mit jeder Zahl z multipliciren, folglich $\frac{m}{n} = \frac{z}{45.z}$, daher $m = z$, $n = 45.z$ nehmen.

2) Wenn man aber $\frac{m}{2n}\pi$ oder $\frac{m}{n} 90°$ statt ψ in den Formeln (158. §.) setzt; so erhält man.

I. $\text{Sin}\frac{m}{n}90° = \frac{m\pi}{2n} - \frac{m^3\pi^3}{2.3.2^3.n^3} + \frac{m^5\pi^5}{2.3.4.5.2^5.n^5} - \cdots$

II. $\text{Cos}\frac{m}{n}90° = 1 - \frac{m^2\pi^2}{2.2^2.n^2} + \frac{m^4\pi^4}{2.3.4.2^4.n^4} - \frac{m^6\pi^6}{2.3.4.5.6.2^6.n^6} + \cdots$

Dergleichen Reihen könnte man nun auch für die Tangente und Cotangente aus (158. §. Zus.) herleiten; sie würden aber nicht schnell genug abnehmen; ich will also andere Reihen für diese trigonometrischen Linien hersetzen.

3) Sey eine Gleichung $1 - \frac{x}{A} + Bx^3 - Cx^5 + \cdots \pm Zx^n = 0$ von was immer für einem Grade gegeben, und ihre Wurzeln heißen a, b, c, d ---- q: will man nun den Werth von $\frac{1}{A}$ bey dieser Gleichung wissen; so kann man ihn so bestimmen.

Man

Man ſetze $x = \frac{1}{y}$; ſo giebt die Gleichung folgende:

$$1 - \frac{1}{Ay} + \frac{B}{y^3} - \frac{C}{y^5} + \cdots \pm \frac{Z}{y^n} = 0$$

oder $y^n - \frac{1}{A} y^{n-1} + By^{n-3} - Cy^{n-5} + \cdots \pm Z = 0$.

Bey dieſer Gleichung muß aber $-\frac{1}{A}$ die Summe aller Wurzeln mit entgegengeſetztem Zeichen ſeyn (98. §.); da alſo $x = \frac{1}{y}$ folglich $y = \frac{1}{x}$ war; ſo geben die Wurzeln a, b, c ... q der vorigen Gleichung eben ſo viele Wurzeln $\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c} \cdots \frac{1}{q}$ für dieſe Gleichung, daher iſt

$$-\frac{1}{A} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \cdots + \frac{1}{q}$$

4) Man dividire nun die Formul für Sin ψ in (158. §.) durch Sin ψ, und bringe alles, was rechter Hand des Gleichheitszeichens ſtehet auf die linke Seite; ſo wird man folgende Gleichung erhalten:

$$1 - \frac{\psi}{\text{Sin } \psi} + \frac{\psi^3}{2,3.\text{Sin } \psi} - \frac{\psi^5}{2 \cdots 5.\text{Sin } \psi} + \cdots = 0.$$

Da nun dieſe Gleichung für jeden Bogen ψ und den zugehörigen Sinus beſtehen muß, und, wenn man $A = \psi = \frac{m}{n}\pi$ machet, einerley Sinus, wegen (154. §. XIII. n. 4.) zu jedem Bogen in der Reihe α) oder β) gehört; ſo muß offenbar auch dieſe Gleichung allemahl beſtehen, man mag ſtatt ψ was immer für einen Bogen aus

der

der Reihe β) nehmen, folglich sind in der Reihe β) alle Wurzeln derselben Gleichung vorhanden (94. §.).

α) $A;\ \pi - A;\ 2\pi + A;\ 3\pi - A;\ 4\pi + A \ldots$
$-(\pi + A);\ -(2\pi - A);\ -(3\pi + A);\ -(4\pi - A) \ldots$

β) $\frac{m}{n}\pi;\ \frac{(n-m)\pi}{n};\ \frac{(2n+m)\pi}{n};\ \frac{(3n-m)\pi}{n} \ldots$
$-\frac{(n+m)\pi}{n};\ -\frac{(2n-m)\pi}{n};\ -\frac{(3n+m)\pi}{n} \ldots$

Es ist aber bey dieser Gleichung $\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\psi} = \mathrm{Cosec}\,\psi$ (154. §. IV.) das, was $\frac{1}{A}$ in (n. 3.) war: aus den Wurzeln β) findet man also nach (n. 3.)

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\psi} = \mathrm{Cosec}\,\psi = \frac{n}{m\pi} + \frac{n}{(n-m)\pi} + \frac{n}{(n+m)\pi} - \frac{n}{(2n-m)\pi} + \frac{n}{(2n+m)\pi} \ldots$$

und $\frac{\pi}{n}\,\mathrm{Cosec}\,\frac{m\pi}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} \ldots$

5) Wenn man ferner die Gleichung für Tang. ψ in (158. §. 1. Zus.) mit $\mathrm{Cot}\,\psi$ multiplicirt, hierauf $\mathrm{Tang}\,\psi \cdot \mathrm{Cot}\,\psi = 1$ setzt (154. §. IV.), und alle Glieder von der rechten Seite auf die linke bringet; so erhält man folgende Gleichung:

$$1 - \mathrm{Cot}\,\psi \cdot \psi - \frac{\mathrm{Cot}\,\psi}{3} \cdot \psi^3 - \frac{2\,\mathrm{Cot}\,\psi}{3 \cdot 5} \cdot \psi^5 - \ldots = 0$$

Setzt

Setzt man, wie oben, $\psi = A = \frac{m\pi}{n}$; so erhellet aus (154. §. XIII. n. 7.), daß Cot ψ zu jedem Bogen in der nachstehenden Reihe γ) gehört, folglich muß diese Gleichung allemahl statt haben, man mag in ihr für ψ was immer für einen Bogen aus der Reihe γ) nehmen, und so enthält diese Reihe alle Wurzeln derselben Gleichung.

$$\gamma)\ \frac{m\pi}{n};\ \frac{(n+m)\pi}{n};\ \frac{(2n+m)\pi}{n};\ \frac{(3n+m)\pi}{n};\ \frac{(4n+m)\pi}{n}\ \ldots\ldots$$
$$-\frac{(n-m)\pi}{n};\ -\frac{(2n-m)\pi}{n};\ -\frac{(3n-m)\pi}{n};\ -\frac{(4n-m)\pi}{n}\ \ldots\ldots$$

Da ferner Cot ψ bey dieser Gleichung das ist, was $\frac{1}{A}$ in (n. 3.) war, so geben die Wurzeln γ), nach (n. 3.) folgende Gleichung:

$$\text{Cot}\,\psi = \frac{n}{m\pi} - \frac{n}{(n-m)\pi} + \frac{n}{(n+m)\pi} - \frac{n}{(2n-m)\pi}$$
$$+ \frac{n}{(2n+m)\pi} - \frac{n}{(3n-m)\pi} + \ldots\ldots$$

oder
$$\frac{\pi}{n}\,\text{Cot}\,\frac{m\pi}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m}$$
$$+ \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \frac{1}{3n-m} - \ldots\ldots$$

6) Nun ist $\text{Cosec}\,\frac{m\pi}{n} - \text{Cot}\,\frac{m\pi}{n} = \text{Tang}\,\frac{m\pi}{2n}$ (156. §. 7. Zus. XIV.): wenn man also $\frac{\pi}{n}\,\text{Cot}\,\frac{m\pi}{n}$ in (n. 5.) von $\frac{\pi}{n}\,\text{Cosec}\,\frac{m\pi}{n}$ in (n. 4.) wirklich abziehet;

ſo findet man $\frac{\pi}{n}\,\mathrm{Tang}\,\frac{m\pi}{2n}$, und hieraus folgt durch die Multiplication mit n und Diviſion mit 4 die Gleichung III.

III. $$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{Tang}\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{mn}{n^2-m^2} + \frac{mn}{3^2\cdot n^2-m^2} + \frac{mn}{5^2\cdot n^2-m^2} + \frac{mn}{7^2\cdot n^2-m^2} + \ldots\ldots$$

Und wenn man 2n für n in der Formul (n. 5.) nimmt; ſo verwandelt ſie ſich in IV.

IV. $$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{Cot}\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{2m} - \frac{mn}{2^2\cdot n^2-m^2} - \frac{mn}{4^2\cdot n^2-m^2} - \frac{mn}{6^2\cdot n^2-m^2} - \frac{mn}{8^2\cdot n^2-m^2} - \ldots$$

1. Zuſatz.

Wäre $m=1$ und $n=3$; ſo wäre $\frac{m\pi}{2n} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$: da alſo $\mathrm{Tang}\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ iſt (154. §. XII.); ſo würde man für $m=1$, $n=3$ aus der Gleichung III) folgende erhalten:

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{3^2-1} + \frac{3}{3^2\cdot 3^2-1} + \frac{3}{3^2\cdot 5^2-1} + \frac{3}{3^2\cdot 7^2-1} + \frac{3}{3^2\cdot 9^2-1} + \ldots\ldots$$

Daher

$$\pi = 12\sqrt{3}\left(\frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{3^2\cdot 3^2-1} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2-1} + \frac{1}{3^2\cdot 7^2-1} + \frac{1}{3^2\cdot 9^2-1} + \ldots\right).$$

Dieſes

Dieſes wäre daher eine Reihe, welche zur Berechnung der halben Kreislinie π dienen ſollte, nur müßte man $\sqrt{3}$ in vielen Decimalſtellen beſtimmen.

Etwas bequemer wird die Reihe ſeyn, welche aus der Tangente des halbrechten Winkels folgt. Denn für $m = 1$ und $n = 2$ iſt $\frac{m\pi}{n} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$: weil alſo Tang $45^\circ = 1$ ſeyn muß; ſo findet man für $m = 1$, $n = 2$ aus der obigen Gleichung III) folgende:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{2^2 \cdot 3^2-1} + \frac{2}{2^2 \cdot 5^2-1} + \frac{2}{2^2 \cdot 7^2-1} + \frac{2}{2^2 \cdot 9^2-1} + \ldots$$

daher

$$\pi = 8\left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 5^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 7^2-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 9^2-1} + \ldots + \frac{1}{2^2(2i-1)^2-1}\right).$$

Anmerkung des Herausgebers.

Die Reihe welche zur Berechnung der halben Kreislinie π Herr Euler [a] angiebt, nähert ſich ſchneller; man findet ſie auch beym Hrn. Hofr. Käſtner [b], Hr. H. Karſten [c] und Hrn. Klügel [d], und noch artiger eingerichtet beym Hrn. Vega [e]: ich will den Werth von π, wie ihn Hr. Euler angiebt (a. a. O. §. 126.) herſetzen.

$$\pi = 3,14159265358979323846264$$
$$33832795028841971693993751$$
$$05820974944592307816406$$
$$28620899862803482534211$$
$$70679821480865132723066$$
$$0938446 + - - - - - - -$$

(a) Introd. in Analyſ. Infin. Tom. I. Cap. VIII. §. 142.
(b) Anfangsgr. der Analyſ. des Unendlichen. 308. §.
(c) Anfangsgr. der Mathem. Analyſ. III. Abſchn. 66. §.
(d) Analytiſche Trigon. 5. Kap. S. 141.
(e) Vorleſ. über die Mathem. II. B. IV. Vorleſ. 453. §.

2. Zuſatz.

Da nun der Werth von π bekannt iſt; ſo kann man denſelben ſtatt π in den bey der Auflöſung der vorhergehenden Aufgabe angeführten Formuln I. II.) nehmen, und dadurch würden ſich dieſelben Formuln nach gehöriger Reduction in folgende verwandeln:

$$\text{Sin}\frac{m}{n}90^\circ = \frac{m}{n} \cdot 1,570796326794896$$
$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,645964097506246$$
$$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,079692626246167$$
$$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,004681754135318$$
$$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,000160441184787$$
$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,000003598843235$$

$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0,000000056921729$$

$$-\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0,000000000668803$$

$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0,000000000006067.$$

$$\text{Cof}\frac{m}{n}90^\circ = 1,000000000000000$$

$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 1,233700550136169$$

$$+\frac{m^4}{n^4}\cdot 0,253669507901048$$

$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0,020863480763353$$

$$+\frac{m^8}{n^8}\cdot 0,000919260274839$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0,000025202042373$$

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0,000000471087478$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0,000000006386603$$

$$+\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0,000000000065660$$

$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0,000000000000529$$

3. Zusatz.

Um nun auch für die Tangenten und Cotangenten dergleichen Formuln zu erhalten, kann man so verfahren. Nach (77. §.) ist:

$$\frac{mn}{x^2n^2-m^2} = mn(x^2n^2-m^2)^{-1} = mn\left(\frac{1}{n^2x^2} + \frac{m^2}{n^4x^4} + \frac{m^4}{n^6x^6} + \frac{m^6}{n^8x^8} + \text{----}\right)$$

$$= \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{1}{x^6} + \frac{m^7}{n^7}\cdot\frac{1}{x^8} + \text{---}$$

Wenn man also $x=2$, sodann $x=3$; $x=4$; $x=5$ u. s. f. setzt so findet man:

$$\frac{mn}{4n^2-m^2} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{1}{2^6} + \text{----}$$

$$\frac{mn}{3^2.n^2-m^2} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{1}{3^6} + \text{----}$$

$$\frac{mn}{4^2.n^2-m^2} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{1}{4^4} + \frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{1}{4^6} + \text{----}$$

u. s. w.

Nun kann man diese Werthe in die Formuln III. IV) bringen, welche für die Tangenten und Cotangenten bey der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe angeführt worden sind, und sie werden nach gehöriger Reduction folgende geben:

$$\text{Tang}\frac{m}{n}90^\circ = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{mn}{n^2-m^2}$$

$$+\frac{m}{n}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$+\frac{m^3}{n^3}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

I) $$+\frac{m^5}{n^5}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$+\frac{m^7}{n^7}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$+ \text{- - - - - - - - - - - -}$$

$$\text{- - - - - - - - - - - -}$$

$$+\frac{m^{2r-1}}{n^{2r-1}}\left(\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{5^{2r}}+\frac{1}{7^{2r}}+\frac{1}{9^{2r}}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$\text{Cot}\frac{m}{n}90^\circ = \frac{n}{m}\cdot\frac{2}{\pi} - \frac{mn}{4n^2-m^2}\cdot\frac{4}{\pi}$$

$$-\frac{m}{n.2^2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$-\frac{m^3}{n^3.2^4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

II) $$-\frac{m^5}{n^5.2^6}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$-\frac{m^7}{n^7.2^8}\left(\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

$$- \text{- - - - - - - - - - - -}$$

$$\text{- - - - - - - - - - - -}$$

$$-\frac{m^{2r-1}}{n^{2r-1}.2^{2r}}\left(\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{4^{2r}}+\frac{1}{5^{2r}}+\text{----}\right)\frac{4}{\pi}$$

Verwandelt man endlich die Zahl-Factoren in Decimalbrüche, und nimmt man den bekannten Werth von π (1. Zuſ. Anm.) dazu; ſo findet man:

$$\text{Tang}\frac{m}{n}90^\circ = \frac{2mn}{n^2-m^2}\cdot 0,6366197723675$$
$$+\frac{m}{n}\cdot 0,2975567820597$$
$$+\frac{m^3}{n^3}\cdot 0,0186886502773$$
$$+\frac{m^5}{n^5}\cdot 0,0018424752034$$
$$+\frac{m^7}{n^7}\cdot 0,0001975800714$$
$$+\frac{m^9}{n^9}\cdot 0,0000216977245$$
$$+\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0,0000024011370$$
$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0,0000002664132$$
$$+\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0,0000000295864$$
$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0,0000000032867$$
$$+\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0,0000000003651$$
$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0,0000000000405$$
$$+\frac{m^{23}}{n^{23}}\cdot 0,0000000000045$$
$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}\cdot 0,0000000000005$$

$$\text{Cot}\,\frac{m}{n}\,90^\circ = \frac{m}{n} \cdot 0{,}636619772367\,5$$

$$- \frac{4mn}{4n^2-m^2} \cdot 0{,}318309886183\,7$$

$$- \frac{m}{n} \cdot 0{,}205288894145$$

$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}006551074788\,2$$

$$- \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}000345029255\,4$$

$$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}000020279106\,0$$

$$- \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}000001236652\,7$$

$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}000000076495\,9$$

$$- \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}000000004759\,7$$

$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}000000000296\,9$$

$$- \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}000000000018\,5$$

$$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0{,}000000000001\,1$$

Anmerkung des Herausgebers.

Nach den hier angeführten Formuln hätte man also die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Kreisbogen von 0° bis 30° sehr genau und bequem berechnen können: denn was die übrigen Bogen über 30° anbelangt; so können die ihnen zugehörigen Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten, aus den Sinus, Cosinus, Tangenten

und Cotangenten der Bogen zwischen 0° und 30° durch bloße Addition und Subtraction bestimmt werden (156. §. 3. Zus.); und es ist auch gar nicht nöthig, die trigonometrischen Linien zu berechnen, welche den Bogen zwischen 45° und 90° zugehören, indem sie durch diejenigen völlig bestimmt sind, welche den Bogen zwischen 0° und 45° zukommen. Nun aber, weil die Sinus-Tafeln schon berechnet sind, können solche Formuln allemahl den Nutzen haben, daß man sich derselben zur Berichtigung der in Handtafeln vorkommenden trigonometrischen Linien bedienen kann, wenn vielleicht gewisse Stellen zweifelhaft sind.

Man findet übrigens diese Formuln beym Hrn. Euler[a], und selbst die Reihen I) II), welche er aber aus andern Gründen, auf einem weitläuftigeren, doch nicht mehr überzeugenden Wege, hergeleitet hat[b]; die bequeme Verwandlung der Zahlenreihen in I) II) beruhet auf der Summation der verkehrten Reihen von Potenzen der natürlichen und ungeraden Zahlen, worüber man Hrn. Euler lesen kann[c]. Ausserdem haben sich mit der Summation trigonometrischer und der damit verwandten Reihen viele, und gewiß die ersten Mathematiker beschäfftiget: wer sich mit dergleichen Untersuchungen bekannt machen will, der wird das Vorzüglichste davon in Comment. Petropol. und in besonderen Werken des Hrn. Eulers[d], und der Hrn. Bernoullis[e], das Neueste aber beym Hrn. Pfaff[f] finden.

(a) In-

(a) Introd. in Analyſ. Infin. P. I. Cap. VIII.
(b) Daſelbſt Cap. XI.
(c) Daſelbſt Cap. X.
(d) Opuſcula Analytica, und Inſtit. calculi Differ.
(e) Ioann. Bernoulli Opp. und Iacob. Bernoulli de Seriebus Infinitis.
(f) Verſuch einer neuen Summationsmethode.

160. §. Aufgabe.

Die Reihen für den Sinus und Coſinus eines Bogens ψ (158. §.) in Factoren zu zerfällen.

Auflöſung. 1) Wenn man vorausſetzt, daß in (158. §.) Sin $\psi = 0$ und Coſ $\psi = 0$ wird; ſo erhält man:

$$\text{I)}\quad \psi\left(1-\frac{\psi^2}{1.2.3}+\frac{\psi^4}{1.2\cdots5}-\frac{\psi^6}{1.2\cdots7}+\frac{\psi^8}{1.2\cdots9}-\cdots\right)=0$$

$$\text{II)}\quad 1-\frac{\psi^2}{1.2}+\frac{\psi^4}{1.2.3.4}-\frac{\psi^6}{1.2\cdots6}+\frac{\psi^8}{1.2\cdots8}-\cdots=0$$

a) Daß dieſe Gleichungen ihre Wurzeln haben müſſen, iſt gewiß (94. §.), und es iſt zugleich einleuchtend, daß dieſe Wurzeln nichts anders ſeyn können, als diejenigen Kreisbogen ψ, für welche Sin $\psi = 0$, oder Coſ $\psi = 0$ wird: wenn es alſo ausgemacht werden ſoll, ob, und was für mögliche Wurzeln dieſelben Gleichungen haben; ſo muß entſchieden werden, ob es, und was für mögliche Kreisbogen es giebt, für welche die ihnen zugehörigen Sinus und Coſinus gleich Null werden.

3) Da nun bey $\psi = A = 0$ auch $\sin\psi = \sin A = \sin 0 = 0$, und $\sin(\pi - \psi) = \sin(\pi - 0) = \sin\pi = 0$, auch $\sin(2\pi - A) = \sin(2\pi - 0) = \sin 2\pi = 0$ iſt (154 §. X.); ſo muß $\sin\psi = 0$ für jeden bejahten Bogen in der Reihe III.), wegen (154. §. VII.), und nun auch für jeden verneinten in der Reihe IV) wegen (154. §. XIII. n. 3.) werden.

Setzt man aber $\psi = A = \frac{1}{2}\pi$; ſo iſt $\cos\psi = \cos A = \cos\frac{1}{2}\pi = 0$, und $\cos(2\pi - A) = \cos(2\pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos\frac{3}{2}\pi = 0$ (154. §. X.): wegen (154. §. VII. n. 2. 4.), wo man $A = \frac{1}{2}\pi$ ſetzen kann, ſind alſo in der Reihe V) diejenigen bejahten Kreisbogen, für welche $\cos\psi$ allemahl $= 0$ wird, und nun ſind wegen (154. §. XIII. n. 2. 3.) ſolche verneinte Bogen in VI).

III) $0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi \ldots$

IV) $-\pi; -2\pi; -3\pi; -4\pi \ldots$

V) $\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi \ldots$

IV) $-\frac{1}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\frac{5}{2}\pi; -\frac{7}{2}\pi \ldots$

Wegen (n. 2.) ſind alſo in III) IV) alle bejahte und verneinte Wurzeln der Gleichung I), und in V) VI) ſind alle ſolche Wurzeln der Gleichung II) vorhanden.

4) Aus den Wurzeln III) IV) der Gleichung I) findet man nach (95. §. Zuſ.) die zugehörigen Wurzelgleichungen, und daraus die Factoren der zwiſchen den Klammern befindlichen Function in I), nämlich die Factoren in VII): und aus den Wurzeln V) VI) der Gleichung II) folgen die

Wurzel

Wurzelgleichungen, und daraus die Factoren der Function in II), nämlich die Factoren VIII).

VII) $1-\frac{\psi}{\pi}; 1+\frac{\psi}{\pi}; 1-\frac{\psi}{2\pi}; 1+\frac{\psi}{2\pi};$

$1-\frac{\psi}{3\pi}; 1+\frac{\psi}{3\pi}$ .....

VIII) $1-\frac{2\psi}{\pi}; 1+\frac{2\psi}{\pi}; 1-\frac{2\psi}{3\pi}; 1+\frac{2\psi}{3\pi};$

$1-\frac{2\psi}{5\pi}; 1+\frac{2\psi}{5\pi}$ .....

Denn es giebt z. B. die Wurzel 3π in III) nach (94. §.) einen Werth von ψ in der Gleichung I), und es ist daher $\psi=3\pi$, folglich $\frac{\psi}{3\pi}=1$, und $1-\frac{\psi}{3\pi}=0$ die derselben Wurzel zugehörige Wurzelgleichung, und $1-\frac{\psi}{3\pi}$ ein Factor der zwischen den Klammern in I) befindlichen Function.

5) Gewiß ist es also, daß die Functionen in I) II) als Producte aus unzähligen Factoren betrachtet werden können, und alle Factoren von I) in VII), alle aber von II) in VIII) vorhanden sind; daher kann man die Functionen von ψ, welche den Sin ψ und Cos ψ (158. §.) geben sollen, auch durch die Factoren VII) VIII) wirklich ausdrücken, und dann ist.

IX. $\text{Sin}\,\psi=\psi\left(1-\frac{\psi}{\pi}\right)\left(1+\frac{\psi}{\pi}\right)\left(1-\frac{\psi}{2\pi}\right)$

$\left(1+\frac{\psi}{2\pi}\right)\left(1-\frac{\psi}{3\pi}\right)\left(1+\frac{\psi}{3\pi}\right)$ ....

X)

X) $\text{Cof}\,\psi = \left(1-\frac{2\psi}{\pi}\right)\left(1+\frac{2\psi}{\pi}\right)\left(1-\frac{2\psi}{3\pi}\right)$

$\left(1+\frac{2\psi}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2\psi}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2\psi}{5\pi}\right)\ldots.$

oder

XI) $\text{Sin}\,\psi = \psi\left(1-\frac{\psi^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\psi^2}{2^2\cdot\pi^2}\right)$

$\left(1-\frac{\psi^2}{3^2\cdot\pi^2}\right)\left(1-\frac{\psi^2}{4^2\cdot\pi^2}\right)\ldots.$

XII) $\text{Cof}\,\psi = \left(1-\frac{4\psi^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\psi^2}{3^2\cdot\pi^2}\right)$

$\left(1-\frac{4\psi^2}{5^2\cdot\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\psi^2}{7^2\cdot\pi^2}\right)\ldots.$

Setzt man endlich $\psi = \frac{m\pi}{2n}$; so findet man:

XIII) $\text{Sin}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(1-\frac{m^2}{2^2\cdot n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4^2\cdot n^2}\right)$

$\left(1-\frac{m^2}{6^2\cdot n^2}\right)\ldots.$

XIV) $\text{Cof}\frac{m\pi}{2n} = \left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{3^2\cdot n^2}\right)$

$\left(1-\frac{m^2}{5^2\cdot n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{7^2\cdot n^2}\right)\ldots.$

1. Zusatz.

Die Formuln XIII) XIV) geben folgende:

$\left(1-\quad\right)\left(1-\quad+1\right)$

I) $\text{Sin}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)$
$\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\left(\frac{6n+m}{6n}\right)\cdots$

II) $\text{Cos}\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)$
$\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\left(\frac{5n+m}{5n}\right)\cdots$

Denn man kann jeden zusammengesetzten oder binomischen Factor bey den Formuln XIII) XIV) überhaupt durch $1-\frac{m^2}{r^2 \cdot n^2}$ ausdrücken, und jeder muß offenbar in zween Factoren zerlegt werden können; es ist nämlich:

$$1-\frac{m^2}{r^2 \cdot n^2} = \frac{r^2n^2-m^2}{r^2n^2} = \frac{(rn-m)(rn+m)}{r^2n^2} = \left(\frac{rn-m}{rn}\right)\left(\frac{rn+m}{rn}\right).$$

Nun ist wegen (154. §. XI.) $\text{Sin}\frac{m\pi}{2n} = \text{Cos}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{m\pi}{2n}\right)$
$= \text{Cos}\left(\frac{n-m}{2n}\cdot\pi\right)$, und $\text{Cos}\frac{m\pi}{2n} = \text{Sin}\frac{n-m}{2n}\cdot\pi$: für $n-m$ statt m findet man also aus I) und II) die Formuln III) und IV).

III) $\text{Sin}\frac{n-m}{2n}\cdot\pi = \text{Cos}\frac{m}{2n}\pi = \left(\frac{n-m}{2n}\right)\pi\left(\frac{n+m}{2n}\right)$,
$\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)$
$\left(\frac{5n+m}{6n}\right)\left(\frac{7n-m}{6n}\right)\left(\frac{7n+m}{8n}\right)\cdots$

IV) Cos

IV) $\text{Cof}\frac{n-m}{2n}\cdot\pi = \text{Sin}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)$

$\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)$

$\left(\frac{6n-m}{5n}\right)\left(\frac{6n+m}{7n}\right)\left(\frac{8n-m}{7n}\right)\ldots$

Weil endlich der Sinus durch den Cosinus dividirt die Tangente, und der Cosinus durch den Sinus dividirt die Cotangente giebt (154. §. IV.); so erhält man die Formula V) VI) aus I) III).

V. $\text{Tang}\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{m}{n-m}\right)\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)$

$\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\left(\frac{6n-m}{5n+m}\right)\ldots$

VI) $\text{Cot}\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{m}\right)\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)$

$\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\left(\frac{5n+m}{6n-m}\right)\ldots$

2. Zusatz.

Man kann nun sehr bequem den natürlichen und gemeinen Logarithmen der halben Kreislinie π bestimmen, ohne diese selbst zu kennen. Wenn man nämlich $n=2$, $m=1$ setzt; so ist $\text{Sin}\frac{m\pi}{2n} = \text{Sin}\frac{\pi}{4} = \text{Sin}\,45°$, und $\text{Cof}\frac{n-m}{2n}\cdot\pi = \text{Cof}\frac{\pi}{4} = \text{Cof}\,45°$: für $n=2$ und $m=1$ geben also die Formulæ I) und IV) in (1. Zus.) folgende.

Sin

$$\text{Sin}\,45^\circ = \frac{\pi \cdot 3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.29\ldots}{4.4.8.8.12.12.16.16.20.20.24.24.28.28\ldots}$$

$$\text{Cos}\,45^\circ = \frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.29\ldots}{2.2.6.6.10.10.14.14.18.18.22.22.26.26.30\ldots}$$

Dividirt man aber den Sinus durch den Cosinus; so erhält man wegen (154. §. IV.) Tang 45°: weil sie aber $= 1$ seyn muß (daſ. IX.); so iſt:

$$1 = \frac{\pi \cdot 2.2.6.6.10.10.14.14.18.18.22.22.26.26\ldots}{4.4.4.8.8.12.12.16.16.20.20.24.24.28\ldots}$$

$$\text{also } \pi = \frac{2.2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots\ldots}$$

$$= \frac{4}{1}\left(\frac{2.4}{3.3}\right)\left(\frac{4.6}{5.5}\right)\left(\frac{6.8}{7.7}\right)\left(\frac{8.10}{9.9}\right)\left(\frac{10.12}{11.11}\right)\left(\frac{12.14}{13.13}\right)\ldots$$

$$= 4\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\ldots$$

daher

$$\text{Log}\,\pi = \log 4 + l\left(1-\frac{1}{3^2}\right) + l\left(1-\frac{1}{5^2}\right) + l\left(1-\frac{1}{7^2}\right)$$
$$+ l\left(1-\frac{1}{9^2}\right) + l\left(1-\frac{1}{11^2}\right) + \ldots\ldots$$

Es iſt ferner bekannt, daß, wenn von natürlichen Logarithmen die Rede iſt, allemahl

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \ldots\ldots$$

seyn muß (137. 138. §.): man kann also bey der gefundenen Formul jeden Logarithmen, z. B. $l\left(1-\frac{1}{3^2}\right)$ in eine

Reihe verwandeln, wenn man $x = \frac{1}{3^2}$ ſetzt, und dadurch wird man finden.

$$\text{Log nat. } \pi = 14 - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2.3^4} + \frac{1}{3.3^6} + \frac{1}{4.3^8} + \frac{1}{5.3^{10}} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{2.5^4} + \frac{1}{3.5^6} + \frac{1}{4.5^8} + \frac{1}{5.5^{10}} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{2.7^4} + \frac{1}{3.7^6} + \frac{1}{4.7^8} + \frac{1}{5.7^{10}} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{9^2} + \frac{1}{2.9^4} + \frac{1}{3.9^6} + \frac{1}{4.9^8} + \frac{1}{5.9^{10}} + \cdots\right)$$

u. ſ. f.

Und auf dieſe Art war leicht den natürlichen Logarithmen von π zu berechnen; es iſt nämlich:

Log nat. $\pi = 1,144729885849400174143 42 \cdots$

Multiplicirt man aber dieſe Zahl mit $0,43429448 1 \cdots$; ſo giebt das Product den gemeinen Logarithmen von π (138. §. 5. Zuſ.).

Log vulg. $\pi = 0,497149872694133854351 26 \cdots$

3. Zuſatz.

Man erhält aus den Formuln XIII) XIV) der vorhergehenden Aufgabe folgende logarithmiſche Formuln, welche für jedes logarithmiſche Syſtem gelten.

I) $$\text{Log Sin } \frac{m}{n} \cdot 90^\circ = 1m + 1\pi - 1a - 1n + 1\left(1 - \frac{m^2}{2^2.n^2}\right) + 1\left(1 - \frac{m^2}{4^2.n^2}\right) + 1\left(1 - \frac{m^2}{6^2.n^2}\right) + \cdots$$

II) Log

II) $\text{Log Cof}\frac{m}{n}90^\circ = l\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)+l\left(1-\frac{m^2}{3^2.n^2}\right)$

$+l\left(1-\frac{m^2}{5^2.n^2}\right)+l\left(1-\frac{m^2}{7^2.n^2}\right)+l\left(1-\frac{m^2}{9^2.n^2}\right)+\ldots$

Und wenn man die Logarithmen der binomischen Factoren in Reihen, wie (2. Zus.), verwandelt; so erhält man:

$$\text{Log Sin}\frac{m}{n}90^\circ = lm+l(2n-m)+l(2n+m)-3l\pi+l\pi-lg$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots\ldots\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\ldots\ldots\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\frac{1}{10^6}+\ldots\ldots\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\frac{1}{8^8}+\frac{1}{10^8}+\ldots\ldots\right)$$

u. s. f.

$$\text{Log Cof}\frac{m}{n}90^\circ = l(n-m)+l(n+m)-2ln$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots\ldots\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\ldots\ldots\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\ldots\ldots\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\ldots\ldots\right)$$

u. s. f.

Verwandelt man aber die Zahlreihen in Decimalbrüche, und nimmt man Log nat. π aus (2. Zuſ.), hingegen Log nat. 8. aus (139. §.); ſo findet man die Ausdrücke für die natürlichen Logarithmen von $\text{Sin}\frac{m}{n}90°$ u. $\text{Cof}\frac{m}{n}90°$ wie folgt:

$$\text{Log nat Sin}\frac{m}{n}90° = \text{l}\,m + \text{l}(2n-m) + \text{l}(2n+m) - 3\,\text{l}\,n$$
$$- 0{,}934711655830435754^{10}$$
$$- \frac{m^2}{n^2}\cdot 0{,}161233516712056609^{11}$$
$$- \frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}002572601053473068^{48}$$
$$- \frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}000090328447835672^{60}$$
$$- \frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}000003981793162055^{01}$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}000000194252954651^{96}$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}000000010013287488^{12}$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}000000000534041356^{18}$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}000000000029148596^{58}$$

$$\text{Log nat Cof}\frac{m}{n}90° = \text{l}(n-m) + \text{l}(n+m) - 2\,\text{l}\,n$$
$$- \frac{m^2}{n^2}\cdot 0{,}233700550136169827^{35}$$
$$- \frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}007339015802096027^{27}$$
$$- \frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}000482358880314040^{63}$$

$$-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}000038794756324029\,82$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}000003408272608965\,10$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}000000314308097\,18659$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}000000029891502\,74450$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}000000002904644\,67239$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}000000000286826\,39518$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}000000000028680\,76974$$

Und wenn man diese Zahlen mit 0,43429 - - - - (138. §. 5. Zus.) multiplicirt; so erhält man Ausdrücke für die gemeinen Logarithmen von $\text{Sin.}\frac{m}{n}90^\circ$ und $\text{Cof}\frac{m}{n}90^\circ$, doch bey der Voraussetzung, daß $\text{Sin}\,90^\circ = 1$ gesetzt wird, dessen Logarithme daher $= 0$ ist: da also der Logarithme von $\text{Sin}\,90^\circ$ in den Tafeln $= 10$ genommen wird; so muß man auch dieselben Ausdrücke um 10 vermehren, damit sie die Tafeln-Logarithmen geben: also setze man:

$$\text{Log vulg.}\,\text{Sin}\frac{m}{n}90^\circ = 1m + l(2n-m) + l(2n+m) - 3\ln$$
$$+9{,}594059885702\,190$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0{,}070022826605\,901$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}001117266441\,661$$

$$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}000039229146453$$

$$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}000001729270798$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}000000084362986$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}000000004348715$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}000000000231931$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}000000000012659$$

$$\text{Log vulg. Cof}\frac{m}{n}90^\circ = l(n-m)+l(n+m)-2ln + 10{,}000000000000000$$

$$-\frac{m^2}{n^2} \cdot 0{,}101494859341892$$

$$-\frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}003187294065451$$

$$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}000209485800017$$

$$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}000016848348597$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}000001480193986$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}000000136502272$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}000000012981715$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}000000001261471$$

$$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}000000000124567$$

$$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}000000000012456$$

Anmer-

Anmerkung des Herausgebers.

Die hier angegebenen Formuln zur Berechnung der natürlichen und gemeinen Logarithmen der Sinus und Cosinus aller Kreisbogen von 0° bis 90° hat Hr. Euler angegeben [a], nun, da auch diese Logarithmen berechnet vorhanden sind, können dieselben Formuln zu einer Absicht dienen, wie die Formuln (159. §. 2. 3. Zus.), um nämlich die schon berechneten Logarithmen in zweifelhaften Stellen zu berichtigen, oder auch die Logarithmen gewisser trigonometrischen Linien durch mehrere Decimalstellen auszudrücken, als sie vielleicht in den Handtafeln ausgedrückt vorkommen. Die Zerfällung der Reihen für Sin ψ und Col ψ (158. §.) in ihre Factoren (160. §.), worauf diese Formuln sich gründen, hat Hr. Euler aus anderen Gründen hergeleitet, die doch nicht mehr überzeugend sind, als die hier angeführten, derer sich auch Hr. Hofr. Kästner [b] und Hr. Klügel [c] bedient haben: Hr. Joh. Bernoulli, der Erfinder jener Zerfällung, bezweifelt die Bündigkeit ihrer Gründe [d] (160. §.); ein Gleiches thut auch Hr. Langsdorf, welcher zugleich einen Brief von Hrn. Hofr. Kästner anführt, worinn die vermeinten Schwierigkeiten gehoben werden sollen [e]; unter den neuesten ist Hr. Pfaff, der auch einige Erinnerungen dagegen gemacht hat. [f].

Daß übrigens es genug sey, die Formuln zur bequemen Berechnung der Logarithmen von Sinussen und Cosinussen zu haben, erhellet daraus, weil aus ihnen die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten durch bloße Subtraction gefunden werden können. Denn es ist nach (154. §. IV.):

$$\text{Tang}\frac{m}{n}90^\circ = \frac{\text{Sin}\frac{m}{n}90^\circ}{\text{Cof}\frac{m}{n}90^\circ} \text{ und}$$

$$\text{Cot}\frac{m}{n}90^\circ = \frac{\text{Cof}\frac{m}{n}90^\circ}{\text{Sin}\frac{m}{n}90^\circ} : \text{ alſo}$$

$$\text{Log Tang}\frac{m}{n}90^\circ = \text{Log Sin}\frac{m}{n}90^\circ - \text{Log Cof}\frac{m}{n}90^\circ$$

$$\text{Log Cot}\frac{m}{n}90^\circ = \text{Log Cof}\frac{m}{n}90^\circ - \text{Log Sin}\frac{m}{n}90^\circ$$

(a) Introduct. in Analyſ. Infin. Tom. I. §. 194. 195.
(b) Anfangsgr. der Analyſ. des Unendlichen. 338.—§.
(c) Analytiſche Trigonometrie. V. Kap. S. 130 u. folg.
(d) Oper. Tom. IV. n. 152. Schol. 2.
(e) Erläuterungen über die Käſtneriſche Analyſ. des Unendl. S. 285 u. folg.
(f) Verſuch einer neuen Summationsmethode S. 87 u. folg.

Der XVIII. Abſchnitt.

Von der Zerlegung gebrochener Functionen.

161. §. Erklärungen.

Eine ganze rationale Function von x (23. §.) heißt jede Function von der Form $a+bx^2+cx^3+\cdots$, wo nämlich die Exponenten von x lauter bejahte ganze Zahlen ſind: ſie wird von der erſten, zweyten, dritten ---- nten Ordnung genannt, wenn der höchſte Exponent von

x in

x in ihr 1, 2, 3 - - - n ist. Wenn eine solche Function A durch eine andere α ohne Rest dividirt werden kann; so heißt α ein Factor von A, und zwar ein einfacher oder zusammengesetzter Factor, nachdem α eine Function von x von der ersten oder von einer höheren Ordnung ist: zusammengesetzte Factoren α sind demnach von der zweyten Ordnung oder quadratische, oder dreytheilichte, wie $p - qx + rx^2$; von der dritten Ordnung, oder cubische, oder viertheilichte, wie $p - qx + rx^2 - sx^3$ u. s. f.: jeder einfache Factor kann durch $p - qx$ ausgedrückt werden.

162. §. Lehrsatz.

Es giebt für jede ganze rationale Function A von x so viele einfache Factoren, wie $p - qx$, als der Exponent der Ordnung, zu welcher die Function gehört (160. §.), Einheiten hat.

Beweis. Weil der Werth von x in A völlig unbestimmt seyn soll; so kann man annehmen, daß es für x auch einen solchen Werth giebt, wofür $A = o$ werden müßte: ist aber $A = o$; so ist dieses eine Gleichung von eben der Ordnung, z. B. von der nten, zu welcher A nach (161. §.) gehört (93. §.), und für sie giebt es gewiß n Wurzeln, wie $x = \frac{p}{q}$ (95. §. 1—6. Zus.), und eben so viele Wurzelgleichungen, wie $x - \frac{p}{q} = o$, oder $p - qx = o$, folglich auch eben so viele Factoren von A, wie $p - qx$ (das. und 7. 8. 9. Zus.).

1. Zusatz.

Weil das Product aus zweenen einfachen Factoren, wie $p - qx$, $r - sx$ einen quadratischen $\alpha - \beta x + \gamma x^2$, das Product aus drey einfachen Factoren aber einen cubischen, wie $\alpha - \beta x + \gamma x^2 - \delta x^3$, Factor giebt, so ist gewiß, daß es für jede Function A von der Ordnung n auch einen zusammengesetzten Factor von jeder niedrigeren Ordnung $n-m$ geben muß (161. §.).

2. Zusatz.

Weil ferner jeder einfache Factor $p - qx$ von A eine Wurzel $x = \frac{p}{q}$ der Gleichung $A = 0$ giebt; so hängt die Erfindung der einfachen, und nun auch der zusammengesetzten Factoren (1. Zus.) von der Auflösung der Gleichung $A = 0$ ab (128. §.).

3. Zusatz.

Hat $A = 0$ unmögliche Wurzeln $x = \frac{p}{q}$; so hat auch A unmögliche Factoren $p - qx$, und wie oft diese in A wirklich vorhanden sind, so oft müssen sie da paarweise vorkommen (115. §.).

4. Zusatz.

Wenn ein quadratischer Factor von A die Form $p^2 - 2Qx + q^2x^2$ hat; so ist die quadratische Gleichung $p^2 - 2Qx + q^2x^2 = 0$ ein quadratischer Factor von $A = 0$, und die beyden Wurzeln jener Gleichung sind $x = \frac{Q \pm \sqrt{(Q^2 - p^2q^2)}}{q^2}$ (88. §.), daher sind die da-

von

von abhängenden einfachen Factoren von A allemahl $Q+\sqrt{(Q^2-p^2q^2)}-q^2x$ und $Q-\sqrt{(Q^2-p^2q^2)}-q^2x$, beyde mögliche oder unmögliche Grössen, nachdem $pq<Q$ oder $pq>Q$ ist.

5. Zusatz.

Kein Bogen φ kann einen grösseren Sinus oder Cosinus haben, als der Halbmesser $=1$ ist: wenn man also $Q=pq\,\mathrm{Cos}\varphi$ setzt; so ist gewiß $Q<pq$: also bestehet, wegen (4. Zus.), jeder quadratische Factor $p^2-2pq\,\mathrm{Cos}\varphi+q^2x^2$ aus zweenen unmöglichen einfachen Factoren.

$$Q+\sqrt{(Q^2-p^2q^2)}-q^2x=pq\mathrm{Cos}\varphi+\sqrt{(p^2q^2\mathrm{Cos}\varphi^2-p^2q^2)}-q^2x$$
$$=pq\mathrm{Cos}\varphi+pq\sqrt{(\mathrm{Cos}\varphi^2-1)}-q^2x=pq(\mathrm{Cos}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})-q^2x.$$
$$Q-\sqrt{(Q^2-p^2q^2)}-q^2x=pq(\mathrm{Cos}\varphi-\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})-q^2x.$$

163. §. Erklärungen.

Wenn nur der Nenner, oder auch der Zähler einer Function von x eine ganze rationale Function von x ist (161. §.); so heißt dieselbe Function eine gebrochene rationale Function von x: man kann sie eine ächte oder eigentliche gebrochene Function nennen, wenn der Zähler zu einer niedrigeren Ordnung gehört, als der Nenner (161. §.): gehört er aber zu einer höheren Ordnung als der Nenner; so kann sie eine unächte oder uneigentliche gebrochene Function von x heißen, wie

$$\frac{2x^5-3x^2+5x-2}{4x^4-8x^2}.$$

164. §. Lehrſatz.

Jede uneigentliche gebrochene Function $\frac{M}{N}$ von x kann in zween Theile zerlegt werden, nämlich in eine ganze Function, und in eine ächte gebrochene Function, welche N zu ihrem Nenner hat.

Beweis. Weil der Zähler M zu einer höheren Ordnung gehören ſoll, als der Nenner N (163. §.); ſo nehme man an, daß N von der Ordnung n, und M von einer um m Grade höheren, folglich von der Ordnung n+m iſt: alſo kann man $\frac{M}{N}$ am allgemeinſten ſo ausdrücken:

$$\frac{M}{N} = \frac{Ax^{m+n}+Bx^{m+n-1}+Cx^{m+n-2}+\ldots+Px^{m+n-n}+Qx^{n-1}+\ldots+Tx+U.}{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\ldots+px+q}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{Ax^{m+n}+Bx^{m+n-1}+Cx^{m+n-2}+\ldots+Px^n}{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+px+q} + \frac{Qx^{n-1}+Rx^{n-2}+\ldots+Tx+U=X}{ax^n+bx^{n-1}+\ldots+px+q}$$

Wenn man aber den Zähler des erſten Theils durch den Nenner nach (22. §. Zuſ.) wirklich dividirt; ſo wird offenbar der Quotient eine ganze Function von der Form $\alpha x^m+\beta x^{m-1}+\gamma x^{m-2}+\ldots+\pi = Z$ geben, und überdem wird ein Reſt Y bleiben, der gewiß zu einer niedrigeren Ordnung gehören muß, als der Diviſor = N: da alſo dieſer Reſt mit dem Zähler X des zweyten Theils von $\frac{M}{N}$ eine Function von einer niedrigeren Ordnung giebt,

als N ist; so wird $\frac{M}{N} = Z + \frac{X+Y}{N}$ aus einer ganzen Function Z und einer ächten gebrochenen $\frac{X+Y}{N}$ (163. §.) bestehen.

Beyspiel.

Für $\frac{M}{N} = \frac{4-6x^3+2x+8x^5}{2x^3-5x} = \frac{8x^5-6x^3+2x+4}{2x^3-5x}$

ist $\frac{M}{N} = 4x^2+7+\frac{37x+4}{2x^3-5x}$.

165. §. Aufgabe.

Eine gegebene ächte gebrochene Function $\frac{M}{N}$ von x, deren Nenner N aus lauter ungleichen einfachen Factoren von der Form $p-qx$ bestehet, in so viele Brüche zu zerlegen, als solche Factoren in N stecken, so, daß jeder Bruch einen von diesen Factoren zu seinem Nenner bekomme, und die Summe aller Brüche dem Bruche $\frac{M}{N}$ gleich sey.

Auflösung. Weil diese Brüche zu ihren Nennern die Factoren von N bekommen müssen; so kömmt alles darauf an, die Zähler derselben Brüche zu bestimmen: man findet aber den Zähler jedes Bruches, welcher zu seinem Nenner den Factor $p-qx$ bekommen soll, wenn man den Zähler M der gegebenen gebrochenen Function, durch das Product aus allen übrigen Factoren ihres Nenners N dividirt, und beym Quotienten $x = \frac{p}{q}$ machet: wenn z. B.

ein

ein solcher Bruch $\frac{A}{p-qx}$ seyn soll, und $N=(p-qx)X$ ist, wo X das Product aus den übrigen Factoren von N bedeutet; so wird seyn $A=\frac{M}{X}$ für $x=\frac{p}{q}$.

Beweis. Weil $\frac{M}{N}$ in $\frac{A}{p-qx}$ und andere Brüche zerlegt werden soll, welche die übrigen einfachen Factoren von N zu ihren Nennern bekommen müssen, und das Product aus diesen Factoren X heißt; so muß die Summe dieser übrigen Brüche X zum Nenner haben: wenn man also den Zähler derselben Summe mit L bezeichnet; so muß seyn:

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{p-qx}+\frac{L}{X}=\frac{AX+L(p-qx)}{X(p-qx)}.$$

Aber $N=X(p-qx)$: also $M=AX+L(p-qx)$,

daher $\frac{A}{p-qx}+\frac{L}{X}=\frac{M}{X(p-qx)}$; $L=\frac{M-AX}{p-qx}$.

Es ist nun L eine ganze Function von x: also muß $M-AX$ durch $p-qx$ nothwendig theilbar seyn, und man kann $M-AX=L(p-qx)$ durch das Product aus einer ganzen Function L in den einfachen Factor $p-qx$ ausdrücken. Weil ferner $p-qx=0$ für $x=\frac{p}{q}$ wird; so ist auch $M-AX=0$, daher $A=\frac{M}{X}$ für $x=\frac{p}{q}$.

Beyspiele.

I. $$\frac{M}{N}=\frac{5-4x}{3-7x-6x^2}=\frac{5-4x}{(3+2x)(1-3x)}.$$

Soll seyn $\frac{M}{N}=\frac{A}{3+2x}+\frac{B}{1-3x}$.

Für

Für A ist $X = 1 - 3x$; $p - qx = 3 + 2x$, daher $p = 3$; $-q = 2$; $q = -2$; $x = \frac{p}{q} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$; also ist

$$A = \frac{M}{X} = \frac{5-4x}{1-3x} = \frac{5+4.\frac{3}{2}}{1+3.\frac{3}{2}} = 2 \text{ für } x = \frac{p}{q}.$$

Für B ist $X = 3 + 2x$; $p - qx = 1 - 3x$; $p = 1$; $q = 3$; $x = \frac{p}{q} = \frac{1}{3}$: also ist

$$B = \frac{M}{X} = \frac{5-4x}{3+2x} = \frac{5-4.\frac{1}{3}}{3+2.\frac{1}{3}} = 1 \text{ für } x = \frac{p}{q}.$$

Daher $\frac{M}{N} = \frac{2}{3+2x} + \frac{1}{1-3x}$.

II. $\frac{M}{N} = \frac{6-3x-5x^2}{2x-4x^2-6x^3} = \frac{6-3x-5x^2}{x(2+2x)(1-3x)}$.

Soll seyn $\frac{M}{N} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2+2x} + \frac{C}{1-3x}$.

Für A ist $X = (2+2x)(1-3x) = 2 - 4x - 6x^2$; $p - qx = x$, daher $p = 0$, $-q = 1$, $q = -1$, und $x = \frac{p}{q} = \frac{0}{-1} = 0$: also ist

$$A = \frac{M}{X} = \frac{6-3x-5x^2}{2-4x-6x^2} = \frac{6-3.0-5.0}{2-4.0-6.0} = \frac{6}{2} = 3 \text{ für } x = \frac{p}{q}.$$

Für B ist $X = x(1-3x) = x - 3x^2$; $p - qx = 2 + 2x$; $p = 2$; $q = -2$; $x = \frac{p}{q} = \frac{2}{-2} = -1$: also ist

$$B = \frac{M}{X} = \frac{6-3x-5x^2}{x-3x^2} = \frac{6+3-5}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1 \text{ für } x = \frac{p}{q}.$$

Für C ist $X = x(2+2x) = 2x + 2x^2$; $p - qx = 1 - 3x$; $p = 1$; $q = 3$; $x = \frac{p}{q} = \frac{1}{3}$: also

C =

$$C=\frac{M}{X}=\frac{6-3x-5x^2}{2x+2x^2}=\frac{6-3.\frac{1}{3}-5.\frac{1}{5}}{2.\frac{1}{3}+2.\frac{1}{5}}=\frac{40}{8}=5 \text{ für } x=\frac{p}{q}.$$

Daher $\frac{M}{N}=\frac{3}{x}-\frac{1}{2+2x}+\frac{5}{1-3x}$.

Auf gleiche Art kann man nun folgende Brüche zerlegen:

III) $\frac{M}{N}=\frac{6x+4}{x+x^2}=\frac{6x+4}{x(1+x)}$,

giebt $\frac{M}{N}=\frac{4}{x}+\frac{2}{1+x}$

IV) $\frac{M}{N}=\frac{1+x^2}{x-x^3}=\frac{1+x^2}{x(1+x)(1-x)}$,

giebt $\frac{M}{N}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}$.

V) $\frac{M}{N}=\frac{40+38x-26x^2}{(1-2x)(2+3x)(3+4x)}$,

giebt $\frac{M}{N}=\frac{3}{1-2x}+\frac{4}{2+3x}+\frac{5}{3+4x}$.

166. §. Aufgabe.

Wenn der Nenner N einer ächten gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ aus einigen gleichen Factoren beſtehet, die Function in ſo viele Brüche zu zerlegen, als N überhaupt gleiche und ungleiche Factoren hat, ſo, daß doch die Nenner dieſer Brüche allemahl ungleich werden mögen.

Auflöſung. Geſetzt, der Nenner N habe n gleiche Factoren von der Form $p-qx$, und noch vielleicht einige, wovon das Product $=X$ ſeyn mag, ſo, daß $N=X(p-qx)^n$ iſt: man ſetze nun, es ſoll ſeyn:

$\frac{M}{N}$

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{(p-qx)^n} + \frac{B}{(p-qx)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qx)^{n-2}} + \text{- - - - -}$$

$$\text{- - -} + \frac{P}{(p-qx)^{n-r}} + \frac{Q}{(p-qx)^{n-r-1}} + \text{- - -} + \frac{Z}{p-qx} + \frac{\omega}{X}.$$

Kann man die Zähler A, B, C - - - Z bestimmen; so wird man aus den n gleichen Factoren von der Form $p-qx$ eben so viele Brüche erhalten, und es wird noch alles darauf ankommen, auch für die in X befindlichen Factoren eben so viele neue Brüche zu bestimmen: nun findet man die Zähler A, B, C - - - Z auf diese Art.

Jeder Zähler, überhaupt genommen, wird gefunden, wenn man eine gewisse Function, welche ich mit φ bezeichne, durch X dividirt, und $x = \frac{p}{q}$ beym Quotienten $\frac{\varphi}{X}$ machet: was aber die Function φ anbelangt, welche bey der Bestimmung jedes Zählers durch X dividirt werden muß, so ist diese bey der Bestimmung des ersten Zählers A mit dem Zähler M der zu zerlegenden gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ einerley; um sie aber für die Bestimmung jedes andern, z. B. rten Zählers zu erhalten, muß man von derjenigen Function φ, welche bey der Bestimmung des nächst vorhergehenden Zählers, nämlich $r-1$)ten, durch X dividirt wurde, das Product aus diesem Zähler in X abziehen, und den Rest durch $p-qx$ dividiren.

Beweis. 1) Wenn man alle Brüche auf gleiche Benennung bringet, und $X(p-qx)^n$ ſtatt N nimmt; ſo iſt

$$\frac{M}{X(p-qx)^n} = \frac{A+B(p-qx)+C(p-qx)^2+D(p-qx)^3+\ldots}{(p-qx)^n}$$
$$\frac{\ldots+P(p-qx)^r+Q(p-qx)^{r+1}+\ldots+Z(p-qx)^{n-1}}{(p-qx)^n}+\frac{\omega}{X};$$

alſo iſt:

$$M-AX-BX(p-qx)-CX(p-qx)^2-DX(p-qx)^3-\ldots$$
$$\ldots-PX(p-qx)^r-QX(p-qx)^{r+1}-\ldots-Z(p-qx)^{n-1}=\omega(p-qx)^n.$$

2) Da nun, was auf der rechten Seite ſtehet, gewiß durch $p-qx$ theilbar iſt (43. §.); ſo iſt auch das, was auf der linken Seite der Gleichung ſich befindet, durch $p-qx$ theilbar: da es alſo erhellet, daß alle Glieder, welche daſelbſt nach $M-AX$ folgen, durch $p-qx$ theilbar ſind; ſo muß auch $M-AX$ durch $p-qx$ theilbar ſeyn (41. §. 2. Zuſ.); folglich giebt es durch $p-qx$ wirklich dividirt eine gewiſſe ganze Function $\frac{M-AX}{p-qx}=\omega$.

3) Daher iſt $M-AX=\omega(p-qx)$, und $p-qx=0$ für $x=\frac{p}{q}$, daher auch $M-AX=0$ und nun $A=\frac{M}{X}$ für $x=\frac{p}{q}$, wie es die bey der Auflöſung der Aufgabe vorgeſchriebene Regel haben will.

4) Wenn man $M-AX=\omega(p-qx)$ in der Gleichung (n. 1.) ſetzt, und alle Glieder durch $p-qx$ dividirt; ſo giebt ſie

$\omega=$

$$\alpha - BX - CX(p-qx) - DX(p-qx)^2 - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - PX(p-qx)^{r-1} - QX(p-qx)^r - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - Z(p-qx)^{n-2} = \omega(p-qx)^{n-1}.$$

5) Für die Gleichung (n. 4.) gelten aber die Schlüsse (n. 2.): also muß auch $\alpha - BX$ durch $p - qx$ dividirt eine ganze Function geben, welche soll seyn $\frac{\alpha - BX}{p-qx} = \beta$.

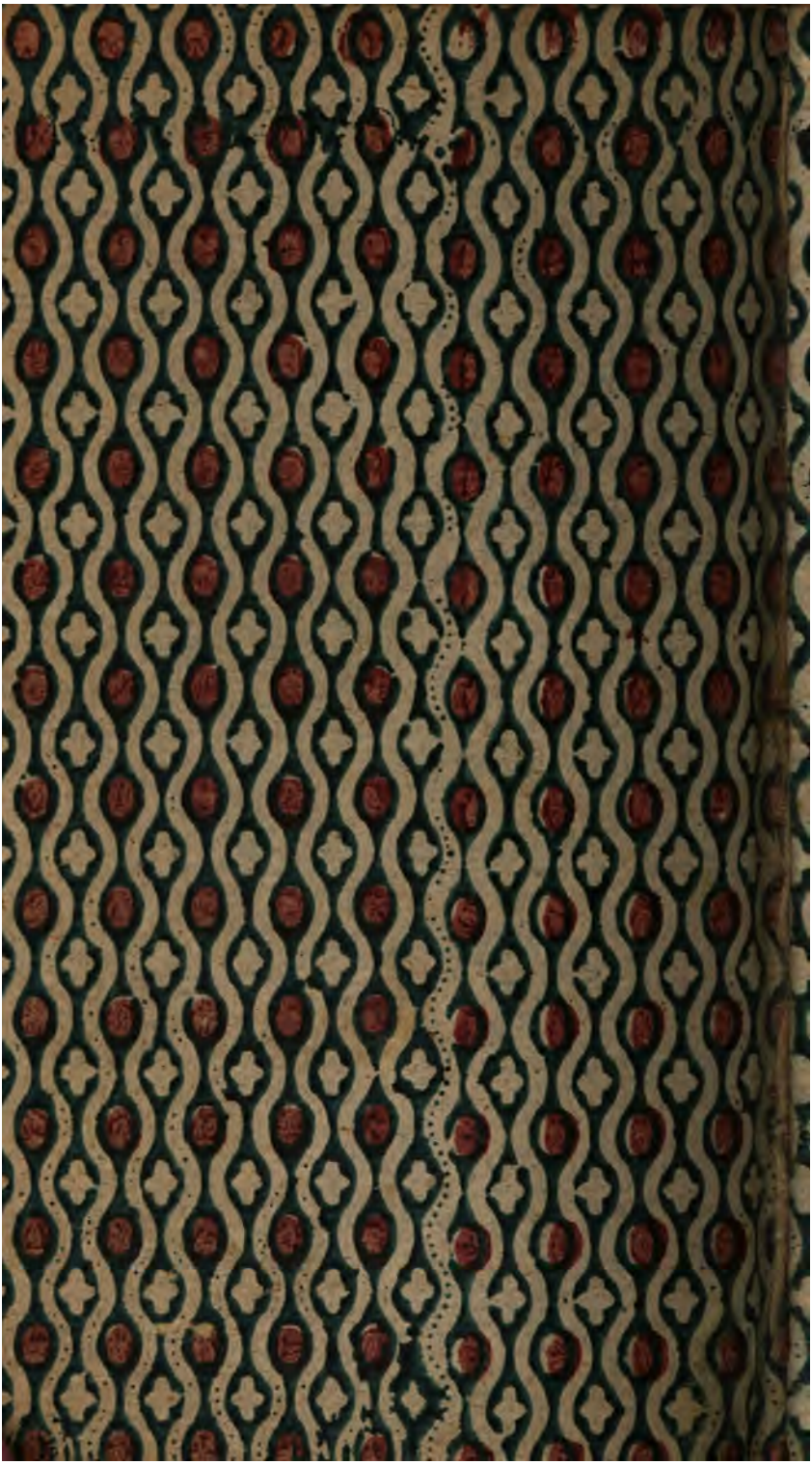
6) Daher ist $\alpha - BX = \beta(p-qx)$, und $p - qx = o$ für $x = \frac{p}{q}$, daher auch $\alpha - BX = o$, und $B = \frac{\alpha}{X}$ für $x = \frac{p}{q}$. Vergleichet man den Werth des zweyten Zählers B mit dem ersten A in (n. 3.) und dem Werth von α in (n. 2.); so wird man finden, daß die vorgeschriebene Regel auch für den zweyten Zähler B gielt.

7) Ferner setze man den Werth von $\alpha - BX$ aus (n. 6.) in (n. 4.), und dividire alle Glieder durch $p - qx$; so wird man erhalten:

$$\beta - CX - DX(p-qx) - \ldots\ldots - PX(p-qx)^{r-2}$$
$$- QX(p-qx)^{r-1} - \ldots\ldots - Z(p-qx)^{n-3} = \omega(p-qx)^{n-2}.$$

8) Die Schlüsse (n. 2.) gelten auch für die Gleichung (n. 7.): also giebt auch $\beta - CX$ durch $p - qx$ dividirt eine ganze Function $\frac{\beta - CX}{p-qx} = \gamma$.

9) Demnach ist $\beta - CX = \gamma(p-qx)$, und $p - qx = o$ für $x = \frac{p}{q}$: also ist auch $\beta - CX = o$



des $(r+1)$ten Zählers Q (n. 1.) mit dem Werthe $c = \frac{b - PX}{p - qx}$ und dem rten Zähler $P = \frac{b}{X}$; so erhellet, daß der Werth des $(r+1)$ten Zählers Q der, bey der Auflösung der Aufgabe vorgeschriebenen Regel, angemessen ist, und dieses geschah aus der Ursache, weil man angenommen hat, daß dieselbe Regel, welche für die drey ersten Zähler A, B, C bewiesen worden ist, für r erste Zähler gielt: also muß sie wirklich auch von so vielen Zählern richtig seyn, wie viel man ihrer immer haben mag (54. §.).

Beyspiele.

I. $\frac{M}{N} = \frac{1+x^5}{x^4(1+x^2)}$.

Soll seyn $\frac{M}{N} = \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{E}{1+x^2}$.

Hier ist $X = 1+x^2$; $p - qx = x$; daher $p = 0$; $-q = 1$; $q = -1$; $x = \frac{p}{q} = \frac{0}{-1} = 0$.

Also ist $A = \frac{M}{X} = \frac{1+x^5}{1+x^2} = \frac{1}{1} = 1$ für $x = \frac{p}{q}$.

Daher $\frac{M - AX}{p - qx} = \frac{1+x^5-1-x^2}{x} = x^4 - x = \alpha$:

also $B = \frac{\alpha}{X} = \frac{x^4-x}{1+x^2} = \frac{0-0}{1+0} = 0$ für $x = \frac{p}{q}$.

Daher $\frac{\alpha - BX}{p - qx} = \frac{x^4 - x - 0.(1+x^2)}{x} = x^3 - 1 = \beta$:

also $C = \frac{\beta}{X} = \frac{x^3-1}{1+x^2} = \frac{0-1}{1+0} = -1$ für $x = \frac{p}{q}$.

Sodann $\frac{\beta - CX}{p - qx} = \frac{x^3 - 1 + 1 + x^2}{x} = x^2 + x = \gamma$;

also $D = \frac{\gamma}{X} = \frac{x^2 + x}{1 + x^3} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$ für $x = \frac{p}{q}$.

Es bleibt noch der Zähler E zu bestimmen übrig; weil er aber keinen einfachen Factor zum Nenner hat; so nehme man die Werthe von A, B, C, D, und schreibe daher:

$$\frac{M}{N} = \frac{1+x^5}{x^4(1+x^2)} = \frac{1}{x^4} + \frac{0}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x} + \frac{E}{1+x^2}$$

$$\text{oder } \frac{1+x^5}{x^4(1+x^2)} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{E}{1+x^2}.$$

$$\text{oder } 1 + x^5 = 1 + x^2 - x^2(1+x^2) + x^4 E.$$

Folglich $E = \frac{x^3 + x^4}{x^4} = x + 1$, und nun

$$\frac{1+x^5}{x^4(1+x^2)} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{1+x^2}.$$

II. $\frac{M}{N} = \frac{x^3}{(1-x)^2(1+x^4)}$.

Soll seyn $\frac{M}{N} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x^4}$.

Hier ist $X = 1 + x^4$; $p - qx = 1 - x$; $p = 1$; $q = 1$; $x = \frac{p}{q} = 1$; also ist

$$A = \frac{M}{X} = \frac{x^3}{1+x^4} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ für } x = \frac{p}{q} = 1.$$

$$\text{Daher } \frac{M - AX}{p - qx} = \frac{x^3 - \frac{1}{2}(1+x^4)}{1-x} = \frac{-1-x-x^2+x^3}{2} = a;$$

also $B = \frac{\alpha}{X} = \frac{-1-x-x^2+x^3}{2(1+x^4)} = -\frac{1}{2}$ für $x = \frac{p}{q} = 1$.

Demnach ist $\frac{M}{N} = \frac{x^3}{(1-x)^2(1+x^4)} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{C}{1+x^4}$

oder $\frac{x^3}{(1-x)^2(1+x^4)} = \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2(1-x)} + \frac{C}{1+x^4}$,

und nun $C = -\frac{(x+2x^2+x^3)}{2}$; folglich

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{(x+2x^2+x^3)}{2(1+x^4)}.$$

III. $$\frac{M}{N} = \frac{1}{x^3(1-x)^2(1+x)}.$$

Soll seyn $\frac{M}{N} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^2} + \frac{F}{x}$.

Weil es für $1+x$ keinen gleichen Factor giebt; so setze man $X = x^3(1-x)^2$; $p - qx = 1+x$; $p = 1$; $-q = 1$; $q = -1$; $x = \frac{p}{q} = -1$, und suche hierauf A nach (165. §.), nämlich:

$$A = \frac{M}{X} = \frac{1}{x^3(1-x)^2} = \frac{1}{-1(1+1)^2} = -\frac{1}{4} \text{ für } x = \frac{p}{q} = -1.$$

Für B und C muß $X = x^3(1+x) = x^3+x^4$ seyn, und $p - qx = 1-x$; $p = 1$; $q = 1$; $x = \frac{p}{q} = 1$: also

$$B = \frac{M}{X} = \frac{1}{x^3+x^4} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ für } x = \frac{p}{q} = 1.$$

Daher $\frac{M - BX}{p - qx} = \frac{1-\frac{1}{2}(x^3+x^4)}{1-x} = 1+x+x^2+\frac{1}{2}x^3 = \alpha$:

also $C = \frac{\alpha}{X} = \frac{1+x+x^2+\frac{1}{2}x^3}{x^3+x^4} = \frac{7}{4}$ für $x = \frac{p}{q} = 1$,

Endlich für D, E, F ist $X = (1+x)(1-x)^2 = 1-x-x^2+x^3$, und $p-qx = x$, daher $p=0$, $-q=1$, $q=-1$, $x = \frac{p}{q} = \frac{0}{-1} = 0$: also ist

$$D = \frac{M}{X} = \frac{1}{1-x-x^2+x^3} = 1 \text{ für } x = \frac{p}{q} = 0,$$

$$\text{Daher } \frac{M-DX}{p-qx} = \frac{1-1+x+x^2-x^3}{x} = 1+x-x^2 = \alpha;$$

$$\text{also } E = \frac{\alpha}{X} = \frac{1+x-x^2}{1-x-x^2+x^3} = 1 \text{ für } x = \frac{p}{q} = 0,$$

$$\text{Daher } \frac{\alpha-EX}{p-qx} = \frac{1-1+x+x^2-x^3}{x} = 1+x-x^2 = \beta;$$

$$\text{also } F = \frac{\beta}{X} = \frac{1+x-x^2}{1-x-x^2+x^3} = 1 \text{ für } x = \frac{p}{q} = 0,$$

Für die gefundenen Werthe von A, B, C, D, E, F ist demnach die gegebene gebrochene Function.

$$\frac{M}{N} = \frac{-\frac{1}{4}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{1-x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{7}{4(1-x)} - \frac{1}{4(1+x)}.$$

167. §. Aufgabe.

Eine ächte gebrochene Function $\frac{M}{N}$, deren Nenner N aus lauter gleichen einfachen Factoren von der Form $p-qx$ besteht, in so viele Brüche, als es da solche Factoren giebt, zu zerlegen.

Auflö-

Auflösung. Wenn N nur gleiche Factoren hat, von der Form $p-qx$, und ihre Anzahl $=n$ ist; so ist $N=(p-qx)^n=1.(p-qx)$: man kann also nach (166. §.) verfahren, wenn nur $X=1$ gesetzt wird.

Beyspiele.

I. $\frac{M}{N}=\frac{x^2-1}{(2+x)^3}$.

Soll seyn $\frac{M}{N}=\frac{A}{(2+x)^3}+\frac{B}{(2+x)^2}+\frac{C}{2+x}$.

Hier ist daher $X=1$; $p-qx=2+x$; $p=2$; $-q=1$; $q=-1$; $x=\frac{p}{q}=\frac{2}{-1}=-2$:

also ist $A=\frac{M}{X}=\frac{x^2-1}{1}=4-1=3$ für $x=\frac{p}{q}=-2$.

Daher $\frac{M-AX}{p-qx}=\frac{x^2-1-3}{2+x}=\frac{-4+x^2}{2+x}=-2+x=\alpha$:

also $B=\frac{\alpha}{X}=\frac{-2+x}{1}=-2-2=-4$ für $x=\frac{p}{q}=-2$.

Daher $\frac{\alpha-BX}{p-qx}=\frac{-2+x+4}{2+x}=\frac{2+x}{2+x}=1$:

also $C=\frac{\alpha}{X}=\frac{1}{1}=1$.

Folglich ist $\frac{M}{N}=\frac{3}{(2+x)^3}-\frac{4}{(2+x)^2}+\frac{1}{2+x}$.

II. $\frac{M}{N}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

Soll seyn $\frac{M}{N}=\frac{A}{(1-x)^3}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1-x}$.

Hier iſt $X = 1$; $p - qx = 1 - x$; daher $p = 1$; $q = 1$; $x = \frac{p}{q} = 1$: alſo

$$A = \frac{M}{X} = \frac{1+x}{1} = 2 \text{ für } x = \frac{p}{q} = 1.$$

$$\frac{M - AX}{p - qx} = \frac{1+x-2}{1-x} = -1 = \alpha:$$

alſo $B = \frac{\alpha}{X} = \frac{-1}{1} = -1.$

$$\frac{\alpha - BX}{p - qx} = \frac{-1+1}{1-x} = 0 = \beta: \text{ alſo } C = \frac{\beta}{X} = 0.$$

Demnach $\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}$.

Anmerkung des Herausgebers.

Dieſe ſinnreiche Art, gebrochene Functionen in einfache zu zerlegen, oder vielmehr die Zähler dieſer einfachen Functionen aufzuſuchen, hat Hr. Euler umſtändlich gelehrt[a]; daſſelbe hat hierauf Hr. Hofr. Käſtner gleich bündig als kurz geleiſtet[b]; Hr. Hofr. Karſten aber ſchlägt vor, dieſer Methode ſich bey der Zerlegung gebrochener Functionen, deren Nenner aus gleichen und ungleichen Factoren beſtehen, (166. §.) zu bedienen, hingegen zerlegt er die übrigen Functionen (165. 167. §.) in Brüche dadurch, daß er ihre Zähler als unbeſtimmte Coefficienten einer Reihe nach (8. §.) aufſuchet[c]: man kann zwar nicht ſagen, daß dieſe Methode, welche man auch bey andern Schriftſtellern finden wird, z. B. bey den Hrn. Vega[d], Bezout[e], ꝛc. allemahl

allemahl bequemer iſt, als die vorige, doch verdient dieſelbe ihrer Allgemeinheit wegen erläutert zu werden.

(a) Introd. in Analyſ. Infin. Tom. I. Cap. II.
(b) Anfangsgr. der Analyſ. des Unendlichen. 347. §.
(c) Anfangsgr. der Mathem. Analyſ. III. Abſchn.
(d) Vorleſ. über die Mathem. I. B. VI. Vorleſ.
(e) Cours de Mathématiques. Tome troiſième. §. 107—;

Man ſoll die Function $\frac{5-4x}{(3+2x)(1-3x)}$ zerlegen.

Sey $\frac{5-4x}{(3+2x)(1-3x)} = \frac{a}{3+2x} + \frac{b}{1-3x}$;

ſo iſt $5-4x = (1-3x)a+(3+2x)b$

$= \begin{matrix} a & -3a \\ +3b & +2b \end{matrix} x$: alſo nach (83. §.)

$a+3b=5$; $-3a+2b=-4$;

$a=5-3b$; $-15+9b+2b=-4$;

daher $b=1$, und nun $a=2$.

So groß waren dieſe Zähler auch in (165. §. I. Beyſp.) gefunden worden.

Man ſoll $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ zerlegen.

Sey $\frac{M}{N} = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{a}{(1-x)^3} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-x}$;

ſo iſt $1+x = a+b(1-x)+c(1-x)^2$;

oder $1+x = a+bx+cx^2$;
$\quad +b-2cx$
$\quad +c$

alſo (83. §.) $a+b+c=1$; $-b-2c=1$; $c=0$,

folglich $a=2$; $b=-1$.

Und

Und diese Zähler wurden so groß auch in (167. §. II. Beysp.) gefunden.

Bestehet aber der Nenner aus dreytheilichten Factoren; so kann alsdann diese Methode mit Vortheile gebraucht werden, nur muß man jedem Zähler die Form A+Bx geben.

Man soll $\frac{1}{x(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$ zerlegen.

Sey $\frac{1}{x(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b+cx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$;

so ist $1 = a(\alpha+\beta x+\gamma x^2)+x(b+cx)$
$= a\alpha + a\beta x + a\gamma x^2$
$+ bx + cx^2$;

also $a\alpha = 1$; $a\beta+b=0$; $a\gamma+c=0$

daher $a=\frac{1}{\alpha}$; $b=\frac{-\beta}{\alpha}$; $c=\frac{-\gamma}{\alpha}$.

Man soll $\frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}$ zerlegen.

Sey $\frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{a+bx}{(1+x+x^2)^2} + \frac{c+dx}{1+x+x^2}$

so ist $1-x^2 = a+bx+(c+dx)(1+x+x^2)$
$= a+bx+cx^2+dx^3$
$+ c+cx+dx^2$
$+ dx$

daher $a+c=1$; $b+c+d=0$; $c+d=-1$; $d=0$

folglich $c=-1$; $a=2$; $b=1$, und nun

$\frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{2+x}{(1+x+x^2)^2} \frac{-1}{1+x+x^2}$.

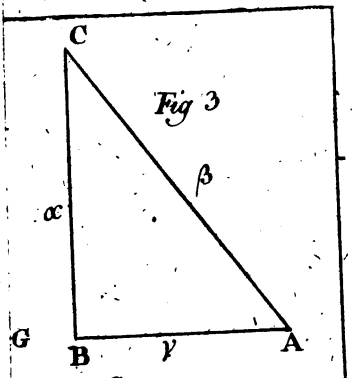


Fig 3

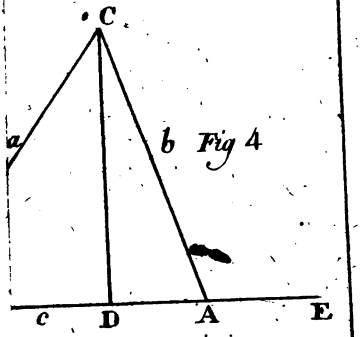


Fig 4

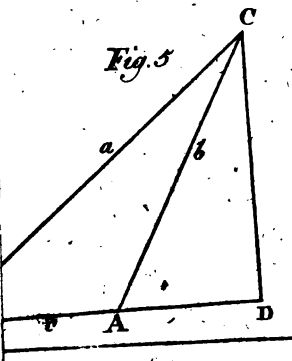


Fig. 5

also $C = \frac{\alpha}{X} = \frac{1+x+x^2+\frac{1}{2}x^3}{x^3+x^4} = \frac{7}{4}$ für $x = \frac{p}{q} = 1$.

Endlich für D, E, F ist $X = (1+x)(1-x)^2 = 1-x-x^2+x^3$, und $p-qx = x$, daher $p = 0$, $-q = 1$, $q = -1$, $x = \frac{p}{q} = \frac{0}{-1} = 0$: also ist

$$D = \frac{M}{X} = \frac{1}{1-x-x^2+x^3} = 1 \text{ für } x = \frac{p}{q} = 0,$$

Daher $\frac{M-DX}{p-qx} = \frac{1-1+x+x^2-x^3}{x} = 1+x-x^2 = \alpha$:

also $E = \frac{\alpha}{X} = \frac{1+x-x^2}{1-x-x^2+x^3} = 1$ für $x = \frac{p}{q} = 0$.

Daher $\frac{\alpha-EX}{p-qx} = \frac{1-1+x+x^2-x^3}{x} = 1+x-x^2 = \beta$:

also $F = \frac{\beta}{X} = \frac{1+x-x^2}{1-x-x^2+x^3} = 1$ für $x = \frac{p}{q} = 0$.

Für die gefundenen Werthe von A, B, C, D, E, F ist demnach die gegebene gebrochene Function.

$$\frac{M}{N} = \frac{-\frac{1}{4}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{1-x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{7}{4(1-x)} - \frac{1}{4(1+x)}.$$

167. §. Aufgabe.

Eine ächte gebrochene Function $\frac{M}{N}$, deren Nenner N aus lauter gleichen einfachen Factoren von der Form $p-qx$ bestehet, in so viele Brüche, als es da solche Factoren giebt, zu zerlegen.

Auflö-

Auflösung. Wenn N nur gleiche Factoren hat, von der Form $p-qx$, und ihre Anzahl $=n$ ist; so ist $N=(p-qx)^n=1.(p-qx)$: man kann also nach (166. §.) verfahren, wenn nur $X=1$ gesetzt wird.

Beyspiele.

I. $\frac{M}{N}=\frac{x^2-1}{(2+x)^3}$.

Soll seyn $\frac{M}{N}=\frac{A}{(2+x)^3}+\frac{B}{(2+x)^2}+\frac{C}{2+x}$.

Hier ist daher $X=1$; $p-qx=2+x$; $p=2$; $-q=1$; $q=-1$; $x=\frac{p}{q}=\frac{2}{-1}=-2$:

also ist $A=\frac{M}{X}=\frac{x^2-1}{1}=4-1=3$ für $x=\frac{p}{q}=-2$.

Daher $\frac{M-AX}{p-qx}=\frac{x^2-1-3}{2+x}=\frac{-4+x^2}{2+x}=-2+x=\alpha$:

also $B=\frac{\alpha}{X}=\frac{-2+x}{1}=-2-2=-4$ für $x=\frac{p}{q}=-2$.

Daher $\frac{\alpha-BX}{p-qx}=\frac{-2+x+4}{2+x}=\frac{2+x}{2+x}=1$:

also $C=\frac{\alpha}{X}=\frac{1}{1}=1$.

Folglich ist $\frac{M}{N}=\frac{3}{(2+x)^3}-\frac{4}{(2+x)^2}+\frac{1}{2+x}$.

II. $\frac{M}{N}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

Soll seyn $\frac{M}{N}=\frac{A}{(1-x)^3}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1-x}$.

Hier ist $X = 1$; $p - qx = 1 - x$; daher $p = 1$; $q = 1$; $x = \frac{p}{q} = 1$: also

$$A = \frac{M}{X} = \frac{1+x}{1} = 2 \text{ für } x = \frac{p}{q} = 1.$$

$$\frac{M - AX}{p - qx} = \frac{1+x-2}{1-x} = -1 = \alpha;$$

also $B = \frac{\alpha}{X} = \frac{-1}{1} = -1$.

$$\frac{\alpha - BX}{p - qx} = \frac{-1+1}{1-x} = 0 = \beta; \text{ also } C = \frac{\beta}{X} = 0.$$

Demnach $\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}$.

Anmerkung des Herausgebers.

Diese sinnreiche Art, gebrochene Functionen in einfache zu zerlegen, oder vielmehr die Zähler dieser einfachen Functionen aufzusuchen, hat Hr. Euler umständlich gelehrt[a]; dasselbe hat hierauf Hr. Hofr. Kästner gleich bündig als kurz geleistet[b]; Hr. Hofr. Karsten aber schlägt vor, dieser Methode sich bey der Zerlegung gebrochener Functionen, deren Nenner aus gleichen und ungleichen Factoren bestehen, (166. §.) zu bedienen, hingegen zerlegt er die übrigen Functionen (165. 167. §.) in Brüche dadurch, daß er ihre Zähler als unbestimmte Coefficienten einer Reihe nach (8. §.) aufsuchet[c]: man kann zwar nicht sagen, daß diese Methode, welche man auch bey andern Schriftstellern finden wird, z. B. bey den Hrn. Vega[d], Bezout[e], ꝛc. allemahl

allemahl bequemer iſt, als die vorige, doch verdient dieſelbe ihrer Allgemeinheit wegen erläutert zu werden.

(a) Introd. in Analyſ. Infin. Tom. I. Cap. II.
(b) Anfangsgr. der Analyſ. des Unendlichen. 347. §.
(c) Anfangsgr. der Mathem. Analyſ. III. Abſchn.
(d) Vorleſ. über die Mathem. I. B. VI. Vorleſ.
(e) Cours de Mathématiques. Tome troiſième. §. 107—;

Man ſoll die Function $\frac{5-4x}{(3+2x)(1-3x)}$ zerlegen.

Sey $\frac{5-4x}{(3+2x)(1-3x)} = \frac{a}{3+2x} + \frac{b}{1-3x}$;

ſo iſt $5-4x = (1-3x)a+(3+2x)b$

$= \begin{matrix} a & -3a \\ +3b & +2b \end{matrix} x$; alſo nach (83. §.)

$a+3b=5$; $-3a+2b=-4$;

$a=5-3b$; $-15+9b+2b=-4$;

daher $b=1$, und nun $a=2$.

So groß waren dieſe Zähler auch in (165. §. I. Beyſp.) gefunden worden.

Man ſoll $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ zerlegen.

Sey $\frac{M}{N} = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{a}{(1-x)^3} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-x}$;

ſo iſt $1+x = a+b(1-x)+c(1-x)^2$;

oder $1+x = a+bx+cx^2$;
$\quad +b-2cx$
$\quad +c$

alſo (83. §.) $a+b+c=1$; $-b-2c=1$; $c=0$,

folglich $a=2$; $b=-1$.

Und

Und dieſe Zähler wurden ſo groß auch in (167. §. II. Beyſp.) gefunden.

Beſtehet aber der Nenner aus dreytheilichten Factoren; ſo kann alsdann dieſe Methode mit Vortheile gebraucht werden, nur muß man jedem Zähler die Form A+Bx geben.

Man ſoll $\frac{1}{x(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$ zerlegen.

Sey $\frac{1}{x(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b+cx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$;

ſo iſt $1 = a(\alpha+\beta x+\gamma x^2)+x(b+cx)$
$= a\alpha + a\beta x + a\gamma x^2$
$+ bx + cx^2$;

alſo $a\alpha = 1$; $a\beta+b=0$; $a\gamma+c=0$

daher $a=\frac{1}{\alpha}$; $b=\frac{-\beta}{\alpha}$; $c=\frac{-\gamma}{\alpha}$.

Man ſoll $\frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}$ zerlegen.

Sey $\frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{a+bx}{(1+x+x^2)^2} + \frac{c+dx}{1+x+x^2}$;

ſo iſt $1-x^2 = a+bx+(c+dx)(1+x+x^2)$
$= a+bx+cx^2+dx^3$
$+c+cx+dx^2$
$+dx$

daher $a+c=1$; $b+c+d=0$; $c+d=-1$; $d=0$

folglich $c=-1$; $a=2$; $b=1$, und nun

$\frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{2+x}{(1+x+x^2)^2} \frac{-1}{1+x+x^2}$.

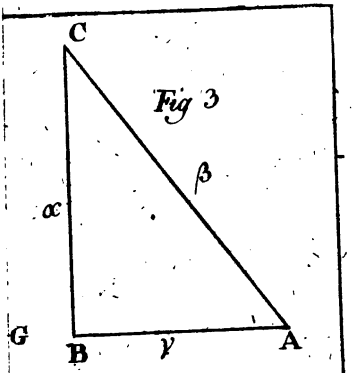


Fig 3

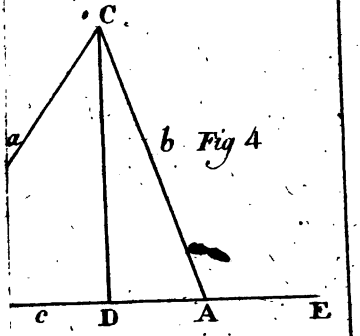


Fig 4

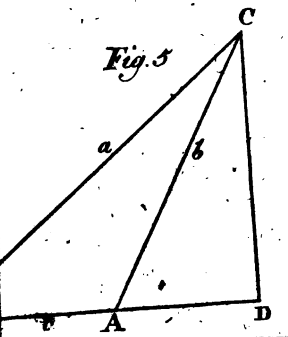


Fig. 5

7

$\frac{15}{5}$

6/12/2

$\frac{18}{6}$

3/5/5